Curso 2020/2021
Grado en Ingeniería Química Industrial
Matemáticas I - Problemas Tema 9
Cálculo
Límites y continuidad de funciones de una variable

1. Calcula el dominio de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \dfrac{x}{x+1}$ b) $g(x) = \dfrac{x+3}{x^2-4}$ c) $h(x) = \sqrt{x^3+3x^2-4x-12}$ d) $k(x) = \sqrt{x^2+1}$

e) $l(x) = \sqrt{\dfrac{x-1}{x+2}}$ f) $m(x) = \log\left(x^2\right)$ g) $n(x) = \sqrt[3]{x^3-1}$ h) $o(x) = \dfrac{1}{\sin x}$

2. Demuestra por la definición de límite que:

a) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-2x+1}{x^2-1} = 0$ b) $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{x^2+3x+2}{x^2+5x+6} = -1$ c) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3-x^2-x+1}{x^3-3x+2} = \dfrac{2}{3}$

3. Calcula los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2-1}{2x^2-x-1}$ b) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-1}{2x^2-x-1}$ c) $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{x^2-1}{2x^2-x-1}$

d) $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{5x^3-4x^2+x-1}{2x^2-x-1}$ e) $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{5x-4x^2-1}{2x^3-x-1}$ f) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x \sin x - x(1+x)}{x^3}$

g) $\lim\limits_{x\to 0} x \cot 3x$ h) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos 3x}{x(x-2)\tan 2x}$ i) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\log x}{x-\sqrt{x}}$

j) $\lim\limits_{x\to \pi} (3\cos 2x)^{\frac{2}{(x-\pi)^2}}$ k) $\lim\limits_{x\to 0^+} (\arctan x)^{\frac{1}{\log x}}$ l) $\lim\limits_{x\to 0} (\cos 3x)^{\frac{1}{x^2}}$

4. Analiza la continuidad de las siguientes funciones

a) $f(x) = x^2-1$ b) $g(x) = \sqrt{x^2-4}$ c) $h(x) = \left|x^2-6x+8\right|$

d) $k(x) = \left|\dfrac{x}{1+x}\right|$ e) $l(x) = \dfrac{1}{x^2-4}$ f) $m(x) = \dfrac{1}{x^2+x+1}$

g) $n(x) = \dfrac{1}{|x|}$ h) $o(x) = \begin{cases} x^2-4 & x < -2 \\ x+1 & -2 \leq x < 2 \\ 2x-1 & x \geq 2 \end{cases}$

i) $p(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} & x < 0 \\ x+1 & 0 \leq x \leq 3 \\ \dfrac{1}{x^2-9} & x > 3 \end{cases}$ j) $q(x) = \begin{cases} -2x+1 & x \leq 0 \\ 2x+3 & 0 < x \leq 2 \\ \dfrac{1}{x-2} & x \geq 2 \end{cases}$

5. Determina $a, b \in \mathbb{R}$ para los cuales las siguientes funciones son continuas:

$$\text{a) } f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R} \text{ tal que } f(x)=\begin{cases} ax-5 & x\leq -1 \\ -ax+b & -1<x<2 \\ -2ax+3b & x\geq 2 \end{cases}$$

$$\text{b) } g:[-2,5)\rightarrow\mathbb{R} \text{ tal que } g(x)=\begin{cases} 3x+a & -2\leq x<-1 \\ bx+a & -1\leq x<3 \\ 2x-b & 3\leq x<5 \end{cases}$$

6. Demuestra, aplicando el Teorema de Bolzano que las siguientes ecuaciones tienen solución en los intervalos indicados

a) $x^3+2x-1=0 \qquad x\in\,]0,2[$

b) $1-x=\tan x \qquad x\in\left]0,\dfrac{\pi}{4}\right[$

c) $x^n-2=0 \qquad n\in\mathbb{N}, n>1, x\in\,]0,2[$

7. Indica en cada apartado qué hipótesis del Teorema de Bolzano falla y analiza si se verifica o no la Tesis de dicho Teorema:

$$\text{a) } f:[0,2]\rightarrow\mathbb{R} \text{ tal que } f(x)=\begin{cases} x-1 & 0\leq x\leq 1 \\ x^2-2 & 1<x\leq 2 \end{cases}$$

$$\text{b) } g:[1,3]\rightarrow\mathbb{R} \text{ tal que } g(x)=x^2+1$$

8. Demuestra que todo polinomio de grado impar tiene por lo menos una raíz real.

9. Justifica que un hilo de alambre con forma circular calentado tiene dos puntos diametralmente opuestos con la misma temperatura.
