industriales
etsii UPCT

Curso 2020/2021
Grado en Ingeniería Química Industrial
Matemáticas I - Problemas Tema 10
Análisis Matemático
Cálculo diferencial en una variable

1. Aplica la definición para hallar las derivadas de cada función en los puntos que se indican:

   a) $f(x) = c, \quad \forall x \in \mathbb{R}$ b) $g(x) = x^2, \quad \forall x \in \mathbb{R}$ c) $h(x) = \frac{x-1}{x^2+2}$, para $x_0 = 1$

2. Calcula los puntos de la gráfica de cada función cuyas rectas tangentes en dichos puntos formen el ángulo θ con la parte positiva del eje OX:

   a) $f(x) = x^2 - 4, \quad \theta = \frac{\pi}{4}$ b) $g(x) = \operatorname{sen} x$, recta tangente horizontal c) $h(x) = e^x, \quad \theta = \frac{\pi}{2}$

3. Analiza la continuidad y la derivabilidad de cada función:

   a) $f(x) = \begin{cases} x^2 & x \leq 0 \\ 2x & x < 0 \end{cases}$ b) $g(x) = \begin{cases} 2x+5 & x \leq -1 \\ x^2 & x > -1 \end{cases}$ c) $h(x) = \begin{cases} x^2 - 5 & x < 2 \\ 3x - 7 & x \geq 2 \end{cases}$

   d) $k(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} & x < 0 \\ 2x^2 & x \geq 0 \end{cases}$ e) $l(x) = \begin{cases} \dfrac{|x|}{x} & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$ f) $m(x) = \left|x^2 - 4\right|$

   g) $n(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$ h) $o(x) = |x+3|$

4. Calcula las rectas tangentes a las gráficas de cada función en sus correspondientes puntos de inflexión:

   a) $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 7$ b) $g(x) = xe^{-x}$ c) $h(x) = \dfrac{x^2}{2} - \log x$

5. Calcula la derivada de cada función:

   a) $f(x) = \dfrac{x-3}{x+1}$ b) $g(x) = \dfrac{(x-1)^2}{\log x^2}$ c) $h(x) = \operatorname{sen}^3 x^2$

   d) $k(x) = \dfrac{\arctan^3 x - \operatorname{sen} x^2}{x}$ e) $l(x) = \operatorname{arcsen}^2\left(\dfrac{x-1}{x+2}\right)$ f) $m(x) = \cos(\cos(\cos x))$

   g) $n(x) = \sec^2 x - \operatorname{cosec} x^2$ h) $o(x) = 5^{2\operatorname{sen} x} - x^4$ i) $p(x) = (x)^{x^2}$

   j) $q(x) = \operatorname{sen} x^x$ k) $r(x) = (\cos x)^x$ l) $s(x) = x^{\arctan^2 x}$

6. Demuestra las siguientes desigualdades:

   a) $\tan x \geq x$, en $0 \leq x < \dfrac{\pi}{2}$ b) $e^x \geq \dfrac{1}{1+x}$, en $x > 0$ c) $\log x < x$, en $x > 1$

7. Demuestra que

$$|\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} y| \leq |x - y|; \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

8. Calcula las derivada n–ésimas de cada función:

   a) $f(x) = \log(kx)$, $\quad k > 0$ $\qquad$ b) $g(x) = \cos(kx)$ $\qquad$ c) $h(x) = \sqrt{x}$ $\qquad$ d) $k(x) = xe^{x}$

9. Representa gráficamente las siguientes funciones:

   a) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$ $\quad$ b) $g(x) = -x^4 + x^2$ $\quad$ c) $h(x) = \dfrac{x^2-1}{x}$ $\quad$ d) $k(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$

   e) $l(x) = \dfrac{x^2}{x^2+x-4}$ $\quad$ f) $m(x) = \dfrac{x}{1+|x|}$ $\quad$ g) $n(x) = \ln\left(x^2-9\right)$ $\quad$ h) $o(x) = xe^{-x}$

   i) $p(x) = \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$ $\quad$ j) $q(x) = \operatorname{sen} x \cos x$ $\quad$ k) $r(x) = \operatorname{Sh}(x)$ $\quad$ l) $s(x) = \operatorname{Ch} x$

10. Calcula, si es posible, los extremos absolutos de las siguientes funciones en los intervalos que se dan:

    a) $f(x) = x^3 - 3$ en $[-2, 2]$ $\qquad$ b) $g(x) = x + \dfrac{2+2x}{x^2+1}$ en $[0, 3]$ $\qquad$ c) $h(x) = e^{-x^2}$ en $\mathbb{R}$

11. Calcula entre todos los números positivos cuyo producto es 16, aquellos que tienen suma mínima.

12. Calcula el punto de la parábola $y = x^2$ de menor distancia al punto $P = (1, 2)$,

13. Calcula las dimensiones del triángulo isósceles de área máxima y perímetro $30cm$.

14. Calcula la distancia mínima del origen a la curva $xy = 1$.

15. Calcula el rectángulo de área máxima y lados paralelos a los ejes inscrito en la elipse $4x^2 + y^2 = 1$.

16. Calcula el rectángulo de área máxima inscrito en una circunferencia de radio $8cm$.

17. Para cada función, analiza si se verifican o no las hipótesis del Teorema de Rolle. Si es posible, calcula un valor donde se cumpla la tesis:

    a) $f(x) = x^2 - 4x + 2$ en $[1, 3]$ $\qquad$ b) $g(x) = x^3 - 1$ en $[0, 1]$ $\qquad$ c) $h(x) = |x-1|$ en $[0, 2]$

18. Para cada función, analiza si se verifican o no las hipótesis del Teorema del Valor Medio de Lagrange. Si es posible, calcula un valor donde cumpla la tesis:

    a) $f(x) = \left|x^2 - 9\right|$ en $[1, 4]$ $\qquad$ b) $g(x) = x^2 + 2$ en $[0, 2]$

    c) $h(x) = x^2 + x + 1$ en $[-1, 1]$ $\qquad$ d) $k(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}x^2 + x + 1 & -1 \le x \le 0 \\ x + 1 & 0 < x \le 2 \end{cases}$

19. Calcula los valores de a y b para los cuales cada función satisface las hipótesis del Teorema del Valor Medio de Lagrange en los intervalos indicados. Para dichos valores, calcula un punto donde se obtenga la tesis:

    a) $f(x) = \begin{cases} ax^2 + bx + 1 & -1 \le x \le 0 \\ ax + b & 0 < x \le 1 \end{cases}$ $\qquad$ b) $g(x) = \begin{cases} 2x - a & -1 \le x \le 1 \\ ax + b & 1 < x \le 2 \end{cases}$

    c) $h(x) = \begin{cases} ax^2 + 1 & -4 \le x \le -1 \\ 2x + b & -1 < x \le 0 \end{cases}$

20. Dada la función $f(x) = x^2 + 1$, ¿Qué teorema afirma que existe $x \in \,]-2, 1[$ tal que la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en $(x_0, f(x_0))$ es paralela a la recta que pasa por los puntos $P = (-2, 5)$ y $Q = (1, 2)$. Calcula x_0.

21. Para cada par de funciones, comprueba si se verifican las hipótesis del Teorema del Valor Medio de Cauchy en los intervalos indicados. Si es posible, calcula un valor donde se cumpla la tesis:

    a) $f(x) = x^2 - 1$ y $g(x) = x + 2$ en $[0, 3]$

    b) $f(x) = |x|$ y $g(x) = x^2 - 3x + 1$ en $[1, 2]$

    c) $f(x) = \begin{cases} x^2 - 4 & x \leq 2 \\ x - 2 & x > 2 \end{cases}$ y $g(x) = x^2 + 2x + 1$ en $[0, 3]$

22. Calcula cada límite usando el Teorema de L'Hôpital:

    a) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^3 - 1}{x^2 - 1}$

    b) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos ax}{1 - \cos bx}$, $a, b \in \mathbb{R}$

    c) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} \dfrac{1 - \tan x}{x - \frac{\pi}{4}}$

    d) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$

    e) $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{\csc x}{\ln x}$

    f) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}^+} \dfrac{\sec x}{\ln\left(x - \dfrac{\pi}{2}\right)}$

    g) $\lim\limits_{x \to \infty} x e^{-x}$

    h) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - e^{\operatorname{sen} x}}{x^3}$

    i) $\lim\limits_{x \to 0^+} \tan x \ln x$

    j) $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{1}{\operatorname{sen} x} - \dfrac{1}{x^3}\right)$

    k) $\lim\limits_{x \to \infty} x^{\frac{1}{x}}$

    l) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x - \operatorname{sen} x}{x^3}$

    m) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{e^x + \cos x}{e^x + \sin x}$

    n) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} (1 + \cos x)^{\frac{1}{\cos x}}$

    o) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\cos(x - 1) - 1}{(\ln x)^2}$

    p) $\lim\limits_{x \to 0^+} (\cot x)^x$

    q) $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{1 + \tan x}{1 + \sin x}\right)^{\csc x}$

    r) $\lim\limits_{x \to 0} \left(\cot x - \frac{1}{x}\right)$

    s) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x}{\ln x} - \dfrac{1}{\operatorname{sen}(x - 1)}$

    t) $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\cos \frac{1}{x}\right)^x$

23. Escribe el desarrollo de Taylor de orden n de cada función en el punto x_0 dado:

    a) $f(x) = \ln(1 + x)$; $x_0 = 0, n = 3$

    b) $g(x) = \operatorname{sen} x^2 - x \cos x; x_0 = 0, n = 3$

    c) $h(x) = x e^{x-1}; x_0 = 1, n = 3$

    d) $k(x) = \cos(x)$; $x_0 = 0, n = 5$

    e) $l(x) = x \operatorname{sen} x; x_0 = 0, n = 6$

    f) $m(x) = \tan(2x); x_0 = 0; n = 4$

    g) $n(x) = \sqrt{x}; x_0 = 1; n = 4$

    h) $o(x) = \ln(x); x_0 = 1; n = 4$

    i) $f(x) = \cos(x); x_0 = \frac{\pi}{2}; n = 46$

24. Escribe el desarrollo de Taylor de cada función, en el punto y orden que se indica, acotando el resto en el intervalo propuesto:

    a) $f(x) = \cos x$ $\quad x_0 = 0, n = 6, x \in [-2, 2]$

    b) $g(x) = \dfrac{x + 7}{x + 2}$ $\quad x_0 = 3, n = 3, x \in [2, 3]$

    c) $h(x) = e^{-x}$ $\quad x_0 = 0, n \in \mathbb{N}, x \in [-1, 1]$

25. Calcula el desarrollo de McLaurin de grado 3 de la función $f(x) = \sqrt{1 + x}$ y utiliza este desarrollo para aproximar el valor de $\sqrt{1{,}1}$, obteniendo la menor cota posible del error cometido.

26. Calcula el desarrollo de Taylor de grado 3 en $x_0 = 1$ de la función $f(x) = \ln(x)$ y utiliza este desarrollo para aproximar el valor de $\ln(0{,}9)$, obteniendo la menor cota posible del error cometido.

27. Calcula el desarrollo de Taylor de grado 4 en $x_0 = 9$ de la función $f(x) = \sqrt{x}$ y utiliza este desarrollo para aproximar el valor de $\sqrt{10}$, obteniendo la menor cota posible del error cometido.

28. Obtén aproximaciones con las cifras decimales exactas indicadas usando el polinomio de Taylor adecuado:

    a) $\frac{1}{\sqrt{1{,}1}}$ con 3 decimales exactos.

    b) $\cos(0{,}1)$ con 3 cifras decimales exactas.

    c) $e^{0{,}1}$ con 4 cifras decimales exactas.

    d) $\sqrt{84}$con 2 cifras decimales exactas.

    e) $\mathrm{e}^{0{,}1}\operatorname{sen} 0{,}1$ con 3 cifras decimales exactas.

29. (*) Usando el polinomio de Taylor de la función $f(x) = 6 \operatorname{arcsen} x$ en $x_0 = 0$, calcula una aproximación de π con 4 cifras decimales. (Ayuda: $\pi = f\left(\frac{1}{2}\right)$).

30. **El Principio de Fermat y la Ley de Snell en Óptica**. El Principio de Fermat establece que la luz viaja siguiendo el camino más rápido. Supongamos que en un plano tenemos dos puntos de coordenadas $A = (0, r)$ y $B = (s, q)$, con $r, s > 0$ y $q < 0$. Supongamos también que en la región $y > 0$ la luz viaja a velocidad v mientras que al pasar por el eje OX (al cambiar de medio) se refracta y su velocidad pasa a ser w. Denotemos por x el punto del eje OX por el cual la luz pasa de un medio a otro. Se pide:

    a) Calcula, en función de x, el tiempo que tarda la luz en viajar desde A hasta B.

    b) Teniendo en cuenta el Principio de Fermat, encuentra la ecuación que satisface x.

    c) Denotemos por α el ángulo de incidencia, es decir, el ángulo que forma el rayo de luz con la vertical en el punto x antes de ser refractado, y por β el ángulo de refracción, es decir, el ángulo del rayo de luz en el punto x una vez se ha refractado. Demuestra que se satisface la lo que en óptica se llama Ley de Snell:

    $$\frac{\operatorname{sen} \alpha}{v} = \frac{\operatorname{sen} \beta}{w},$$

    d) El Principo de Fermat también es válido para la luz reflejada. Demuestra que, en este caso, el ángulo de incidencia es igual al reflejado.

(*) Ejercicio de dificultad especial, no entra en la evaluación.