1. Aplica la definición para hallar las derivadas de cada función en los puntos que se indican:

   a) $f(x) = c, \quad \forall x \in \mathbb{R}$ b) $g(x) = x^2, \quad \forall x \in \mathbb{R}$ c) $k(x) = \frac{x-1}{x^2+2}$, para $x_0 = 1$

   Solución: La definición derivada consiste en el cálculo de este límite

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

   a) La función es constante para cualquier valor de x, por tanto

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{c-c}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{0}{h} = \lim_{h \to 0} 0 = 0$$

   b)

$$\lim_{h \to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{x^2 + 2xh + h^2 - x^2}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{2xh + h^2}{h} \lim_{h \to 0} 2x + h = 2x$$

   c) La función en $x_0 = 1$ vale

$$k(1) = \frac{1-1}{1^2+2} = 0.$$

   Valor que utilizaremos al calcular la derivada correspondiente

$$\begin{aligned} \lim_{h \to 0} \frac{k(1+h) - k(1)}{h} &= \lim_{h \to 0} \frac{\frac{(1+h)-1}{(1+h)^2+2} - 0}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{h}{(1+h)^2+2}}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{h}{h\left[(1+h)^2+2\right]} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{1}{1\left[(1+h)^2+2\right]} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

   Podemos comprobar efectivamente que $k'(1) = \frac{1}{3}$ utilizando la derivada analítica de $k(x)$ y evaluando dicha derivada en el punto 1 :

$$k'(x) = \left(\frac{x-1}{x^2+2}\right)' = \frac{-x^2+2x+2}{(x^2+2)^2} \Rightarrow k'(1) = \frac{-1^2+2+2}{(1+2)^2} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$$

2. Calcula los puntos de la gráfica de cada función cuyas rectas tangentes en dichos puntos formen el ángulo θ con la parte positiva del eje OX:

   a) $f(x) = x^2 - 4, \quad \theta = \frac{\pi}{4}$ b) $g(x) = \operatorname{sen} x$, recta tangente horizontal c) $h(x) = e^x, \quad \theta = \frac{\pi}{2}$

   Solución: La pendiente de la recta tangente es la tangente del ángulo que forma esta recta con el eje OX luego en cada caso nos piden el punto x_0 para el que se cumple

$$f'(x_0) = \tan(\theta)$$

   en cada caso.

a) Calculamos $f'(x)$

$$f'(x) = 2x$$

y usando la ecuación anterior

$$f'(x_0) = \tan\frac{\pi}{4} \Leftrightarrow 2x_0 = 1 \Leftrightarrow x_0 = \frac{1}{2}.$$

b) Calculamos $g'(x)$

$$g'(x) = \cos x$$

y para este caso como la recta es horizontal, el ángulo es 0

$$g'(x_0) = \tan 0 \Leftrightarrow \cos x_0 = 0 \Leftrightarrow x_0 = (2k+1)\frac{\pi}{2},$$

habría infinitos puntos en los que ocurre esta circunstancia.

c) Calculamos $f'(x)$

$$f'(x) = e^x$$

En este caso el ángulo es $\frac{\pi}{2}$ y por tanto la tangente a la curva debería ser una recta vertical con tangente ∞ y en este caso no existe solución, puesto que

$$f'(x_0) = \tan\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow e^x = \infty \Leftrightarrow x \to \infty.$$

3. Analiza la continuidad y la derivabilidad de cada función:

a) $f(x) = \begin{cases} x^2 & x \le 0 \\ 2x & x < 0 \end{cases}$ b) $g(x) = \begin{cases} 2x+5 & x \le -1 \\ x^2 & x > -1 \end{cases}$ c) $h(x) = \begin{cases} x^2-5 & x < 2 \\ 3x-7 & x \ge 2 \end{cases}$

d) $k(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} & x < 0 \\ 2x^2 & x \ge 0 \end{cases}$ e) $l(x) = \begin{cases} \dfrac{|x|}{x} & x \ne 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$ f) $m(x) = \left|x^2-4\right|$

g) $n(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} & x \ne 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$ h) $o(x) = |x+3|$

a) Como en cada tramo la función es un polinomio, sólo tenemos que comprobar cuánto vale la función a izquierda y derecha en los puntos donde la función cambia de expresión

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & x \le 0 \\ 2x & x < 0 \end{cases}$$

estos valores deben ser iguales para que la función sea continua.

$$x = 0 \Rightarrow \begin{cases} f(0^-) = (0)^2 = 0 \\ f(0^+) = 2 \cdot 0 = 0 \end{cases} \Rightarrow f\left(0^-\right) = f\left(0^+\right) \Rightarrow \text{Continua en } 0.$$

Ahora veamos si es derivable calculando las derivadas laterales en el punto 0 y teniendo en cuenta que $f(0) = 0$

$$\begin{aligned} f'\left(0^-\right) &= \lim_{h\to 0^-} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(h)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{h^2}{h} = \lim_{h\to 0^-} h = 0 \\ f'\left(0^+\right) &= \lim_{h\to 0^+} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(h)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{2h}{h} = \lim_{h\to 0^-} 2 = 2 \end{aligned}$$

luego $f'(0^-) \ne f(0^+)$ y la función f no es derivable.

b) Como en cada tramo la función es un polinomio, sólo tenemos que comprobar cuánto vale la función a izquierda y derecha en los puntos donde la función cambia de expresión

$$g(x) = \begin{cases} 2x+5 & x \leq -1 \\ x^2 & x > -1 \end{cases}$$

estos valores deben ser iguales para que la función sea continua.

$$x = -1 \Rightarrow \begin{cases} f(-1^-) = 3 \\ f(-1^+) = 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow f\left(-1^-\right) \neq f\left(-1^+\right) \Rightarrow \text{Discontinua en } -1.$$

Como la función no es continua en -1, entonces tampoco puede ser derivable.

c) Continuidad en $x = 2$:

$$\begin{aligned} h\left(2^-\right) &= 2^2 - 5 = -1 \\ h\left(2^+\right) &= 3 \cdot 2 - 7 = -1 \end{aligned}$$

es continua en -1.
Derivabilidad:

$$\begin{aligned} h'\left(2^-\right) &= \lim_{k \to 2^-} \frac{h(2+k) - h(2)}{k} = \lim_{k \to 2^-} \frac{\left((2+k)^2 - 5\right) - (-1)}{k} = \lim_{k \to 2^{--}} \frac{k^2 + 4k}{k} = \lim_{k \to 2^{--}} k + 4 = 6 \\ h'\left(2^+\right) &= \lim_{k \to 2^-} \frac{h(2+k) - h(2)}{k} = \lim_{k \to 2^-} \frac{(3(2+k) - 7) - (-1)}{k} = \lim_{k \to 2^{--}} \frac{3k}{k} = \lim_{k \to 2^{--}} 3 = 3 \end{aligned}$$

y la función $h(x)$ no es derivable en 2.

d) Continuidad en $x = 0$:

$$\begin{aligned} k\left(0^-\right) &\to -\infty \\ k\left(0^+\right) &= 2 \cdot 0^2 = 0 \end{aligned}$$

y por tanto la función no es continua en 0.

e) Continuidad en $x = 0$:

$$\begin{aligned} l\left(0^-\right) &= \lim_{x \to 0^-} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \to 0^-} \frac{-x}{x} = \lim_{x \to 0^-} -1 = -1 \\ l\left(0^+\right) &= \lim_{x \to 0^+} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{x}{x} = \lim_{x \to 0^+} 1 = 1 \end{aligned}$$

y por tanto la función no es continua en 0.

f) La función está definida como

$$m(x) = \begin{cases} x^2 - 4 & \text{Si} \quad x^2 - 4 > 0 \\ 4 - x^2 & \text{Si} \quad x^2 - 4 < 0 \end{cases}$$

o de forma equivalente por trozos como

$$m(x) = \begin{cases} x^2 - 4 & \text{Si} \quad x \leq -2 \\ 4 - x^2 & \text{Si} \quad -2 < x < 2 \\ x^2 - 4 & \text{Si} \quad x \geq 2 \end{cases}$$

La continuidad está garantizada puesto que es la composición de dos funciones continuas, un polinomio de grado 2 y la función valor absoluto. Estudiamos ahora la derivabilidad en los puntos $x = -2$ y $x = 2$. Para $x = -2$

$$\begin{aligned} m'\left(-2^-\right) &= \lim_{h\to -2^-} \frac{m(-2+h) - m(-2)}{h} = \lim_{h\to -2^-} \frac{\left((-2+h)^2 - 4\right) - (0)}{h} = \lim_{h\to -2^-} \frac{-4h + h^2}{h} = -4 \\ m'\left(-2^+\right) &= \lim_{h\to -2^-} \frac{m(-2+h) - m(-2)}{h} = \lim_{h\to -2^-} \frac{\left(4 - (-2+h)^2\right) - (0)}{h} = \lim_{h\to -2^-} \frac{4h - h^2}{h} = 4 \end{aligned}$$

y no será derivable. Mientras que para $x = 2$

$$\begin{aligned} m'\left(2^-\right) &= \lim_{h\to 2^-} \frac{m(2+h) - m(2)}{h} = \lim_{h\to -2^-} \frac{\left(4 - (2+h)^2\right) - (0)}{h} = \lim_{h\to -2^-} \frac{-4h - h^2}{h} = -4 \\ m'\left(2^+\right) &= \lim_{h\to 2^-} \frac{m(2+h) - m(2)}{h} = \lim_{h\to -2^-} \frac{\left((2+h)^2 - 4\right) - (0)}{h} = \lim_{h\to -2^-} \frac{4h + h^2}{h} = 4 \end{aligned}$$

y tampoco es derivable en este punto.

g) La función $n(x)$ no es continua en $x = 0$ y por tanto no será derivable.

h) La función $o(x)$ es contiuna en todos los reales, pero no es derivable en -3.

4. Calcula las rectas tangentes a las gráficas de cada función en sus correspondientes puntos de inflexión:

a) $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 7$ b) $g(x) = xe^{-x}$ c) $h(x) = \dfrac{x^2}{2} - \ln x$

Solución: Recordemos que los puntos de inflexión se obtienen al buscar los ceros de la derivada segunda, es decir, resolviendo la ecuación

$$f''(x) = 0$$

a)

$$f'(x) = 6x^2 - 6x - 12 \Rightarrow f''(x) = 12x - 6$$

De forma que

$$12x - 6 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$$

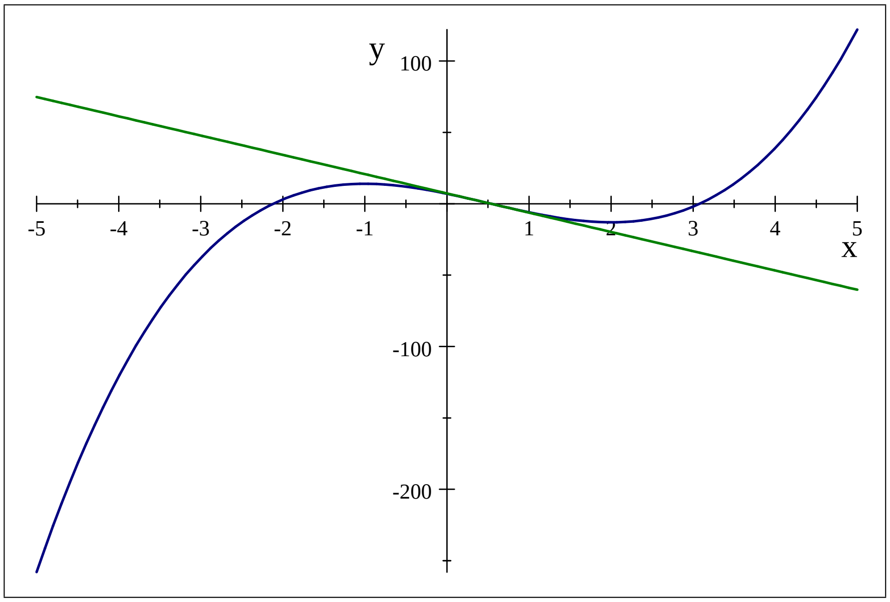
y la pendiente de la recta tangente en ese punto sería

$$m = f'\left(\frac{1}{2}\right) = 6\frac{1}{4} - 6\frac{1}{2} - 12 = -\frac{27}{2}$$

y como debe pasar por el punto $\left(\frac{1}{2}, f\left(\frac{1}{2}\right)\right) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ la ecuación de la recta tangente solicitada es

$$y = -\frac{27}{2}\left(x - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}$$

$$2x^3 - 3x^2 - 12x + 7$$



$b)$ Para $g(x) = xe^{-x}$

$$g'(x) = e^{-x} - xe^{-x} = (1-x)\,e^{-x}$$

mientras que

$$g''(x) = -e^{-x} - (1-x)\,e^{-x} = (x-2)\,e^{-x}$$

de forma que como $e^{-x} > 0$ y no se anula en ningún punto

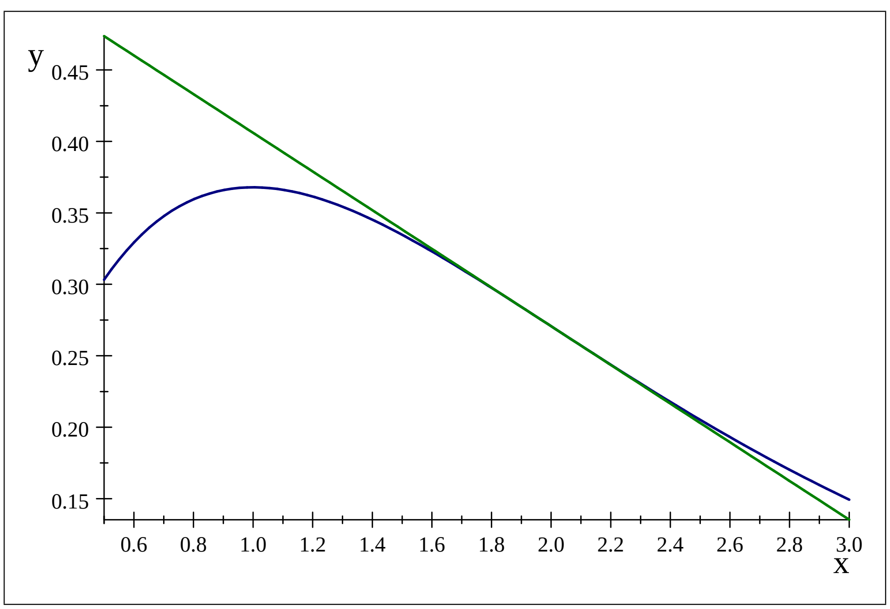
$$(x-2)\,e^{-x} = 0 \Leftrightarrow x = 2$$

La pendiente de la recta tangente en ese punto sería

$$m = g'(2) = -e^{-2} = -\frac{1}{e^2}$$

y la ecuación de la recta tangente, que debe pasar por el punto $(2, g(2)) = \left(2, 2e^{-2}\right)$, es

$$y = -\frac{1}{e^2}(x-2) + \frac{2}{e^2} = (4-x)\,e^{-2}$$



c) Para $h(x) = \dfrac{x^2}{2} - \ln x$

$$h'(x) = x - \frac{1}{x} \Rightarrow h''(x) = 1 + \frac{1}{x^2}$$

La segunda derivada no se anula y por tanto no hay puntos de inflexión.

$$\frac{x^2}{2} - \ln x$$

5. Calcula la derivada de cada función:

a) $f(x) = \dfrac{x-3}{x+1}$ b) $g(x) = \dfrac{(x-1)^2}{\ln x^2}$ c) $h(x) = \operatorname{sen}^3 x^2$

d) $k(x) = \dfrac{\arctan^3 x - \operatorname{sen} x^2}{x}$ e) $l(x) = \operatorname{arcsen}^2\left(\dfrac{x-1}{x+2}\right)$ f) $m(x) = \cos(\cos(\cos x))$

g) $n(x) = \sec^2 x - \operatorname{cosec} x^2$ h) $o(x) = 5^{2\operatorname{sen} x} - x^4$ i) $p(x) = (x)^{x^2}$

j) $q(x) = \operatorname{sen} x^x$ k) $r(x) = (\cos x)^x$ l) $s(x) = x^{\arctan^2 x}$

Solución: Usando las reglas usuales de derivación tendremos

a) Cociente.

$$f(x) = \frac{x-3}{x+1} \Rightarrow f'(x) = \frac{(x+1)-(x-3)}{(x+1)^2} = \frac{4}{(x+1)^2}$$

b) Cociente.

$$g(x) = \frac{(x-1)^2}{\ln x^2} \Rightarrow g'(x) = \frac{2(x-1)\ln x^2 - \frac{2x}{x^2}}{(\ln x^2)^2} = \frac{2(x-1)\ln x^2 - \frac{2}{x}}{(\ln x^2)^2} = \frac{2x(x-1)\ln x^2 - 2}{(\ln x^2)^2}$$

c) Función compuesta. Para estos casos es mejor realizar la derivación paso a paso:

$$\begin{aligned} h(x) &= (f_1(x))^3 \Rightarrow h'(x) = 3(f_1(x))^2 f_1'(x) \\ f_1(x) &= \operatorname{sen}(f_2(x)) \Rightarrow f_1'(x) = f_2'(x)\cos(f_2(x)) \\ f_2(x) &= x^2 \Rightarrow f_2'(x) = 2x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h'(x) &= 3 * (\operatorname{sen} f_2(x))^2 \cos(f_2(x)) f_2'(x) \\ &= 3\left(\operatorname{sen}\left(x^2\right)\right)^2 \cos\left(x^2\right) 2x \\ &= 6x\cos x^2 \left(\operatorname{sen} x^2\right)^2 \end{aligned}$$

d) Cociente y función compuesta.

$$\begin{aligned} k(x) &= \frac{\arctan^3 x - \operatorname{sen} x^2}{x} \\ \Rightarrow\ k'(x) = &\ \frac{\left(3\arctan^2 x\left(\frac{1}{1+x^2}\right) - 2x\cos x^2\right)x - \left(\arctan^3 x - \operatorname{sen} x^2\right)}{x^2} \\ &= \frac{\left(3\arctan^2 x - 2x\left(1+x^2\right)\cos x^2\right)x - \left(\arctan^3 x - \operatorname{sen} x^2\right)\left(1+x^2\right)}{x^2\left(1+x^2\right)} \end{aligned}$$

e) Función compuesta:

$$\begin{aligned}
l(x) &= \operatorname{arcsen}^2\left(\frac{x-1}{x+2}\right) \Rightarrow l(x) = f_1(x)^2 \Rightarrow l'(x) = 2f_1(x)\, f_1'(x) \\
f_1(x) &= \operatorname{arcsen}(f_2(x)) \Rightarrow f_1'(x) = \frac{f_2'(x)}{\sqrt{1-f_2(x)^2}} \\
f_2(x) &= \frac{x-1}{x+2} \Rightarrow f_2'(x) = \frac{(x+2)-(x-1)}{(x+2)^2} = \frac{3}{(x+2)^2}
\end{aligned}$$

por tanto

$$\begin{aligned}
l'(x) &= 2\operatorname{arcsen}(f_2(x))\frac{f_2'(x)}{\sqrt{1-f_2(x)^2}} = 2\operatorname{arcsen}\left(\frac{x-1}{x+2}\right)\frac{\frac{3}{(x+2)^2}}{\sqrt{1-\left(\frac{x-1}{x+2}\right)^2}} \\
&= 2\operatorname{arcsen}\left(\frac{x-1}{x+2}\right)\frac{\frac{3}{(x+2)^2}}{\sqrt{3\frac{2x+1}{(x+2)^2}}} \\
&= \frac{6}{\sqrt{3(2x+1)}\,(x+2)}\operatorname{arcsen}\left(\frac{x-1}{x+2}\right)
\end{aligned}$$

f) Función compuesta

$$\begin{aligned}
m(x) &= \cos(\cos(\cos x)) = \cos(f_1(x)) \Rightarrow m'(x) = -f_1'(x)\operatorname{sen}(f_1(x)) \\
f_1(x) &= \cos(f_2(x)) \Rightarrow f_1'(x) = -f_2'(x)\operatorname{sen}(f_2(x)) \\
f_2(x) &= \cos(x) \Rightarrow f_2'(x) = -\operatorname{sen}(x)
\end{aligned}$$

y por tanto

$$\begin{aligned}
m'(x) &= -f_1'(x)\operatorname{sen}(f_1(x)) \\
&= f_2'(x)\operatorname{sen}(f_2(x))\operatorname{sen}(\cos(f_2(x))) \\
&= -\operatorname{sen}(x)\operatorname{sen}(\cos(x))\operatorname{sen}(\cos(\cos(x)))
\end{aligned}$$

g) Usamos el teorema de la función compuesta de forma progresiva

$$\begin{aligned}
n(x) &= \sec^2 x - \operatorname{cosec} x^2 = f_1(x)^2 - f_2(f_3(x)) \Rightarrow n'(x) = 2f_1(x)\, f_1'(x) + f_2'(f_3(x))\, f_3'(x) \\
f_1(x) &= \sec x = \frac{1}{\cos x} \Rightarrow f_1'(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos^2 x} = \frac{\tan x}{\cos x} \\
f_2(x) &= \operatorname{cosec} x = \frac{1}{\operatorname{sen} x} \Rightarrow f_2'(x) = -\frac{\cos x}{\operatorname{sen}^2 x} = \frac{\cot x}{\operatorname{sen} x} \\
f_3(x) &= x^2 \Rightarrow f_3'(x) = 2x
\end{aligned}$$

y por tanto

$$\begin{aligned}
n'(x) &= 2f_1(x)\,f_1'(x) + f_2'(f_3(x))\,f_3'(x) \\
&= 2\frac{1}{\cos x}\frac{\operatorname{sen} x}{\cos^2 x} + \frac{\cos x^2}{\left(\operatorname{sen} x^2\right)^2}2x \\
&= \frac{2\operatorname{sen} x}{\cos^3 x} + \frac{2x\cos x^2}{\left(\operatorname{sen} x^2\right)^2} \\
&= 2\tan x \sec^2 x + 2x\cot x^2 \operatorname{cosec} x^2
\end{aligned}$$

h) Utilizamos la derivada directa

$$o(x) = 5^{2\operatorname{sen} x} - x^4 \Rightarrow o'(x) = 2\ln 5\,(\cos x)\left(5^{2\operatorname{sen} x}\right) - 4x^3$$

i) Usaremos la expresión

$$a^b = e^{b\ln a}$$

tomando $a = x$ y $b = x^2$ para expresar $p(x)$ como

$$p(x) = (x)^{x^2} = e^{x^2\ln x}$$

y ahora calculamos su derivada

$$p'(x) = e^{x^2\ln x}\left(x^2\ln x\right)' = e^{x^2\ln x}\left(2x\ln x + x^2\frac{1}{x}\right) = (x)^{x^2}(2x\ln x + x)$$

j)

$$q(x) = \operatorname{sen} x^x \Rightarrow q'(x) = (\cos x^x)(x^x)'$$

y por otra parte

$$x^x = e^{x\ln x} \Rightarrow (x^x)' = e^{x\ln x}(x\ln x)' = x^x(\ln x + 1)$$

por tanto

$$q'(x) = x^x(\cos x^x)(\ln x + 1)$$

k)

$$r(x) = (\cos x)^x = e^{x\ln(\cos x)} \Rightarrow r'(x) = e^{x\ln(\cos x)}(x\ln\cos x)' = (\cos x)^x(\ln\cos x - x\tan x)$$

l)

$$\begin{aligned}
s(x) &= x^{\arctan^2 x} = e^{\left(\arctan^2 x\right)\ln x} \Rightarrow s'(x) = e^{\left(\arctan^2 x\right)\ln(x)}\left(\left(\arctan^2 x\right)\ln(x)\right)' \\
&= x^{\arctan^2 x}\left(2\frac{\arctan x}{1+x^2}\ln(x) + \frac{\arctan^2 x}{x}\right)
\end{aligned}$$

6. Demuestra las siguientes desigualdades:

a) $\tan x \geq x$, en $0 \leq x < \dfrac{\pi}{2}$ b) $e^x \geq \dfrac{1}{1+x}$, en $x > 0$ c) $\ln x < x$, en $x > 1$

a) Dado $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ utilizamos el teorema valor medio de Lagrange en el intervalo $[0, x]$ para la función $\tan(x)$. Dicho teorema nos dice que como $\tan(x)$ es derivable en $[0, x]$, entonces $\exists\xi \in [0, x]$ tal que

$$\tan(x) - \tan(0) = \left(1 + \tan^2(\xi)\right)x \Rightarrow \tan(x) = x + x\tan^2(\xi)$$

Como $x \geq 0$ y $\tan^2\xi \geq 0$ entonces $x\tan^2(\xi) \geq 0$ y sumando x a ambos lados de la inecuación, obtenemos

$$\underbrace{x + x\tan^2(\xi)}_{\tan(x)} > x$$

b) Dado $x \in [0, \infty[$ utilizamos el teorema valor medio de Lagrange en el intervalo $[0, x]$ para la función e^x. Dicho teorema nos dice que como e^x es derivable en $[0, x]$, entonces $\exists \xi \in [0, x]$ tal que

$$e^x - e^0 = e^\xi (x - 0) \Rightarrow e^x - 1 = xe^\xi \Rightarrow e^x = 1 + xe^\xi$$

Como $x \geq 0$ y siendo e^x una función creciente sucede $e^\xi > e^0 = 1$, luego $xe^\xi \geq xe^0 = x$ luego

$$e^x > 1 + x$$

Por otra parte como $x > 0$, entonces $1 + x > 1$ y por tanto sus inversos cumplen la desigualdad contraria, es decir, $\frac{1}{1+x} < 1$ de este modo

$$e^x > 1 + x > 1 > \frac{1}{1 + x}$$

c) Está claro que la desigualdad también es cierta para $x = 1$, puesto que

$$\ln 1 = 0 < 1$$

y entonces podemos considerar $x \in [1, \infty[$ y utilizando el teorema del valor medio de Lagrange en el intervalo $[1, x]$ para la función $\ln x$. Dicho teorema nos dice que como $\ln x$ es derivable en $[1, x]$, entonces $\exists \xi \in [1, x]$ tal que

$$\ln x - \ln 1 = \frac{1}{\xi} (x - 1) \Rightarrow \ln x = \frac{x - 1}{\xi}$$

Ahora bien, como $\xi \in [1, x]$ entonces $\xi \geq 1$ y por tanto sus inversos cumplen la desigualdad contraria, es decir, $\frac{1}{\xi} \leq 1$, además $x \geq 1$ por tanto $x - 1 \geq 0$ y se cumple

$$\underbrace{\frac{x - 1}{\xi}}_{\ln x} < \frac{x - 1}{1} = x - 1 \leq x$$

7. Demuestra que

$$|\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} y| \leq |x - y|; \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Solución: Supongamos, sin pérdida de generalidad, que $x < y$, notar que si $x = y$ la desigualdad se cumple de forma trivial. Aplicaremos el teorema del valor medio de Lagrange a la función $\operatorname{sen} x$ en el intervalo $[x, y]$. Puesto que $\operatorname{sen} x$ es derivable con derivada $\cos x$, entonces debe existir $\xi \in [x, y]$ que cumple

$$\operatorname{sen} y - \operatorname{sen} x = \cos \xi (y - x) \Rightarrow |\operatorname{sen} y - \operatorname{sen} x| = |\cos \xi (y - x)| = |\cos \xi| \cdot |(y - x)|$$

pero sabemos que

$$|\cos \xi| \leq 1$$

luego

$$|\cos \xi| \cdot |(y - x)| \leq 1 \cdot |(y - x)|$$

como queríamo demostrar.

8. Calcula las derivada n–ésimas de cada función:

a) $f(x) = \ln(kx)$, $\quad k > 0$ $\qquad$ b) $g(x) = \cos(kx)$ $\qquad$ c) $h(x) = \sqrt{x}$ $\qquad$ d) $k(x) = xe^x$

a) Calculamos las primeras derivadas

n	$f^{(n)}(x)$
0	$\ln(kx)$
1	$\frac{k}{x} = kx^{-1}$
2	$-kx^{-2}$
3	$2kx^{-3}$
4	$-3 \cdot 2kx^{-4}$
5	$4 \cdot 3 \cdot 2kx^{-5}$

está claro que

$$f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1}(n-1)!kx^{-n-} = (-1)^{n-1}\frac{(n-1)!k}{x^n}$$

b) Calculamos las primeras derivadas

n	$f^{(n)}(x)$
0	$\cos(kx)$
1	$-k\,\mathrm{sen}(kx)$
2	$-k^2\cos(kx)$
3	$k^3\,\mathrm{sen}(kx)$
4	$k^4\cos(kx)$
5	$-k^5\,\mathrm{sen}(kx)$
6	$-k^6\cos(kx)$
7	$k^7\,\mathrm{sen}(kx)$

podemos ver que el ciclo se repite cada 4 derivadas, por tanto

$$f^{(n)}(x) = \begin{cases} k^{4m}\cos(kx) & n = 4m \\ -k^{4m+1}\,\mathrm{sen}(kx) & n = 4m+1 \\ -k^{4m+2}\cos(kx) & n = 4m+2 \\ k^{4m+3}\,\mathrm{sen}(kx) & n = 4m+3 \end{cases}$$

c) Calculamos las primeras derivadas

n	$f^{(n)}(x)$
0	$\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$
1	$\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$
2	$-\frac{1}{2^2}x^{-\frac{3}{2}}$
3	$\frac{3}{2^3}x^{-\frac{5}{2}}$
4	$-\frac{3\cdot 5}{2^4}x^{-\frac{7}{2}}$
5	$\frac{3\cdot 5\cdot 7}{2^5}x^{-\frac{9}{2}}$

está claro que

$$f^{(n)}(x) = \frac{(2n-3)(2n-5)\cdots 3\cdot 1}{2^n}x^{-\frac{2n-1}{2}}$$

d) alculamos las primeras derivadas

n	$f^{(n)}(x)$
0	xe^x
1	$(x+1)e^x$
2	$(x+2)e^x$
3	$(x+3)e^x$
4	$(x+4)e^x$
5	$(x+5)e^x$

está claro que

$$f^{(n)}(x) = (x+n)e^x$$

9. Representa gráficamente las siguientes funciones:

a) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$ b) $g(x) = -x^4 + x^2$ c) $h(x) = \dfrac{x^2-1}{x}$ d) $k(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$

e) $l(x) = \dfrac{x^2}{x^2+x-4}$ f) $m(x) = \dfrac{x}{1+|x|}$ g) $n(x) = \log\left(x^2-9\right)$ h) $o(x) = xe^{-x}$

i) $p(x) = \dfrac{\mathrm{sen}\,x}{x}$ j) $q(x) = \mathrm{sen}\,x\cos x$ k) $r(x) = \mathrm{Sh}(x)$ l) $s(x) = \mathrm{Ch}\,x$

Solución:

a) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$

b) $g(x) = -x^4 + x^2$

c) $h(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x}$

d) $k(x) = \dfrac{1}{x^2 + 1}$

e) $l(x) = \dfrac{x^2}{x^2 + x - 4}$

f) $m(x) = \dfrac{x}{1 + |x|}$

g) $n(x) = \log\left(x^2 - 9\right)$

h) $o(x) = xe^{-x}$

i) $p(x) = \dfrac{\sin x}{x}$

j) $q(x) = \operatorname{sen} x \cos x$

k) $r(x) = \operatorname{Sh}(x)$

l) $s(x) = \operatorname{Ch} x$

10. Calcula, si es posible, los extremos absolutos de las siguientes funciones en los intervalos que se dan:

a) $f(x) = x^3 - 3$ en $[-2, 2]$ b) $g(x) = x + \dfrac{2 + 2x}{x^2 + 1}$ en $[0, 3]$ c) $h(x) = e^{-x^2}$ en $\mathbb{R}$

Solución: Como las funciones son continuas sobre los intervalos, en los dos primeros casos, el teorema de Weierstrass garantiza la existencia de máximo y mínimos de cada una de las funciones sobre los correspondientes intervalos, ya que estos son compactos. En todos los casos vamos a proceder del mismo modo, buscaremos los posibles extremos en el interior del intervalo, lo que llevará a la búsqueda de los puntos críticos y después compararemos con los valores de las funciones en los extremos de los intervalos. En el último caso el intervalo no es compacto y por tanto no hay garantía de la existencia de extremos y en este caso sólo tendremos en cuenta los puntos interiores.

a) Para puntos en $(-2, 2)$

$$f_1'(x) = 3x^2 \Rightarrow f_1'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

Sólo está el punto 0, que además está dentro del intervalo. A este punto le añadimos los extremos del intervalo para obtener los candidatos a extremo

$$E = \{-2, 0, 2\}$$

evaluamos la función f_1 en cada punto

$$f(E) = \{f(-2), f(0), f(2)\} = \{-11, -3, 5\}$$

y por tanto

$$\begin{aligned} x_{\text{mín}} &= -2 \\ x_{\text{máx}} &= 2 \end{aligned}$$

Lo podemos comprobar si representamos la función en ese intervalo

b) Para puntos en $(0,3)$

$$f_2(x) = x + \frac{2+2x}{x^2+1} = \frac{x^3+3x+2}{x^2+1}$$

$$\begin{aligned} f_2'(x) &= \frac{\left(3x^2+3\right)\left(x^2+1\right) - 2x\left(x^3+3x+2\right)}{\left(x^2+1\right)^2} = \frac{x^4-4x+3}{\left(x^2+1\right)^2} \\ f_2'(x) &= 0 \Leftrightarrow x^4-4x+3=0 \Leftrightarrow (x-1)^2\left(x^2+2x+3\right)=0 \Leftrightarrow x=1 \end{aligned}$$

Las raíces complejas del segundo polinomio no sirven, así que el único punto es 1 que está dentro del intervalo. Añadimos los extremos

$$E = \{0,1,3\}$$

y evaluamos la función en todos los puntos

$$f(E) = \{f(0), f(1), f(3)\} = \left\{2, 3, \frac{19}{5}\right\}$$

y por tanto

$$\begin{aligned} x_{\text{mín}} &= 0 \\ x_{\text{máx}} &= 3 \end{aligned}$$

Lo podemos comprobar si representamos la función en ese intervalo

c) Para puntos en $(-\infty,\infty)$

$$\begin{aligned} f_3'(x) &= -2xe^{-x^2} \\ f_3'(x) &= 0 \Leftrightarrow -2xe^{-x^2} = 0 \Leftrightarrow x = 0 \end{aligned}$$

Usando en este caso la segunda derivada

$$f_3''(x) = -2e^{-x^2} + 4x^2e^{-x^2}$$

y evaluando en el punto encontrado

$$f_3''(0) = -2 < 0$$

luego es un máximo. Como no hay más puntos la función no tiene mínimo. Notar que la función es la conocida función campana de Gauss utilizada en Estadística, tiene un máximo en 0 y asíntota horizontal en $y=0$

11. Calcula entre todos los números positivos cuyo producto es 16, aquellos que tienen suma mínima.

Solución: Si $x, y \in \mathbb{R}$ son los números buscados, entonces el problema consiste en

$$\begin{aligned} \text{Minimizar} \quad & x+y \\ \text{Sujeto a} \quad & xy = 16 \\ & x, y > 0 \end{aligned}$$

Despejando la variable y de la ecuación

$$y = \frac{16}{x}$$

y sustituyendo en la función objetivo, el problema consiste en

$$\begin{aligned} \text{Minimizar} \quad & x + \frac{16}{x} \\ & x \in (0,\infty) \end{aligned}$$

Para ello buscamos los puntos críticos

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 1 - \frac{16}{x^2} = 0 \Leftrightarrow x = 4 \text{ o } x = -4.$$

Como $x > 0$ sólo nos quedamos con la positiva. Evaluamos la segunda derivada

$$f''(x) = \frac{32}{x^3}$$

y evaluamos en el punto crítico obtenido antes

$$f''(4) = \frac{32}{64} = \frac{1}{2} > 0 \Rightarrow x_0 = 4 \text{ es un mínimo.}$$

La solución es

$$x = y = 4.$$

12. Calcula el punto de la parábola $y = x^2$ de menor distancia al punto $P = (1, 2)$,

Solución: La situación se representa en la siguiente gráfica

Si $x, y \in \mathbb{R}$ son los números buscados, entonces usando la distancia entre los puntos $P = (1, 2)$ y (x, y), el problema consiste en

$$\begin{array}{ll} \text{Minimizar} & \sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2} \\ \\ \text{Sujeto a} & y = x^2 \end{array}$$

Sustituyendo $y = x^2$ en la función objetivo, el problema consiste en

$$\begin{array}{ll} \text{Minimizar} & \sqrt{(x-1)^2 + (x^2-2)^2} \\ \\ & x \in \mathbb{R} \end{array}$$

En los problemas de cálculo de distancias se utiliza la distancia de la función al cuadrado, ya que es una función más sencilla de manejar, esto es debido a que $f(x)$ y $\sqrt{f(x)}$ tienen los mismos puntos críticos como se puede comprobar fácilmente:

$$\left(\sqrt{f(x)}\right)' = 0 \Leftrightarrow \frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}} = 0 \Leftrightarrow f'(x) = 0$$

En este caso el problema consistirá en

$$\begin{array}{ll} \text{Minimizar} & (x-1)^2 + \left(x^2-2\right)^2 = x^4 - 3x^2 - 2x + 1 \\ \\ & x \in \mathbb{R} \end{array}$$

Si buscamos los puntos críticos de la función objetivo

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2(x-1) + 2\left(x^2-2\right)2x = 0 \Leftrightarrow 4x^3 - 6x - 2 = 0.$$

Usando Ruffini obtenemos la raíz $x_0 = -1$, la ecuación de segundo grado resultante de la división tiene por raíces $x_1 = \frac{1+\sqrt{3}}{2}$ y $x_1 = \frac{1-\sqrt{3}}{2}$.

Evaluamos la segunda derivada

$$f''(x) = 12x^2 - 6$$

y evaluamos esta derivada en los puntos críticos que hemos obtenido antes

$$
\begin{aligned}
f''(-1) &= 6 > 0 \Rightarrow \text{Mínimo} \\
f''\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right) &= 6 + 2\sqrt{27} > 0 \Rightarrow \text{Mínimo} \\
f''\left(\frac{1-\sqrt{3}}{2}\right) &= 6 - 2\sqrt{27} < 0 \Rightarrow \text{Máximo} \\
&.
\end{aligned}
$$

Descartamos el punto de máximo y evaluamos la función en los puntos de mínimo

$$
\begin{aligned}
f(-1) &= 5 \\
f\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right) &= \frac{11}{4} - \frac{3\sqrt{3}}{2}
\end{aligned}
$$

luego el punto buscado es

$$
\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}, \left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)^2\right) = \left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} + 1\right)
$$

En la figura vemos una representación de la función objetivo donde se pueden apreciar dos mínimos locales en el -1 y en el $\frac{1+\sqrt{3}}{2}$, así como el máximo local en $\frac{1-\sqrt{3}}{2}$. y en la siguiente gráfica la ubicación del punto de mínima distancia respecto a la parábola

13. Calcula las dimensiones del triángulo isósceles de área máxima y perímetro $30cm$.

Solución: En un triángulo isósceles hay dos lados iguales y uno desigual como el de la figura

$$y = -x + 1$$

Supongamos que b es la longitud de la base y l la de cualquiera de los lados iguales (ver imagen). Por el enunciado se cumple

$$b + 2l = 30.$$

La función que queremos maximizar es el área que viene dada por

$$A = \frac{bh}{2}$$

y h se puede obtener usando el teorema de Pitágoras

$$h = \sqrt{l^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{4l^2 - b^2}}{2}$$

y sustituyendo en A, obtenemos

$$A = \frac{1}{4} b \sqrt{4l^2 - b^2}$$

La función a maximizar es

$$
\begin{aligned}
\text{Maximizar} \quad & \tfrac{1}{4} b \sqrt{4l^2 - b^2} \\
\text{Sujeto a} \quad & b + 2l = 30 \\
& l, b > 0
\end{aligned}
$$

Por comodidad despejaremos $2l$ de la ecuación

$$2l = 30 - b \Rightarrow 4l^2 = (30 - b)^2$$

y sustituyendo en la función objetivo, el problema consiste en

$$\text{Maximizar} \quad \tfrac{1}{4}b\sqrt{(30-b)^2 - b^2}$$

$$b \in (0, \infty)$$

Para ello buscamos los puntos críticos de

$$f(x) = \frac{1}{4}b\sqrt{900 - 60b}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{4}\left(\sqrt{900-60b} - \frac{30b}{\sqrt{900-60b}}\right) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{4}\frac{900-90b}{\sqrt{900-60b}} = 0 \Leftrightarrow b = 10$$

Evaluamos la segunda derivada para conocer el carácter de este valor

$$f''(x) = -\frac{1}{4}\left(\frac{60}{\sqrt{900-60b}} + \frac{900b}{\sqrt{(900-60b)^3}}\right)$$

y evaluamos en el punto crítico obtenido antes

$$f''(10) = -\frac{3}{4}\sqrt{3} < 0 \Rightarrow x_0 = 10 \text{ es un máximo.}$$

La solución es

$$b = 10 \Rightarrow l = \frac{30-b}{2} = 10.$$

Luego el triángulo es equilátero.

14. Calcula la distancia mínima del origen a la curva $xy = 1$.

En la siguiente gráfica representamos la curva indicada

Si $x, y \in \mathbb{R}$ son los números buscados, entonces el problema consiste en

$$\text{Minimizar} \quad \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\text{Sujeto a} \qquad xy = 1$$

Como antes, para simplificar, utilizaremos la distancia al cuadrado

$$\text{Minimizar} \quad x^2 + y^2$$

$$\text{Sujeto a} \qquad xy = 1$$

Despejando la variable y de la ecuación

$$y = \frac{1}{x}$$

y sustituyendo en la función objetivo, el problema consiste en

$$\text{Minimizar} \quad x^2 + \frac{1}{x^2}$$

Buscamos ahora los puntos críticos

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x - \frac{2}{x^3} = 0 \Leftrightarrow \frac{2x^4 - 2}{x^3} = 0 \;\Leftrightarrow\; x^4 = 1 \Leftrightarrow x = 1 \text{ y } x = -1.$$

Evaluamos la segunda derivada

$$f''(x) = 2 + \frac{6}{x^4}$$

y evaluamos en el punto crítico obtenido antes

$$\begin{aligned} f''(1) &= 2 + \frac{6}{1} = 8 > 0 \Rightarrow x_0 = 1 \text{ es un mínimo.} \\ f''(-1) &= 2 + \frac{6}{1} = 8 > 0 \Rightarrow x_0 = 1 \text{ es un mínimo} \end{aligned}$$

La solución son los puntos $P_1 = (1, 1)$ y $P_2 = (-1, -1)$. La gráfica de $f(x)$, que representa las distancias a la curva $xy = 1$ es

y podemos ver los mínimos en -1 y 1.

15. Calcula el rectángulo de área máxima y lados paralelos a los ejes inscrito en la elipse $4x^2 + y^2 = 1$.

En la gráfica se representa la situación descrita por el enunciado

Si (x, y) es el vértice superior izquierdo (ver gráfica), entonces los lados del rectángulo son $2x$ y $2y$, y por tanto el área será

$$A = 4xy$$

El vértice debe estar sobre la elipse luego debe cumplirse

$$4x^2 + y^2 = 1.$$

El problema resultante es:

$$\begin{aligned} &\text{Maximizar} \quad 4xy \\ &\text{Sujeto a} \quad 4x^2 + y^2 = 1 \end{aligned}$$

Despejando la variable y de la ecuación y considerando que $y > 0$

$$y = \sqrt{1 - 4x^2}$$

y sustituyendo en la función objetivo, el problema consiste en

$$\begin{aligned} &\text{Maximizar} \quad 4x\sqrt{1 - 4x^2} \\ &x \in \left[-\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\right] \end{aligned}$$

Para ello buscamos los puntos críticos

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 4\sqrt{1 - 4x^2} - \frac{16x^2}{\sqrt{1 - 4x^2}} = 0 \Leftrightarrow \frac{4 - 32x^2}{\sqrt{1 - 4x^2}} = 0 \Leftrightarrow x = \pm\frac{1}{2\sqrt{2}}.$$

Como $x > 0$ sólo nos quedamos con la positiva. Evaluamos la segunda derivada

$$f''(x) = -\frac{16x\left(8x^2 - x\right)}{\sqrt{\left(1 - 4x^2\right)^3}}$$

y evaluamos en el punto crítico obtenido antes

$$f''\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right) = -32 < 0 \Rightarrow x_0 = \frac{1}{2\sqrt{2}} \text{ es un máximo.}$$

La solución es

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \\ y &= \frac{1}{\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

16. Calcula el rectángulo de área máxima inscrito en una circunferencia de radio $8cm$.

La circunferencia tiene como ecuación:

$$x^2 + y^2 = 8^2$$

En la siguiente gráfica se representa la situación descrita por el enunciado

Si (x, y) es el vértice superior izquierdo (ver gráfica), entonces los lados del rectángulo son $2x$ y $2y$, y por tanto el área será igual que la del apartado anterior:

$$A = 4xy$$

El vértice debe estar sobre la circunferencia luego debe cumplirse

$$y^2 = 64 - x^2.$$

El problema resultante es:

$$\text{Maximizar} \qquad 4xy$$

$$\text{Sujeto a} \quad x^2 + y^2 = 64$$

Despejando la variable y de la ecuación y considerando que $y > 0$

$$y = \sqrt{64 - x^2}$$

y sustituyendo en la función objetivo, el problema consiste en

$$\text{Maximizar} \quad 4x\sqrt{64 - x^2}$$

$$x \in [-8, 8]$$

Para ello buscamos los puntos críticos

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 4\sqrt{64 - x^2} - \frac{4x^2}{\sqrt{64 - x^2}} = 0 \Leftrightarrow \frac{256 - 8x^2}{\sqrt{64 - x^2}} = 0 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{32} = \pm 4\sqrt{2}.$$

Como $x > 0$ sólo nos quedamos con la positiva. Evaluamos la segunda derivada

$$f''(x) = -\frac{\left(8x^3 - 768x\right)}{\sqrt{\left(64 - x^2\right)^3}}$$

y evaluamos en el punto crítico obtenido antes

$$f''\left(4\sqrt{2}\right) = -16 < 0 \Rightarrow x_0 = 4\sqrt{2} \text{ es un máximo.}$$

La solución es

$$\begin{aligned} x &= 4\sqrt{2} \\ y &= 4\sqrt{2} \end{aligned}$$

es decir la forma de un cuadrado.

17. Para cada función, analiza si se verifican o no las hipótesis del Teorema de Rolle. Si es posible, calcula un valor donde se cumpla la tesis:

a) $f(x) = x^2 - 4x + 2$ en $[1, 3]$ b) $g(x) = x^3 - 1$ en $[0, 1]$ c) $h(x) = |x - 1|$ en $[0, 2]$

Solución:

a) $f(x)$ es un polinomio de grado 2, por tanto derivable en $]1,3[$. Evaluamos $f(x)$ en los extremos del intervalo

$$\begin{aligned} f(1) &= 1^2 - 4 + 2 = -1 \\ f(3) &= 3^2 - 12 + 2 = -1 \end{aligned}$$

luego el Teorema de Rolle garantiza la existencia de $\xi \in]1,3[$ tal que $f'(\xi) = 0$. Podemos comprobar que $f'(x) = 2x - 4$ se anula en $x^* = 2$ que obviamente cumple $2 \in]1,3[$.

b) $g(x)$ es un polinomio de grado 3, por tanto derivable en $]0,1[$. Evaluamos $g(x)$ en los extremos del intervalo

$$\begin{aligned} g(0) &= 0^3 - 1 = -1 \\ g(1) &= 1^2 - 1 = 0 \end{aligned}$$

luego el Teorema de Rolle no garantiza la existencia $\xi \in]0,1[$ tal que $f'(\xi) = 0$. Vamos a comprobar qué ocurre con $g'(x) = 3x^2$ que se anula en $x^* = 0$ que no está en el intervalo $]0,1[$.

c) $h(x)$ es una función continua, pero no es derivable en todo el intervalo $]0,2[$ puesto que no es derivable en $x = 1$, así que no podemos aplicar el teorema de Rolle en ese intervalo.

18. Para cada función, analiza si se verifican o no las hipótesis del Teorema del Valor Medio de Lagrange. Si es posible, calcula un valor donde cumpla la tesis:

a) $f(x) = \left|x^2 - 9\right|$ en $[1,4]$ b) $g(x) = x^2 + 2$ en $[0,2]$

c) $h(x) = x^2 + x + 1$ en $[-1,1]$ d) $k(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x^2 + x + 1 & -1 \le x \le 0 \\ x + 1 & 0 < x \le 2 \end{cases}$

Solución: El teorema de lvalor medio de Lagrange indica lo siguiente:

$$f : [a,b] \to \mathbb{R}, \text{ continua en } [a,b] \text{ y derivable en } (a,b) \Rightarrow \exists \xi \in (a,b) : f(b) - f(a) = f'(\xi)(b-a)$$

Veamos cada apartado por separado.

a) La función es derivable en $]a,b[$ salvo en el punto 3 y -3 donde la función $x^2 - 9$ vale 0 y en ese punto la función $||$ no es derivable, así que como $3 \in (1,4)$ no podemos aplicar el teorema.

b) La función es derivable en $]0,2[$ con $g'(x) = 2x$, por tanto podemos aplicar el teorema de Lagrange y debe existir $\xi \in]0,2[$ tal que

$$\begin{aligned} g(2) - g(0) &= g'(\xi)(2-0) \\ 6 - 2 &= 2\xi(2) \Leftrightarrow 4 = 4\xi \Leftrightarrow \xi = 1 \end{aligned}$$

y comprobamos efectivamente que $1 \in]0,2[$.

c) La función es derivable en $]-1,1[$ con $h'(x) = 2x + 1$, por tanto podemos aplicar el teorema de Lagrange y debe existir $\xi \in]-1,1[$ tal que

$$\begin{aligned} h(1) - h(-1) &= h'(\xi)(1-(-1)) \\ 3 - 1 &= (2\xi + 1)(2) \Leftrightarrow 1 = 2\xi + 1 \Leftrightarrow \xi = 0 \end{aligned}$$

y comprobamos efectivamente que $0 \in]-1,1[$.

d) $k(x)$ es una función definida a trozos, así que primero debemos comprobar que es continua y después que es derivable. Como las funciones son polinomiales sólo debemos comprobar la continuidad y derivabilidad en el punto en el que $k(x)$ cambia su expresión. Estudiamos primero la continuidad en 0

$$\begin{aligned} k\left(0^-\right) &= \frac{1}{2}0^2+0+1=1 \\ k\left(0^+\right) &= 0+1=1 \end{aligned}$$

y ahora la derivabilidad

$$\begin{aligned} k'\left(0^-\right) &= \lim_{\substack{h\to 0\\ x<0}} \frac{k(0+h)-k(0)}{h} = \lim_{\substack{h\to 0\\ x<0}} \frac{k(h)-1}{h} = \lim_{\substack{h\to 0\\ x<0}} \frac{\frac{1}{2}h^2+h+1-1}{h} = \lim_{\substack{h\to 0\\ x<0}} \frac{1}{2}h+1=1 \\ k'\left(0^+\right) &= \lim_{\substack{h\to 0\\ x>0}} \frac{k(0+h)-k(0)}{h} = \lim_{\substack{h\to 0\\ x<0}} \frac{k(h)-1}{h} = \lim_{\substack{h\to 0\\ x<0}} \frac{h+1-1}{h} = \lim_{\substack{h\to 0\\ x<0}} 1=1 \end{aligned}$$

Luego es tanto continua como derivable en el intervalo $]-1,2[$ por tanto podemos aplicar el teorema de Lagrange y debe existir $\xi \in\,]-1,2[$ tal que

$$\begin{aligned} k(2)-k(-1) &= k'(\xi)(2-(-1)) \\ k(2) &= 2+1=3 \\ k(-1) &= \frac{1}{2}(-1)^2+(-1)+1=\frac{1}{2} \\ 3-\frac{1}{2} &= k'(\xi)\,3 \Leftrightarrow k'(\xi)=\frac{5}{6} \end{aligned}$$

la derivada de k es

$$k'(x)=\begin{cases} x+1 & -1\le x\le 0 \\ 1 & 0<x\le 2 \end{cases}$$

está claro que $\xi \notin\,]0,2[$ puesto que la función $k'(x)$ es constante en ese intervalo, así que $\xi \in\,]-1,0[$ y por tanto debería suceder

$$k'(\xi)=\xi+1=\frac{5}{6}\Leftrightarrow \xi=-\frac{1}{6}$$

que efectivamente está en el intervalo $]-1,0[\, \subseteq\,]-1,2[$.

19. Calcula los valores de a y b para los cuales cada función satisface las hipótesis del Teorema del Valor Medio de Lagrange en los intervalos indicados. Para dichos valores, calcula un punto donde se obtenga la tesis:

a) $f(x)=\begin{cases} ax^2+bx+1 & -1\le x\le 0 \\ ax+b & 0<x\le 1 \end{cases}$ b) $g(x)=\begin{cases} 2x-a & -1\le x\le 1 \\ ax+b & 1<x\le 2 \end{cases}$

c) $h(x)=\begin{cases} ax^2+1 & -4\le x\le -1 \\ 2x+b & -1<x\le 0 \end{cases}$

Solución: Para que se cumpla las hipótesis del teorema de Lagrange las funciones deben ser derivables y continuas en el intervalo abierto correspondiente, así que tendremos que calcular cuanto valen las derivadas laterales en los puntos donde las funciones cambian de expresión.

a) Continuidad en 0

$$f(x)=\begin{cases} ax^2+bx+1 & -1\le x\le 0\\ \\ ax+b & 0<x\le 1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(0^-)=a(0)^2+b0+1=1\\ \\ f(0^+)=a(0)+b=b\end{cases}$$

por tanto

$$f\left(0^-\right)=f\left(0^+\right)\Leftrightarrow 1=b$$

Derivabilidad en 0

$$f'(x)=\begin{cases} 2ax+b & -1\le x\le 0\\ \\ a & 0<x\le 1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f'(0^-)=2a(0)+b=b\\ \\ f'(0^+)=a\end{cases}$$

por tanto

$$h'\left(0^-\right)=h'\left(0^+\right)\Leftrightarrow b=a$$

Luego $a=1$.

La función estará definida por

$$f(x)=\begin{cases} x^2+x+1 & -1\le x\le 0\\ \\ x+1 & 0<x\le 1\end{cases} \Rightarrow f'(x)=\begin{cases} 2x+1 & -1\le x\le 0\\ \\ 1 & 0<x\le 1\end{cases}$$

Para encontrar el punto intermedio en el intervalo $]-1,1[$ dado por el TFM de Lagrange

$$f(1)-f(-1)=f'(\xi)(1-(-1))\Rightarrow 2-1=f'(\xi)2\Rightarrow f'(\xi)=\frac{1}{2}$$

como $f'(x)=1$ para $0<x\le 1$, entonces $\xi\in(-1,0)$ y por tanto $f'(\xi)=2\xi+1$, lo que nos conduce a que

$$2\xi+1=\frac{1}{2}\Leftrightarrow \xi=-\frac{1}{4}\in(-1,0).$$

b) Continuidad en 1

$$g(x)=\begin{cases} 2x-a & -1\le x\le 1\\ \\ ax+b & 1<x\le 2\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} g(1^-)=2(1)-a=2-a\\ \\ g(1^+)=a(1)+b=a+b\end{cases}$$

por tanto

$$g\left(1^-\right)=g\left(1^+\right)\Leftrightarrow 2-a=a+b\Leftrightarrow 2a+b=2$$

Derivabilidad en 1,

$$g'(x)=\begin{cases} 2 & -1\le x\le 1\\ \\ a & 1<x\le 2\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} g(1^-)=2\\ \\ g(1^+)=a\end{cases}$$

por tanto

$$g'\left(1^-\right)=g'\left(1^+\right)\Leftrightarrow 2=a$$

y por tanto utilizando la otra ecuación

$$2a+b=2\Leftrightarrow 4+b=2\Leftrightarrow b=-2.$$

y $g(x)$ será

$$g(x)=2x-2 \qquad -1\le x\le 2$$

y su derivada por

$$g'(x)=2$$

Para encontrar el punto intermedio dado por el TFM de Lagrange

$$g(2)-g(-1)=g'(\xi)(2-(-1))\Rightarrow 2-(-4)=3f'(\xi)\Rightarrow g'(\xi)=2$$

En este caso cualquier valor de $\xi\in\,]-1,2[$ serviría ya que $g'(x)$ es constantes.

c) Continuidad en -1

$$h(x)=\begin{cases} ax^2+1 & -4\leq x\leq -1 \\ \\ 2x+b & -1<x\leq 0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} h(-1^-)=a(-1)^2+1=a+1 \\ \\ h(-1^+)=2(-1)+b=b-2\end{cases}$$

de donde se deduce que

$$h\left(-1^-\right)=h\left(-1^+\right)\Longleftrightarrow a+1=b-2\Longleftrightarrow a-b=-3.$$

Derivabilidad en -1,

$$h'(x)=\begin{cases} 2ax & -4\leq x\leq -1 \\ \\ 2 & -1<x\leq 0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} h'(-1^-)=-2a \\ \\ h'(-1^+)=2\end{cases}$$

de donde se deduce

$$h'\left(-1^-\right)=h'\left(-1^+\right)\Longleftrightarrow -2a=2\Longleftrightarrow a=-1$$

y utilizando la otra ecuación

$$a-b=-3\Rightarrow -1-b=-3\Rightarrow b=2.$$

Con estos valores la función y su derivada están definidas como

$$h(x)=\begin{cases} -x^2+1 & -4\leq x\leq -1 \\ \\ 2x+2 & -1<x\leq 0\end{cases} \Rightarrow h'(x)=\begin{cases} -2x & -4\leq x\leq -1 \\ \\ 2 & -1<x\leq 0\end{cases}$$

Para encontrar el punto intermedio dado por el TFM de Lagrange

$$h(0)-h(-4)=h'(\xi)(0-(-4))\Rightarrow 2-(-15)=h'(\xi)4\Rightarrow h'(\xi)=\frac{17}{4}$$

como $h'(x)=2$ para $-1<x\leq 0$, entonces $\xi\in\left]-4,-1\right[$ y por tanto $h'(\xi)=-2\xi$, lo que nos conduce a que

$$-2\xi=\frac{17}{4}\Leftrightarrow \xi=-\frac{17}{8}\in\left]-4,-1\right[.$$

20. Dada la función $f(x)=x^2+1$, ¿Qué teorema afirma que existe $x\in\left]-2,1\right[$ tal que la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en $(x_0,f(x_0))$ es paralela a la recta que pasa por los puntos $P=(-2,5)$ y $Q=(1,2)$. Calcula x_0.

Solución: La recta que pasa por los puntos P y Q está definida como

$$\frac{x+2}{3}=\frac{y-5}{-3}\Rightarrow x+2=5-y\Rightarrow y=3-x$$

si la tangente a $f(x)$ en el punto $(x_0,f(x_0))$ es paralela a esta recta entonces tendrán la misma pendiente, es decir, debe ocurrir que $f'(x_0)=-1$, así que como están implicadas dos funciones $f(x)$ y la recta anterior, podemos ver si se pueden aplicar el TVM de Cauchy. Está claro que se cumplen las condiciones puesto que las funcionest $f(x)$ y $g(x)=3-x$, son funciones continuas y derivables, con derivadas $f'(x)=2x$ y $g'(x)=-1$, así que existirá $\xi\in\left]-2,1\right[$ tal que

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}\Rightarrow\frac{f(1)-f(-2)}{g(1)-g(-2)}=\frac{f'(\xi)}{-1}\Rightarrow\frac{2-5}{2-5}=\frac{f'(\xi)}{-1}\Rightarrow 1=\frac{f'(\xi)}{-1}\Leftrightarrow f'(\xi)=-1$$

por tanto $x_0=\xi$ está garantizado. Para encontrar su valor planteamos la ecuación

$$f'(\xi)=-1\Longleftrightarrow 2\xi=-1\Longleftrightarrow \xi=-\frac{1}{2}$$

punto que está en $\left]-2,1\right[$.

21. Para cada par de funciones, comprueba si se verifican las hipótesis del Teorema del Valor Medio de Cauchy en los intervalos indicados. Si es posible, calcula un valor donde se cumpla la tesis:

a) $f(x) = x^2 - 1$ y $g(x) = x + 2$ en $[0, 3]$

b) $f(x) = |x|$ y $g(x) = x^2 - 3x + 1$ en $[1, 2]$

c) $f(x) = \begin{cases} x^2 - 4 & x \leq 2 \\ x - 2 & x > 2 \end{cases}$ y $g(x) = x^2 + 2x + 1$ en $[0, 3]$

Solución:

a) Las funciones cumplen las hipótesis del TVM ya que son polinomios de grados 2 y 1 respectivamente, funciones continuas y derivables, con derivadas $f'(x) = 2x$ y $g'(x) = 1$, así que existirá $\xi \in]0, 3[$ tal que

$$\frac{f(3) - f(0)}{g(3) - g(0)} = \frac{f'(\xi)}{1} \Rightarrow \frac{8 - (-1)}{5 - 2} = \frac{f'(\xi)}{1} \Rightarrow 3 = f'(\xi)$$

Para encontrar ξ planteamos la ecuación

$$f'(\xi) = 3 \Longleftrightarrow 2\xi = 3 \Longleftrightarrow \xi = \frac{3}{2},$$

punto que está en $]0, 3[$.

b) La función $f(x) = |x|$ es derivable en $\mathbb{R} - \{0\}$, pero $0 \notin]1, 2[$, como $g(x)$ es un polinomio entonces, las funciones cumplen las hipótesis del TVM. Si $x \in]1, 2[\Rightarrow x \geq 0 \Rightarrow f(x) = x$, así que $f'(x) = 1$ y $g'(x) = 2x - 3$, en ese intervalo. Se debe cumplir el TVM de Cauchy para f y g en $]1, 2[$, notar que en este caso

$$g(2) = g(1) = -1$$

luego debemos emplear la versión sin cocientes del teorema y debe existir $\xi \in]1, 2[$tal que

$$(f(2) - f(1))\, g'(\xi) = (g(2) - g(1))\, f'(\xi) \Leftrightarrow g'(\xi) = 0$$

Para encontrar ξ planteamos la ecuación

$$g'(\xi) = 0 \Longleftrightarrow 2\xi - 3 = 0 \Longleftrightarrow \xi = \frac{3}{2},$$

punto que está en $]1, 2[$.

c) La función $g(x)$ es un polinomio, por tanto, es derivable en $]0, 3[$, mientras que la función $f(x)$ es derivable en todos los puntos salvo a lo sumo 2. Como $2 \in]0, 3[$, antes de usar el TVC, hay que comprobar si es o no derivable en ese punto.

Estudiamos primero la continuidad

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 4 & x \leq 2 \\ x - 2 & x > 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(2^-) = (2)^2 - 4 = 0 \\ f(2^+) = 2 - 2 = 0 \end{cases}$$

luego f es continua en 2.

Y la derivabilidad

$$f'(x) = \begin{cases} 2x & x < 2 \\ 1 & x > 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f'(2^-) = 4 \\ f'(2^+) = 1 \end{cases}$$

luego f no es derivable y no es posible aplicar el TFC.

22. Calcula cada límite usando el Teorema de L'Hôpital:

a) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-1}{x^2-1}$ b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos ax}{1-\cos bx},\ a,b\in\mathbb{R}$ c) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{1-\tan x}{x-\frac{\pi}{4}}$ d) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$

e) $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\csc x}{\ln x}$ f) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^+}\dfrac{\sec x}{\log\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right)}$ g) $\lim\limits_{x\to\infty} xe^{-x}$ h) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{\operatorname{sen} x}}{x^3}$

i) $\lim\limits_{x\to 0^+}\tan x\ln x$ j) $\lim\limits_{x\to 0}(\dfrac{1}{\operatorname{sen} x}-\dfrac{1}{x^3})$ k) $\lim\limits_{x\to\infty} x^{\frac{1}{x}}$ l) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\operatorname{sen} x}{x^3}$

m) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^x+\cos x}{e^x+\operatorname{sen} x}$ n) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(1+\cos x)^{\frac{1}{\cos x}}$ o) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\cos(x-1)-1}{(\ln x)^2}$ p) $\lim\limits_{x\to 0^+}(\cot x)^x$

q) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1+\tan x}{1+\operatorname{sen} x}\right)^{\csc x}$ r) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\cot x-\frac{1}{x}\right)$ s) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x}{\ln x}-\dfrac{1}{\operatorname{sen}(x-1)}$ t) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\cos\frac{1}{x}\right)^x$

Solución: En cada apartado comprobamos que se cumplen las hipóteis del teorema calculando el límite directamente o haciendo las oportunas modificaciones. En cada paso la flecha $\overset{H}{\Rightarrow}$ indica que se ha aplicado el teorema de L'Hôpital:

a)

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3-1}{x^2-1}=\frac{0}{0}\overset{H}{\Rightarrow}\lim_{x\to 1}\frac{3x^2}{2x}=\frac{3}{2}$$

b)

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos ax}{1-\cos bx}=\frac{0}{0}\overset{H}{\Rightarrow}\lim_{x\to 0}\frac{a\operatorname{sen} ax}{b\operatorname{sen} bx}=\frac{0}{0}\overset{H}{\Rightarrow}\lim_{x\to 0}\frac{a^2\cos ax}{b^2\cos bx}=\frac{a^2}{b^2}$$

c)

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{1-\tan x}{x-\frac{\pi}{4}}=\frac{0}{0}\overset{H}{\Rightarrow}\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{-\left(1+\tan^2 x\right)}{1}=-2$$

d)

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x}{x}=\frac{0}{0}\overset{H}{\Rightarrow}\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{1}=1$$

e) Recordemos que

$$\csc(x)=\frac{1}{\operatorname{sen}(x)}\Rightarrow(\csc(x))'=-\frac{\cos(x)}{\operatorname{sen}^2(x)}$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\csc x}{\ln x}=\frac{\infty}{-\infty}\overset{H}{\Rightarrow}\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{-\cos x}{\operatorname{sen}^2 x}}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{-x\cos x}{\operatorname{sen}^2 x}=\frac{0}{0}\overset{H}{\Rightarrow}\lim_{x\to 0^+}\frac{-\cos x+x\operatorname{sen} x}{2\operatorname{sen} x\cos x}=\frac{-1}{0^+}=-\infty$$

f) Si hacemos el cambio $x-\frac{\pi}{2}=y$, tendremos

$$\begin{aligned}\ln\left(x-\frac{\pi}{2}\right)&=\ln(y)\\ \sec(x)&=\sec\left(y+\frac{\pi}{2}\right)=\frac{1}{\cos\left(y+\frac{\pi}{2}\right)}=\frac{1}{-\operatorname{sen} y}=-\csc y\end{aligned}$$

luego

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^+}\frac{\sec x}{\ln\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right)}=\lim_{y\to 0^+}\frac{-\csc y}{\ln(y)}$$

que hemos calculado en el apartado anterior

$$\lim_{y\to 0^+}\frac{-\csc y}{\ln(y)}=\infty.$$

$g)$

$$\lim_{x\to\infty} xe^{-x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{e^x} = \frac{\infty}{\infty} \stackrel{H}{\Rightarrow} \lim_{x\to\infty} \frac{1}{e^x} = 0$$

$h)$

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{\operatorname{sen} x}}{x^3} &= \frac{0}{0} \\
\stackrel{H}{\Rightarrow} \lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{\operatorname{sen} x}\cos x}{3x^2} &= \frac{0}{0} \\
\stackrel{H}{\Rightarrow} \lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{\operatorname{sen} x}\cos^2 x + e^{\operatorname{sen} x}\operatorname{sen} x}{6x} &= \frac{0}{0} \\
\stackrel{H}{\Rightarrow} \lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{\operatorname{sen} x}\cos^3 x + 2e^{\operatorname{sen} x}\cos x \operatorname{sen} x + e^{\operatorname{sen} x}\operatorname{sen} x \cos x + e^{\operatorname{sen} x}\cos x}{6} &= \frac{1}{6}
\end{aligned}$$

$i)$

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0^+} \tan x \ln x &= 0\cdot(-\infty) \\
\lim_{x\to 0^+} \tan x \ln x &= \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{\cot x} = \frac{-\infty}{\infty} \\
\stackrel{H}{\Rightarrow} \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{\operatorname{sen}^2 x}} &= \lim_{x\to 0^+} -\frac{\operatorname{sen}^2 x}{x} = \frac{0}{0} \\
\stackrel{H}{\Rightarrow} \lim_{x\to 0^+} -\frac{2\operatorname{sen} x \cos x}{1} &= 0
\end{aligned}$$

$j)$

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\operatorname{sen} x} - \frac{1}{x^3}\right) &= \infty - \infty \\
\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\operatorname{sen} x} - \frac{1}{x^3}\right) &= \lim_{x\to 0}\left(\frac{x^3 - \operatorname{sen} x}{x^3 \operatorname{sen} x}\right) = \frac{0}{0} \\
\stackrel{H}{\Rightarrow} \lim_{x\to 0}\left(\frac{3x^2 - \cos x}{3x^2 \operatorname{sen} x + x^3 \cos x}\right) &= \frac{-1}{0} = -\infty
\end{aligned}$$

$k)$

$$\lim_{x\to\infty} x^{\frac{1}{x}} = \infty^0 \Rightarrow \lim_{x\to\infty} x^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty} e^{\frac{1}{x}\ln x} = e^{\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x}\ln x}$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x} = \frac{-\infty}{\infty} \stackrel{H}{\Rightarrow} \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 0 \Rightarrow \lim_{x\to\infty} x^{\frac{1}{x}} = e^0 = 1$$

$l)$

$$\lim_{x\to 0} \frac{x - \operatorname{sen} x}{x^3} = \frac{0}{0} \stackrel{H}{\Rightarrow} \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{3x^2} = \frac{0}{0} \stackrel{H}{\Rightarrow} \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{6x} = \frac{0}{0} \stackrel{H}{\Rightarrow} \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{6} = \frac{1}{6}$$

m)

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} \frac{e^x+\cos x}{e^x+\operatorname{sen} x} &= \frac{\infty}{\infty} \\
\overset{H}{\Rightarrow} \lim_{x\to\infty} \frac{e^x-\operatorname{sen} x}{e^x+\cos x} &= \frac{\infty}{\infty} \\
\overset{H}{\Rightarrow} \lim_{x\to\infty} \frac{e^x-\cos x}{e^x-\operatorname{sen} x} &= \frac{\infty}{\infty} \\
\overset{H}{\Rightarrow} \lim_{x\to\infty} \frac{e^x+\operatorname{sen} x}{e^x-\cos x} &= \frac{\infty}{\infty} \\
\overset{H}{\Rightarrow} \lim_{x\to\infty} \frac{e^x+\cos x}{e^x+\operatorname{sen} x} &= \frac{\infty}{\infty}
\end{aligned}
$$

Vemos que no es posible aplicar L'Hôpital, sin embargo podemos expresar la función como

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^x+\cos x}{e^x+\operatorname{sen} x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1+\frac{\cos x}{e^x}}{1+\frac{\operatorname{sen} x}{e^x}} = 1$$

n)

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} (1+\cos x)^{\frac{1}{\cos x}} = 1^\infty \Leftrightarrow \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} (1+\cos x)^{\frac{1}{\cos x}} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} e^{\frac{1}{\cos x}\ln(1+\cos x)} = e^{\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\ln(1+\cos x)}{\cos x}}$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\ln(1+\cos x)}{\cos x} = \frac{0}{0} \overset{H}{\Rightarrow} \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\frac{-\operatorname{sen} x}{1+\cos x}}{-\operatorname{sen} x} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+\cos x} = 1 \Rightarrow \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} (1+\cos x)^{\frac{1}{\cos x}} = e^1 = e$$

ñ)

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to 1} \frac{\cos(x-1)-1}{(\ln x)^2} &= \frac{0}{0} \overset{H}{\Rightarrow} \lim_{x\to 1} \frac{-\operatorname{sen}(x-1)}{2(\ln x)\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 1} \frac{-x\operatorname{sen}(x-1)}{2(\ln x)} = \frac{0}{0} \\
\overset{H}{\Rightarrow} \lim_{x\to 1} \frac{-\operatorname{sen}(x-1)-x\cos(x-1)}{\frac{2}{x}} &= \lim_{x\to 1} \frac{x(-\operatorname{sen}(x-1)-x\cos(x-1))}{2} = -\frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

o)

$$\lim_{x\to 0^+} (\cot x)^x = \infty^0 \Leftrightarrow \lim_{x\to 0^+} (\cot x)^x = \lim_{x\to 0^+} e^{x\ln(\cot x)} = e^{\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln(\cot x)}$$

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to 0^+} x\ln(\cot x) &= 0\cdot\infty \Leftrightarrow \lim_{x\to 0^+} x\ln(\cot x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(\cot x)}{1/x} = \frac{\infty}{\infty} \\
\overset{H}{\Rightarrow} \lim_{x\to 0^+} \frac{-\frac{1}{\operatorname{sen} x\cos x}}{-1/x^2} &= \lim_{x\to 0^+} \frac{x^2}{\operatorname{sen} x\cos x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{2x^2}{\operatorname{sen} 2x} = \frac{0}{0} \\
\overset{H}{\Rightarrow} \lim_{x\to 0^+} \frac{4x}{2\cos 2x} &= 0
\end{aligned}
$$

Por tanto

$$\lim_{x\to 0^+} (\cot x)^x = e^0 = 1$$

p)

$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{1+\tan x}{1+\operatorname{sen} x}\right)^{\csc x} = 1^\infty \Rightarrow \lim_{x\to 0} \left(\frac{1+\tan x}{1+\operatorname{sen} x}\right)^{\csc x} = \lim_{x\to 0} e^{\csc x\ln\left(\frac{1+\tan x}{1+\operatorname{sen} x}\right)} = e^{\lim\limits_{x\to 0} \csc x\ln\left(\frac{1+\tan x}{1+\operatorname{sen} x}\right)}$$

$$\lim_{x\to 0} \csc x \ln\left(\frac{1+\tan x}{1+\operatorname{sen} x}\right) = \infty\cdot \Rightarrow$$

$$\lim_{x\to 0} \csc x \ln\left(\frac{1+\tan x}{1+\operatorname{sen} x}\right) = \lim_{x\to 0} \frac{\ln\left(\frac{1+\tan x}{1+\operatorname{sen} x}\right)}{\operatorname{sen}(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+\tan x) - \ln(1+\operatorname{sen} x)}{\operatorname{sen}(x)} = \frac{0}{0}$$

$$\overset{H}{\Rightarrow} \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1+\tan^2 x}{1+\tan x} - \frac{\cos x}{1+\cos x}}{\cos x} = \frac{0}{1} = 0$$

y por tanto

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1+\tan x}{1+\operatorname{sen} x}\right)^{\csc x} = e^{\lim\limits_{x\to 0} \csc x \ln\left(\frac{1+\tan x}{1+\operatorname{sen} x}\right)} = e^0 = 1$$

q) Directamente

$$\lim_{x\to 0}\left(\cot x - \frac{1}{x}\right) = \infty - \infty$$

Realizamos alunas modificaciones en la función para conseguir las hipótesis del teorema

$$\lim_{x\to 0}\left(\cot x - \frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} - \frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{x\cos x - \operatorname{sen} x}{x \operatorname{sen} x}\right) = \frac{0}{0}$$

y ya podemos aplicar el teorema de L'Hôpital.

$$\overset{H}{\Rightarrow} \lim_{x\to 0}\left(\frac{-x\operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} x + x\cos x}\right) = \frac{0}{0}$$

$$\overset{H}{\Rightarrow} \lim_{x\to 0}\left(\frac{-\operatorname{sen} x - x\cos x}{2\cos x - x\operatorname{sen} x}\right) = \frac{0}{2} = 0.$$

r) Si calculamos el límite directamente

$$\lim_{x\to 1} \frac{x}{\ln x} - \frac{1}{\operatorname{sen}(x-1)} = \infty - \infty$$

realizamos algunas modificaciones antes de poder aplicar el teorema de L'Hôpital

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{x}{\ln x} - \frac{1}{\operatorname{sen}(x-1)}\right) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{x\operatorname{sen}(x-1) - \ln x}{\operatorname{sen}(x-1)\ln(x)}\right) = \frac{0}{0}$$

y ahora podemos usar el teorema

$$\overset{H}{\Rightarrow} \lim_{x\to 0}\left(\frac{\operatorname{sen}(x-1) + x\cos(x-1) - \frac{1}{x}}{\cos(x-1)\ln(x) + \frac{\operatorname{sen}(x-1)}{x}}\right) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{x\operatorname{sen}(x-1) + x^2\cos(x-1) - 1}{x\cos(x-1)\ln(x) + \operatorname{sen}(x-1)}\right) = \frac{0}{0}$$

$$\overset{H}{\Rightarrow} \lim_{x\to 0}\left(\frac{\operatorname{sen}(x-1) + 3x\cos(x-1) - x^2\operatorname{sen}(x-1)}{\cos(x-1)\ln(x) - x\operatorname{sen}(x-1)\ln(x) + 2\cos(x-1)}\right) = \frac{3}{2}$$

s)

$$\lim_{x\to\infty}\left(\cos\frac{1}{x}\right)^x = 0^\infty \Rightarrow \lim_{x\to\infty}\left(\cos\frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x\to\infty} e^{x\ln\left(\cos\frac{1}{x}\right)} = e^{\lim\limits_{x\to\infty} x\ln\left(\cos\frac{1}{x}\right)}$$

$$\lim_{x\to\infty} x\ln\left(\cos\frac{1}{x}\right) = \infty\cdot 0 \Rightarrow \lim_{x\to\infty} x\ln\left(\cos\frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{\ln\left(\cos\frac{1}{x}\right)}{1/x} = \frac{0}{0}$$

$$\overset{H}{\Rightarrow} \lim_{x\to\infty} \frac{\left(\frac{\frac{1}{x^2}\operatorname{sen}\frac{1}{x}}{\cos\frac{1}{x}}\right)}{\left(-\frac{1}{x^2}\right)} = \lim_{x\to\infty} -\frac{\operatorname{sen}\frac{1}{x}}{\cos\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty} -\tan\frac{1}{x} = 0$$

por tanto

$$\lim_{x\to\infty}\left(\cos\frac{1}{x}\right)^x = e^0 = 1.$$

23. Escribe el desarrollo de Taylor de orden n de cada función en el punto x_0 dado:

a) $f(x) = \ln(1+x)\,; \quad x_0 = 0, n = 3$

b) $g(x) = \operatorname{sen} x^2 - x\cos x; \quad x_0 = 0, n = 3$

c) $h(x) = xe^{x-1}; \quad x_0 = 1, n = 3$

d) $k(x) = \cos(x)\,; \quad x_0 = 0, n = 5$

e) $l(x) = x\operatorname{sen} x; \quad x_0 = 0, n = 6$

f) $m(x) = \tan(2x)\,; \quad x_0 = 0; n = 4$

g) $n(x) = \sqrt{x}; \quad x_0 = 1; n = 4$

h) $o(x) = \ln(x)\,; \quad x_0 = 1; n = 4$

i) $f(x) = \cos(x)\,; \quad x_0 = \frac{\pi}{2}; n = 4$

Solución: Recordamos la fórmula del polinomio de Taylor de orden n

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + + \frac{f'(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \cdots + + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

a)

n	$f^{(n)}(x)$	$f^{(n)}(x_0)$	$\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$
0	$\ln(1+x)$	0	0
1	$\frac{1}{1+x} = (1+x)^{-1}$	1	1
2	$-(1+x)^{-2}$	-1	$-\dfrac{1}{2!}$
3	$2(1+x)^{-3}$	2	$\dfrac{2}{3!}$

$$P_3(x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3$$

b)

n	$f^{(n)}(x)$	$f^{(n)}(x_0)$	$\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$
0	$\operatorname{sen} x^2 - x\cos x$	0	0
1	$2x\cos x^2 - \cos x + x\operatorname{sen} x$	-1	-1
2	$2\cos x^2 - 4x^2\operatorname{sen} x^2 + 2\operatorname{sen} x + x\cos x$	2	$\dfrac{2}{2!} = 1$
3	$-12x\operatorname{sen}\left(x^2\right) - 8x^3\cos\left(x^2\right) - x\operatorname{sen}(x) + 3\cos(x)$	3	$\dfrac{3}{3!} = \frac{1}{2}$

$$P_3(x) = -x + x^2 + \frac{1}{2}x^3$$

c)

n	$f^{(n)}(x)$	$f^{(n)}(x_0)$	$\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$
0	xe^{x-1}	1	1
1	$(x+1)e^{x-1}$	2	$\frac{2}{1!} = 2$
2	$(x+2)e^{x-1}$	3	$\dfrac{3}{2!} = \frac{3}{2}$
3	$(x+3)e^{x-1}$	4	$\dfrac{4}{3!} = \frac{2}{3}$

$$P_3(x) = 1 + 2(x-1) + \frac{3}{2}(x-1)^2 + \frac{2}{3}(x-1)^3$$

d)

n	$f^{(n)}(x)$	$f^{(n)}(x_0)$	$\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$
0	$\cos x$	1	1
1	$-\operatorname{sen} x$	0	0
2	$-\cos x$	-1	$-\frac{1}{2}$
3	$\operatorname{sen} x$	0	0
4	$\cos x$	1	$\frac{1}{4!}$
5	$-\operatorname{sen} x$	0	0

$$P_4(x) = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4!}x^4$$

e)

n	$f^{(n)}(x)$	$f^{(n)}(x_0)$	$\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$
0	$x\operatorname{sen}(x)$	0	0
1	$\operatorname{sen} x + x\cos x$	0	0
2	$2\cos x - x\operatorname{sen} x$	2	1
3	$-3\operatorname{sen} x - x\cos x$	0	0
4	$-4\cos x + x\operatorname{sen} x$	-4	$-\frac{4}{4!}$
5	$5\operatorname{sen} x + x\cos x$	0	
6	$6\cos x - x\operatorname{sen} x$	6	$\frac{6}{6!}$

$$P_3(x) = x^2 - \frac{1}{3!}x^4 + \frac{1}{5!}x^6$$

f) En este caso vamos a realizar las derivadas de forma iterativa

$$\begin{aligned}
g(x) &= \tan(2x) \Rightarrow g(0) = 0 \\
g'(x) &= 2\left(1+\tan^2 2x\right) = 2\left(1+g^2(x)\right) \Rightarrow g'(0) = 2\left(1+g^2(0)\right) = 2 \\
g''(x) &= 4g(x)g'(x) \Rightarrow g''(0) = 4g(0)g'(0) = 0 \\
g'''(x) &= 4\left(g'(x)\right)^2 + 4g(x)g''(x) \Rightarrow g'''(0) = 4\left(g'(0)\right)^2 + 4g(0)g''(0) = 16 \\
g^{iv}(x) &= 12g'(x)g''(x) + 4g(x)g'''(x) \Rightarrow g^{iv}(0) = 12g'(0)g''(0) + 4g(0)g'''(0) = 0
\end{aligned}$$

n	$g^{(n)}(x)$	$g^{(n)}(x_0)$	$\frac{g^{(n)}(x_0)}{n!}$
0		0	0
1		2	$\frac{2}{1!} = 2$
2		0	0
3		16	$\frac{16}{3!} = \frac{8}{3}$
4		0	0

$$P_3(x) = 2x + \frac{8}{3}x^3$$

g)

n	$f^{(n)}(x)$	$f^{(n)}(x_0)$	$\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$
0	$\sqrt{x} = x^{1/2}$	1	1
1	$\frac{1}{2}x^{-1/2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1/2}{1!} = \frac{1}{2}$
2	$-\frac{1}{2^2}x^{-3/2}$	$-\frac{1}{2^2}$	$\frac{-1/4}{2!} = -\frac{1}{8}$
3	$\frac{3}{2^3}x^{-5/2}$	$\frac{3}{2^3}$	$\frac{3/2^3}{3!} = \frac{1}{16}$
4	$-\frac{15}{2^4}x^{-7/2}$	$-\frac{15}{2^4}$	$\frac{-15/2^4}{4!} = -\frac{5}{128}$

$$P_3(x) = 1 + \frac{1}{2}(x-1) - \frac{1}{8}(x-1)^2 + \frac{1}{16}(x-1)^3 - \frac{5}{128}(x-1)^4$$

h)

n	$f^{(n)}(x)$	$f^{(n)}(x_0)$	$\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$
0	$\ln(x)$	0	0
1	$\frac{1}{x} = x^{-1}$	1	1
2	$-x^{-2}$	-1	$-\dfrac{1}{2!} = -\frac{1}{2}$
3	$2x^{-3}$	2	$\dfrac{2}{3!} = \frac{1}{3}$
4	$-6x^{-4}$	-6	$\frac{-6}{4!} = -\frac{1}{4}$

$$P_3(x) = (x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{3}(x-1)^3 - \frac{1}{4}(x-1)^4$$

i)

n	$f^{(n)}(x)$	$f^{(n)}\left(\frac{\pi}{2}\right)$	$\frac{f^{(n)}\left(\frac{\pi}{2}\right)}{n!}$
0	$\cos x$	0	0
1	$-\operatorname{sen} x$	-1	$\frac{-1}{1!} = -1$
2	$-\cos x$	0	0
3	$\operatorname{sen} x$	1	$\frac{1}{3!} = \frac{1}{6}$
4	$\cos x$	0	0
5	$-\operatorname{sen} x$	-1	$-\frac{1}{5!} = -\frac{1}{120}$

$$P_4(x) = -\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{6}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^3 - \frac{1}{120}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^5$$

24. Escribe el desarrollo de Taylor de cada función, en el punto y orden que se indica, acotando el resto en el intervalo propuesto:

a) $f(x) = \cos x \qquad x_0 = 0, n = 6, x \in [-2, 2]$

b) $h(x) = e^{-x} \qquad x_0 = 0, n \in \mathbb{N}, x \in [-1, 1]$

c) $g(x) = \dfrac{x+7}{x+2} \qquad x_0 = 3, n = 3, x \in [2, 3]$

Solución: Hay que hacer lo mismo que en el ejercicio anterior, pero calculando además el resto.

a)

n	$f^{(n)}(x)$	$f^{(n)}(x_0)$	$\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$
0	$\cos x$	1	1
1	$-\operatorname{sen} x$	0	0
2	$-\cos x$	-1	$-\frac{1}{2!}$
3	$\operatorname{sen} x$	0	0
4	$\cos x$	1	$\frac{1}{4!}$
5	$-\operatorname{sen} x$	0	0
6	$-\cos x$	-1	$-\frac{1}{6!}$
7	$\operatorname{sen} x$	$\operatorname{sen}(\xi)$	$\frac{\operatorname{sen} \xi}{7!}$

$$\begin{aligned} P_6(x) &= 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 - \frac{1}{720}x^6 \\ R_6 f(x, 0) &= \frac{\operatorname{sen}(\xi)}{7!}x^7 \end{aligned}$$

y buscamos una cota para el resto sabiendo por una parte que $x \in [-2,2]$ y por otra que la función $\operatorname{sen}(x)$ está acotada entre -1 y 1

$$\left|\frac{\operatorname{sen}(\xi)}{7!}x^7\right| \leq \frac{1}{7!}|x|^7$$

La función $|x|^7$ es simétrica respecto al origen y alcanza su máximo en los extremos del intervalo, luego

$$\left|\frac{\operatorname{sen}(\xi)}{7!}x^7\right| \leq \frac{1}{7!}|x|^7 \leq \frac{1}{7!}2^7 = \frac{128}{5040} = \frac{8}{315}.$$

b)

n	$f^{(n)}(x)$	$f^{(n)}(x_0)$	$\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$
0	e^{-x}	1	1
1	$-e^{-x}$	-1	-1
2	e^{-x}	1	$\frac{1}{2!}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
n	$(-1)^n e^{-x}$	$(-1)^n$	$\frac{(-1)^n}{n!}$

$$P_n(x) = 1 - x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^3 + \cdots + \frac{(-1)^n}{n!}x^n$$

Para el resto necesitamos conocer la $(n+1)$–ésima derivada $f^{(n+1)}(x) = (-1)^{n+1}e^{-x}$

$$R_nf(x,0) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}x^{n+1} = (-1)^{n+1}\frac{e^{-\xi}}{(n+1)!}x^{n+1}$$

y ahora buscamos una cota para el resto sabiendo por una parte que $x \in [-1,1]$ y por otra que la función e^{-x} es decreciente, así que el máximo lo alcanzará en el extremo inferior del intervalo, cuando $x = 1$, como además el intervalo es simétrico el máximo de la función creciente $|x|^{n+1}$ también se alcanza en ese valor, así que

$$\left|(-1)^{n+1}\frac{e^{-\xi}}{(n+1)!}x^{n+1}\right| \leq \frac{e^{-\xi}}{(n+1)!}|x|^{n+1} \leq \frac{e^{-1}}{(n+1)!}.$$

c) Expresamos la función de una forma más manejable para el cálculo de las sucesivas derivadas

$$f(x) = \frac{x+7}{x+2} = \frac{x+2+5}{x+2} = 1 + \frac{5}{x+2} = 1 + 5(x+2)^{-1}$$

n	$f^{(n)}(x)$	$f^{(n)}(x_0)$	$\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$
0	$1+5(x+2)^{-1}$	2	2
1	$-5(x+2)^{-2}$	$-\frac{1}{5}$	$-\frac{1}{5}$
2	$10(x+2)^{-3}$	$\frac{2}{25}$	$\frac{1}{25}$
3	$-30(x+2)^{-4}$	$-\frac{6}{125}$	$-\frac{1}{125}$

$$P_6(x) = 2 - \frac{1}{5}(x-3) + \frac{1}{25}(x-3)^2 - \frac{1}{125}(x-3)^3$$

Para el resto necesitamos conocer la cuarta derivada $f^{(4)}(x) = 120(x+2)^{-5}$

$$R_3f(x,0) = \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}(x-3)^4 = \frac{120}{(\xi+2)^5 4!}(x-3)^4 = \frac{5(x-3)^4}{(\xi+2)^5}$$

y ahora buscamos una cota para el resto sabiendo por una parte que $x \in [2,3]$. La función $\frac{1}{(\xi+2)^5}$ es decreciente en $[2,3]$ (podemos comprobar que su derivada es negativa), por tanto el máximo se alcanza en el extremo inferior

$$\frac{5(x-3)^4}{(\xi+2)^5} \leq \frac{5(x-3)^4}{(2+2)^5} = \frac{5(x-3)^4}{4^5}$$

Finalmente la función $(x-3)^4$ es decreciente (su derivada es negativa en $[0,3]$) por tanto el máximo también se alcanza en el extremo inferior

$$\frac{5(x-3)^4}{4^5} \leq \frac{5(2-3)^4}{4^5} \leq \frac{5}{4^5}.$$

25. Calcula el desarrollo de McLaurin de grado 3 de la función $f(x) = \sqrt{1+x}$ y utiliza este desarrollo para aproximar el valor de $\sqrt{1{,}1}$, obteniendo la menor cota posible del error cometido.

Calculamos el polinomio de McLaurin, es decir para $x_0 = 0$

n	$f^{(n)}(x)$	$f^{(n)}(x_0)$	$\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$
0	$\sqrt{1+x} = (1+x)^{1/2}$	1	1
1	$\frac{1}{2}(1+x)^{-1/2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
2	$-\frac{1}{4}(1+x)^{-3/2}$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{-1/4}{2!} = -\frac{1}{8}$
3	$\frac{3}{8}(1+x)^{-5/2}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3/8}{3!} = \frac{1}{16}$

$$P_3(x) = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3$$

Para el resto necesitamos conocer la cuarta derivada $f^{(4)}(x) = -\frac{15}{16}(1+x)^{-7/2}$

$$R_3 f(x,0) = \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}x^4 = -\frac{15}{16}\frac{1}{4!}(1+\xi)^{-7/2}x^4 = -\frac{5}{128}\frac{x^4}{(1+\xi)^{7/2}}.$$

Queremos calcular $\sqrt{1{,}1} = \sqrt{1+0{,}1}$ es decir, queremos calcular $f(0{,}1) = f\left(\frac{1}{10}\right)$, usaremos por tanto el desarrollo de Taylor para aproximar este falor

$$\begin{aligned} P_3\left(\frac{1}{10}\right) &= 1 + \frac{1}{2}\frac{1}{10} - \frac{1}{8}\left(\frac{1}{10}\right)^2 + \frac{1}{16}\left(\frac{1}{10}\right)^3 \\ &= 1 + \frac{1}{20} - \frac{1}{800} + \frac{1}{16000} = \frac{16\,781}{16\,000} = 1{,}0488125 \end{aligned}$$

El valor que se obtiene directamente mediante MAXIMA es

$$\sqrt{1{,}01} = 1{,}048808848170152$$

bastante aproximado al anterior. Vamos a acotar el error máximo que vamos a cometer, teniendo en cuenta que en la fórmula del error hay que tomar $x = \frac{1}{10}$ luego

$$\left|R_3 f\left(0, \frac{1}{10}\right)\right| = \left|-\frac{5}{128}\frac{\left(\frac{1}{10}\right)^4}{(1+\xi)^{7/2}}\right| = \frac{5}{128 \times 10^4}\frac{1}{(1+\xi)^{7/2}}$$

donde $\xi \in \left(0, \frac{1}{10}\right)$. Como $\xi > 0 \Rightarrow 1+\xi > 1 \Rightarrow \frac{1}{1+\xi} < 1$ de donde

$$\frac{1}{(1+\xi)^{7/2}} < 1$$

luego

$$\left|R_3 f\left(0, \frac{1}{10}\right)\right| < \frac{5}{128 \times 10^4} \simeq 3.906\,3 \times 10^{-6} < 4 \times 10^{-6}$$

notar que el error real que hemos cometido es

$$\left|\sqrt{1{,}1} - 1{,}0488125\right| \simeq |1{,}048808848170152 - 1{,}0488125| \simeq 3.651\,8 \times 10^{-6}$$

que es menor que la cota máxima, como se esperaba.

26. Calcula el desarrollo de Taylor de grado 3 en $x_0 = 1$ de la función $f(x) = \ln(x)$ y utiliza este desarrollo para aproximar el valor de $\ln(0{,}9)$, obteniendo la menor cota posible del error cometido.

Utilizamos el desarrollo obtenido en el ejercicio 23.h, que reproducimos a continuación por comodidad y para el cálculo del término del error:

n	$f^{(n)}(x)$	$f^{(n)}(x_0)$	$\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$
0	$\ln(x)$	0	0
1	$\frac{1}{x} = x^{-1}$	1	1
2	$-x^{-2}$	-1	$-\frac{1}{2!} = -\frac{1}{2}$
3	$2x^{-3}$	2	$\frac{2}{3!} = \frac{1}{3}$
4	$-6x^{-4}$	$-6\xi^{-4}$	$\frac{-6\xi^{-4}}{4!} = -\frac{1}{4}\frac{1}{\xi^4}$

el polinomio de Taylor es

$$P_3(x) = (x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{3}(x-1)^3$$

siendo el término de error

$$|R_3 f(0,x)| = \left| -\frac{1}{4}\frac{1}{\xi^4}(x-1)^4 \right|$$

con $\xi \in (0{,}9, 1)$. En este caso como $x = 0{,}9 = \frac{9}{10}$

$$\left| R_3 f\left(0, \frac{9}{10}\right) \right| = \left| -\frac{1}{4}\frac{1}{\xi^4}\left(\frac{9}{10} - 1\right)^4 \right| = \left| -\frac{1}{4}\frac{1}{\xi^4}\left(-\frac{1}{10}\right)^4 \right| = \frac{1}{4 \times 10^4}\frac{1}{\xi^4}$$

Como $\frac{9}{10} < \xi < 1 \Rightarrow \frac{10}{9} > \frac{1}{\xi} > 1 \Rightarrow \left(\frac{10}{9}\right)^4 > \frac{1}{\xi^4} > 1$ de donde

$$\frac{1}{\xi^4} < \left(\frac{10}{9}\right)^4$$

luego

$$\left| R_3 f\left(0, \frac{9}{10}\right) \right| = \frac{1}{4 \times 10^4}\frac{1}{\xi^4} < \frac{1}{4}\frac{1}{10^4}\frac{10^4}{9^4} = \frac{1}{4 \times 9^4} = 3.810\,4 \times 10^{-5}$$

Si usamos el polinomio de Taylor para el cálculo de $\ln(0{,}9)$

$$P_3\left(\frac{9}{10}\right) = \left(\frac{9}{10} - 1\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{9}{10} - 1\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{9}{10} - 1\right)^3 = -\frac{1}{10} - \frac{1}{2}\frac{1}{100} - \frac{1}{3}\frac{1}{1000} = -\frac{79}{750} = -0{,}105\,33$$

mientras que el valor de MAXIMA de $\ln(0{,}9)$ es

$$\ln(0{,}9) = -0{,}1053605156578263$$

con un error

$$|\ln(0{,}9) - (-0{,}105\,33)| \simeq |-0{,}1053605156578263 - (-0{,}105\,33)| \simeq 3.051\,6 \times 10^{-5}$$

que es menor que la cota máxima obtenida, como se esperaba.

27. Calcula el desarrollo de Taylor de grado 4 en $x_0 = 9$ de la función $f(x) = \sqrt{x}$ y utiliza este desarrollo para aproximar el valor de $\sqrt{10}$, obteniendo la menor cota posible del error cometido.

Calculamos el polinomio de Taylor para $x_0 = 9$, tenemos en cuenta que $\sqrt{9} = 9^{1/2} = 3$

n	$f^{(n)}(x)$	$f^{(n)}(x_0)$	$\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$
0	$\sqrt{x} = x^{1/2}$	3	3
1	$\frac{1}{2}x^{-1/2}$	$\frac{1}{2}\frac{1}{3} = \frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$
2	$-\frac{1}{4}x^{-3/2}$	$-\frac{1}{4}\frac{1}{27} = -\frac{1}{108}$	$-\frac{1}{108}\frac{1}{2} = -\frac{1}{216}$
3	$\frac{3}{8}x^{-5/2}$	$\frac{3}{8}\frac{1}{243} = \frac{1}{648}$	$\frac{1}{648}\frac{1}{3!} = \frac{1}{3888}$
4	$-\frac{15}{16}x^{-7/2}$	$-\frac{15}{16}\xi^{-7/2}$	$-\frac{5}{128}\xi^{-7/2}$

$$P_3(x) = 3 + \frac{1}{6}(x-9) - \frac{1}{216}(x-9)^2 + \frac{1}{3888}(x-9)^3$$

Y el resto son

$$R_3 f(x,9) = -\frac{5}{128}\xi^{-7/2}(x-9)^4 .$$

Queremos calcular $\sqrt{10}$, para ello usaremos el desarrollo de Taylor obtenido

$$\begin{aligned} P_3(10) &= 3 + \frac{1}{6}(10-9) - \frac{1}{216}(10-9)^2 + \frac{1}{3888}(10-9)^3 \\ &= 3 + \frac{1}{6} - \frac{1}{216} + \frac{1}{3888} = \frac{12\,295}{3888} = 3.162\,3 \end{aligned}$$

El valor que se obtiene directamente mediante MAXIMA es

$$\sqrt{10} = 3{,}16227766016838$$

bastante aproximado al anterior. Vamos a acotar el error máximo que vamos a cometer, teniendo en cuenta que en la fórmula del error hay que tomar $x = 10$ luego

$$|R_3 f(10,9)| = \left| -\frac{5}{128}\xi^{-7/2}(10-9)^4 \right| = \frac{5}{128}\xi^{-7/2}$$

donde $\xi \in (9,10)$. Como $10 > \xi > 9 \Rightarrow \frac{1}{10} < \frac{1}{\xi} < \frac{1}{9} \Rightarrow \left(\frac{1}{\xi}\right)^{7/2} < \left(\frac{1}{9}\right)^{7/2} = \frac{1}{3^7}$

luego

$$|R_3 f(10,9)| < \frac{5}{128}\frac{1}{3^7} \simeq 1.786\,1 \times 10^{-5}$$

Como en los ejercicios anteriore, el error real que hemos cometido es

$$\left|\sqrt{10} - 3.162\,3\right| \simeq |3{,}16227766016838 - 3.162\,3| \simeq 2.234\,0 \times 10^{-5}$$

de nuevo menor que la cota máxima, tal y como se esperaba.

28. Obtén aproximaciones con las cifras decimales exactas indicadas usando el polinomio de Taylor adecuado:

    a) $\frac{1}{\sqrt{1{,}1}}$ con 3 decimales exactos.
    b) $\cos(0{,}1)$ con 3 cifras decimales exactas.
    c) $e^{0{,}1}$ con 4 cifras decimales exactas.
    d) $\sqrt{84}$con 2 cifras decimales exactas.
    e) $e^{0{,}1}\operatorname{sen} 0{,}1$ con 3 cifras decimales exactas.

Solución:

a) Desarrollo de Taylor de $(x)^{-1/2}$ en $x_0 = 1$.

n	$f^{(n)}(x)$	$f^{(n)}(x_0)$	$\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$
0	$\frac{1}{\sqrt{x}} = x^{-1/2}$	1	1
1	$-\frac{1}{2}x^{-3/2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$
2	$\frac{3}{2^2}x^{-5/2}$	$\frac{3}{2^2}$	$\frac{3}{2^3}$
3	$-\frac{3\cdot5}{2^3}x^{-7/2}$	$-\frac{3\cdot5}{2^3}$	$-\frac{3\cdot5}{2^3}\frac{1}{3!}$
4	$\frac{3\cdot5\cdot7}{2^4}x^{-9/2}$	$\frac{3\cdot5\cdot7}{2^4}$	$\frac{3\cdot5\cdot7}{2^4}\frac{1}{4!}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
n	$\frac{(2n-1)\cdot(2n-3)\cdots1}{2^n}x^{-(2n+1)/2}$	$\frac{(2n-1)\cdot(2n-3)\cdots1}{2^n}$	$\frac{(2n-1)\cdot(2n-3)\cdots1}{2^n}\frac{1}{n!}$
$n+1$	$\frac{(2n+1)\cdot(2n-1)\cdots1}{2^{n+1}}x^{-(2n+3)/2}$	$\frac{(2n+1)\cdot(2n-1)\cdots1}{2^{n+1}}\xi^{-(2n+3)/2}$	$\frac{(2n+1)\cdot(2n-1)\cdots1}{2^{n+1}(n+1)!}\frac{1}{n+1!}\xi^{-(2n+3)/2}$

Como la aproximación tiene 3 decimales exactos se busca que el error sea menor que 10^{-4}, tomando $x = 1{,}1$, es decir, buscamos n de forma que

$$|R_n f(1{,}1,1)| = \left|\frac{(2n+1)\cdot(2n-1)\cdots 1}{2^{n+1}(n+1)!}\xi^{-(2n+3)/2}(1{,}1-1)^{n+1}\right| \leq 10^{-4}$$

Buscaremos una cota para $R_n f(1{,}1,1)$

$$\left|\frac{(2n+1)\cdot(2n-1)\cdots 1}{2^{n+1}(n+1)!}\xi^{-(2n+3)/2}(1{,}1-1)^{n+1}\right| = \left|\frac{(2n+1)\cdot(2n-1)\cdots 1}{2^{n+1}(n+1)!}\xi^{-(2n+3)/2}\frac{1}{10^{n+1}}\right|$$

como además $\xi \in (1, 1{,}1)$

$$1 < \xi < 1{,}1 \Rightarrow 1 > \frac{1}{\xi} \Rightarrow 1 > \left(\frac{1}{\xi}\right)^{\frac{2n+3}{2}}$$

luego podemos poner

$$\left|\frac{(2n+1)\cdot(2n-1)\cdots 1}{2^{n+1}(n+1)!}\xi^{-(2n+3)/2}\frac{1}{10^{n+1}}\right| < \frac{(2n+1)\cdot(2n-1)\cdots 1}{2^{n+1}(n+1)!}\frac{1}{10^{n+1}}$$

por tanto si

$$a_n = \frac{(2n+1)\cdot(2n-1)\cdots 1}{2^{n+1}(n+1)!}\frac{1}{10^{n+1}} < \frac{1}{10^4} = 10^{-4}$$

garantizaremos el error pedido en el polinomio de Taylor. Dando valores a la $n \geq 1$

n	a_n
1	$\frac{3}{2^2(2)!}\frac{1}{10^2} = 0{,}375 \times 10^{-2}$
2	$\frac{5\cdot 3}{2^3(3)!}\frac{1}{10^3} = 3.125 \times 10^{-4}$
3	$\frac{7\cdot 5\cdot 3\cdot 1}{2^4(4)!}\frac{1}{10^4} = 2.7344 \times 10^{-5}$

por tanto habría que tomar $n = 3$. El polinomio sería

$$P_3(x) = 1 - \frac{1}{2}(x-1) + \frac{3}{8}(x-1)^2 - \frac{5}{16}(x-1)^3$$

y

$$\begin{aligned} P_3(1{,}1) &= 1 - \frac{1}{2}(1{,}1-1) + \frac{3}{8}(1{,}1-1)^2 - \frac{5}{16}(1{,}1-1)^3 \\ &= 1 - \frac{1}{2}(0{,}1) + \frac{3}{8}(0{,}1)^2 - \frac{5}{16}(0{,}1)^3 \\ &= 1 - \frac{1}{2}\frac{1}{10} + \frac{3}{8}\frac{1}{100} - \frac{5}{16}\frac{1}{1000} = \frac{3051}{3200} = 0{,}95344 \end{aligned}$$

mientras que el cálculo realizado por MAXIMA es

$$\frac{1}{\sqrt{1{,}1}} = 0{,}9534625892455922$$

observamos que hay 4 cifras decimales exactas, esto es debido a que hemos cogido una cota para el error máximo. De hecho para $n = 2$ podría ser válido, puesto que la cota máxima está muy cerca del error solicitado; tomaremos $n = 2$ para comprobarlo, eso implica eliminar el último sumando del resultado anterior

$$1 - \frac{1}{2}\frac{1}{10} + \frac{3}{8}\frac{1}{100} = 0{,}95375$$

y efectivamente comprobamos que hay 3 cifras decimales exactas.

b) Desarrollo de Taylor de $\cos x$ en $x_0 = 0$

n	$f^{(n)}(x)$	$f^{(n)}(x_0)$	$\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$
0	$\cos(x)$	1	1
1	$-\operatorname{sen}(x)$	0	0
2	$-\cos(x)$	-1	$-\frac{1}{2!}$
3	$\operatorname{sen}(x)$	0	0
4	$\cos(x)$	1	$\frac{1}{4!}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$2m-1$	$(-1)^m \operatorname{sen} x$	0	0
$2m$	$(-1)^m \cos x$	$(-1)^m$	$\frac{(-1)^m}{(2m)!}$
$2m+1$	$(-1)^{m+1} \operatorname{sen} x$	$(-1)^{m+1} \operatorname{sen} \xi$	$\frac{(-1)^{m+1} \operatorname{sen} \xi}{(2m+1)!}$

El término de error es

$$R_{2n+1}(\cos x, x, 0) = \frac{(-1)^{n+1} \operatorname{sen} \xi}{(2n+1)!} x^{2n+1}$$

Como la aproximación tiene 3 decimales exactos se busca que el error sea menor que 10^{-4}, tomando $x = 0{,}1 = \frac{1}{10}$, es decir, buscamos n de forma que

$$|R_{2m}(\cos, 0{,}1, 0)| = \left| \frac{(-1)^{m+1} \operatorname{sen} \xi}{(2m+1)!} \frac{1}{10^{2m+1}} \right| \leq 10^{-4}$$

Buscaremos una cota para $R_{2m}(\cos, 0{,}1, 0)$. Tenemos en cuenta que $|\operatorname{sen} x| \leq 1$ para poner

$$\left| \frac{(-1)^{m+1} \operatorname{sen} \xi}{(2m+1)!} \frac{1}{10^{2m+1}} \right| = \frac{1}{(2m+1)!} \frac{1}{10^{2m+1}}$$

Dando valores a la $m \geq 1$

m	
1	$\frac{1}{(3)!} \frac{1}{10^3} = 1.666\,7 \times 10^{-4}$
2	$\frac{1}{5!} \frac{1}{10^5} =: 8.333\,3 \times 10^{-8}$

Por tanto el grado del polinomio debe ser $n = 2m = 4$ (aunque por la cota de error que se obtiene para $m = 1$, seguramente podría servir el polinomio de grado 2). El polinomio será

$$P_3(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$$

y

$$P_3(0{,}1) = P\left(\frac{1}{10}\right) = 1 - \frac{1}{2} \frac{1}{100} + \frac{1}{24} \frac{1}{10000} = \frac{238\,801}{240\,000} \simeq 0{,}995$$

mientras que el cálculo realizado por MAXIMA es

$$\cos(0{,}1) = 0{,}9950041652780258$$

observamos que hay al menos 3 cifras decimales exactas.

c) Desarrollo de Taylor de e^x en $x_0 = 0$

n	$f^{(n)}(x)$	$f^{(n)}(x_0)$	$\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$
0	e^x	1	1
1	e^x	1	1
2	e^x	1	$\frac{1}{2!}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
n	e^x	1	$\frac{1}{n!}$

$$P_n(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \cdots + \frac{(-1)^n}{n!}x^n$$

Para el resto necesitamos conocer la $(n+1)$–ésima derivada $f^{(n+1)}(x) = e^x$

$$R_n f(e^x, x, 0) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}x^n = \frac{e^\xi}{(n+1)!}x^{n+1}$$

Para $x = \frac{1}{10}$

$$R_n f\left(e^x, \frac{1}{10}, 0\right) = \frac{e^\xi}{(n+1)!}\frac{1}{10^{n+1}}$$

Como $\xi \in \left(0, \frac{1}{10}\right)$ y e^x es creciente, entonces

$$\frac{e^\xi}{(n+1)!}\frac{1}{10^{n+1}} < \frac{e^{1/10}}{(n+1)!}\frac{1}{10^{n+1}}$$

por otra parte sabemos que $e < 3$ por tanto $e^{1/10} < 3^{1/10} < 3^{1/2} < 4^{1/2} = 2$, por tanto

$$\frac{e^{1/10}}{(n+1)!}\frac{1}{10^{n+1}} < \frac{2}{(n+1)!}\frac{1}{10^{n+1}}$$

y buscamos n

n	
1	$\frac{2}{2!}\frac{1}{10^2} = 0{,}01$
2	$\frac{2}{3!}\frac{1}{10^3} = 3.333\,3 \times 10^{-4}$
3	$\frac{2}{4!}\frac{1}{10^4} = 8.333\,3 \times 10^{-6}$

Por tanto el grado del polinomio debe ser $n = 3$. El polinomio será

$$P_3(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}$$

y

$$P_3(0{,}1) = P\left(\frac{1}{10}\right) = 1 + \frac{1}{100} + \frac{1}{2}\frac{1}{100} + \frac{1}{6}\frac{1}{1000} = \frac{6091}{6000} \simeq 1{,}015166666666667$$

mientras que el cálculo realizado por MAXIMA es

$$e^{0{,}1} = 1{,}105170918075648$$

observamos que hay al menos 4 cifras decimales exactas.

d) Desarrollo de Taylor de $\sqrt{x}$ en $x_0 = 81$. Notar que $81^{m/2} = \left(81^{1/2}\right)^m = 9^m$

n	$f^{(n)}(x)$	$f^{(n)}(x_0)$	$\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$
0	$\sqrt{x} = x^{1/2}$	9	9
1	$\frac{1}{2}x^{-1/2}$	$\frac{1}{2}\frac{1}{9}$	$\frac{1}{2}\frac{1}{9}$
2	$-\frac{1}{2^2}x^{-3/2}$	$-\frac{1}{2^2}\frac{1}{9^3}$	$-\frac{1}{2^3}\frac{1}{9^3}$
3	$\frac{3}{2^3}x^{-5/2}$	$\frac{3}{2^3}\frac{1}{9^5}$	$\frac{3}{2^3}\frac{1}{9^5}\frac{1}{3!}$
4	$-\frac{5\cdot 3}{2^4}x^{-7/2}$	$-\frac{5\cdot 3}{2^4}\frac{1}{9^7}$	$-\frac{5\cdot 3}{2^4}\frac{1}{4!}$
5	$\frac{7\cdot 5\cdot 3}{2^5}x^{-9/2}$	$\frac{7\cdot 5\cdot 3}{2^5}\frac{1}{9^9}$	$\frac{7\cdot 5\cdot 3}{2^5}\frac{1}{9^9}\frac{1}{4!}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
n	$\frac{(2n-3)\cdots 1}{2^n}x^{-(2n-1)/2}$	$\frac{(2n-3)\cdots 1}{2^n}\frac{1}{9^{2n-1}}$	$\frac{(2n-3)\cdots 1}{2^n}\frac{1}{9^{2n-1}}\frac{1}{n!}$
$n+1$	$\frac{(2n-1)\cdot(2n-3)\cdots 1}{2^{n+1}}x^{-(2n+1)/2}$	$\frac{(2n-1)\cdot(2n-3)\cdots 1}{2^{n+1}}\xi^{-(2n+1)/2}$	$\frac{(2n-1)\cdot(2n-3)\cdots 1}{2^{n+1}}\frac{1}{(n+1)!}\xi^{-(2n+1)/2}$

Desarrollo de Taylor de $x^{-1/2}$ en $x_0 = 1$.Como la aproximación tiene 2 decimales exactos se busca que el error sea menor que 10^{-3}, tomando $x = 84$, es decir, buscamos n de forma que

$$|R_n f(84, 81)| = \left|\frac{(2n-1)\cdot(2n-3)\cdots 1}{2^{n+1}}\frac{1}{(n+1)!}\xi^{-(2n+1)/2}(84-81)^{n+1}\right| \leq 10^{-3}$$

Buscaremos una cota para $R_n f\,(84,81)$

$$\left|\frac{(2n-1)\cdot(2n-3)\cdots 1}{2^{n+1}}\frac{1}{(n+1)!}\xi^{-(2n+1)/2}\,(84-81)^{n+1}\right| = \left|\frac{(2n-1)\cdot(2n-3)\cdots 1}{2^{n+1}\,(n+1)!}\xi^{-(2n+1)/2}3^{n+1}\right|$$

como además $\xi\in(81,84)$

$$81<\xi<84 \Rightarrow \frac{1}{81}>\frac{1}{\xi}\Rightarrow\left(\frac{1}{81}\right)^{\frac{2n+3}{2}}=\left(\frac{1}{9}\right)^{2n+1}>\left(\frac{1}{\xi}\right)^{\frac{2n+3}{2}}$$

luego podemos poner

$$\left|\frac{(2n-1)\cdot(2n-3)\cdots 1}{2^{n+1}\,(n+1)!}\xi^{-(2n+1)/2}3^{n+1}\right| < \frac{(2n-1)\cdot(2n-3)\cdots 1}{2^{n+1}\,(n+1)!}\left(\frac{1}{9}\right)^{2n+1}3^{n+1}$$

o simplificantod

$$\left|\frac{(2n-1)\cdot(2n-3)\cdots 1}{2^{n+1}\,(n+1)!}\xi^{-(2n+1)/2}3^{n+1}\right| < \frac{(2n-1)\cdot(2n-3)\cdots 1}{2^{n+1}\,(n+1)!}\left(\frac{1}{3}\right)^{3n+1}$$

por tanto si

$$\frac{(2n-1)\cdot(2n-3)\cdots 1}{2^{n+1}\,(n+1)!}\left(\frac{1}{3}\right)^{3n+1}<\frac{1}{10^3}=10^{-3}$$

garantizaremos el error pedido en el polinomio de Taylor. Dando valores a la $n\geq 1$

n	a_n
1	$\frac{1}{2^2(2)!}\left(\frac{1}{3}\right)^4=1.543\,2\times10^{-3}$
2	$\frac{3}{2^3(3)!}\left(\frac{1}{3}\right)^7=:2.857\,8\times10^{-5}$

por tanto habría que tomar $n=2$. El polinomio sería

$$P_3\,(x)=9+\frac{1}{18}\,(x-81)-\frac{1}{5832}\,(x-81)^2$$

y

$$\begin{aligned} P_3\,(84) &= 9+\frac{1}{18}\,(84-81)-\frac{1}{5832}\,(84-81)^2 \\ &= 9+\frac{3}{18}-\frac{9}{5832}=\frac{5939}{648}\simeq 9{,}165123456790123 \end{aligned}$$

mientras que el cálculo realizado por MAXIMA es

$$\sqrt{84}=9{,}16515138991168$$

observamos que hay 4 cifras decimales exactas, esto es debido a que hemos cogido una cota para el error máximo. De hecho para $n=1$ podría ser válido, puesto que la cota máxima está muy cerca del error solicitado; tomaremos $n=1$ para comprobarlo, eso implica eliminar el último sumando del resultado anterior

$$9+\frac{3}{18}=\frac{55}{6}\simeq 9{,}16666666666666$$

y efectivamente comprobamos que hay 2 cifras decimales exactas.

e) (*) Dificultad especial, no entraría en examen.
Desarrollo de Taylor de $e^x\operatorname{sen}x$ en $x_0=0$

n	$f^{(n)}(x)$	$f^{(n)}(x_0)$	$\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$
0	$e^x \operatorname{sen} x$	0	0
1	$e^x(\operatorname{sen} x + \cos x)$	1	1
2	$2e^x \cos x$	2	$\frac{2}{2!} = 1$
3	$-2e^x(\operatorname{sen} x - \cos x)$	2	$\frac{2}{3!} = \frac{1}{3}$
4	$-4e^x \operatorname{sen} x$	0	0
5	$-4e^x(\operatorname{sen} x + \cos x)$	-4	$-\frac{4}{5!}$
6	$-8e^x \cos x$	-8	$-\frac{8}{5!}$
7	$8e^x(\operatorname{sen} x - \cos x)$	-8	$-\frac{8}{5!}$
8	$16e^x \operatorname{sen} x$	0	0
9	$16e^x(\operatorname{sen} x + \cos x)$	16	$-\frac{16}{5!}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$4m$	$(-1)^m 2^{2m} e^x \operatorname{sen} x$	0	0
$4m+1$	$(-1)^m 2^{2m} e^x(\operatorname{sen} x + \cos x)$	$(-1)^m 2^{2m}$	$\frac{(-1)^m 2^{2m}}{(4m+1)!}$
$4m+2$	$(-1)^m 2^{2m+1} e^x \cos x$	$(-1)^m 2^{2m+1}$	$\frac{(-1)^m 2^{2m+1}}{(4m+2)!}$
$4m+3$	$(-1)^{m+1} 2^{2m+1} e^x(\operatorname{sen} x - \cos x)$	$(-1)^{m+2} 2^{2m+1}$	$\frac{(-1)^{m+2} 2^{2m+1}}{(4m+3)!}$

Teniendo en cuenta la expresión general para las derivadas podemos ver que el resto, que depende de la n en la que se acabe, será de alguna de las 4 formas siguientes, tomaremos $x = \frac{1}{10} = 0{,}1$

$$\begin{aligned}
R_{4m}f\left(e^x \operatorname{sen} x, \frac{1}{10}, 0\right) &= \frac{(-1)^m 2^{2m} e^{\xi} \operatorname{sen}\xi}{(4m)!}\left(\frac{1}{10}\right)^{4m} \\
R_{4m+1}f\left(e^x \operatorname{sen} x, \frac{1}{10}, 0\right) &= \frac{(-1)^m 2^{2m} e^{\xi} (\operatorname{sen}\xi + \cos\xi)}{(4m+1)!}\left(\frac{1}{10}\right)^{4m+1} \\
R_{4m+2}f\left(e^x \operatorname{sen} x, \frac{1}{10}, 0\right) &= \frac{(-1)^m 2^{2m+1} e^{\xi} \cos\xi}{(4m+2)!}\left(\frac{1}{10}\right)^{4m+2} \\
R_{4m+3}f\left(e^x \operatorname{sen} x, \frac{1}{10}, 0\right) &= \frac{(-1)^{m+1} 2^{2m+1} e^{\xi} (\operatorname{sen}\xi - \cos\xi)}{(4m+3)!}\left(\frac{1}{10}\right)^{4m+3}
\end{aligned}$$

Si tenemos en cuenta que

$$\begin{aligned}
|\operatorname{sen} x| &\leq 1 \\
|\cos x| &\leq 1 \\
|\operatorname{sen} x + \cos x| &\leq |\operatorname{sen} x| + |\cos x| \leq 2 \\
|\operatorname{sen} x - \cos x| &\leq |\operatorname{sen} x| + |\cos x| \leq 2
\end{aligned}$$

y que además $\xi \in \left(0, \frac{1}{10}\right)$ por tanto

$$e^{\xi} < e^{\frac{1}{10}} < 2$$

obtendremos

$$\begin{aligned}
\left|R_{4m}f\left(e^x \operatorname{sen} x, \frac{1}{10}, 0\right)\right| &= \left|\frac{(-1)^m 2^{2m} e^{\xi} \operatorname{sen}\xi}{(4m)!}\left(\frac{1}{10}\right)^{4m}\right| \leq \frac{2^{2m+1}}{(4m)!}\left(\frac{1}{10}\right)^{4m} \\
\left|R_{4m+1}f\left(e^x \operatorname{sen} x, \frac{1}{10}, 0\right)\right| &= \left|\frac{(-1)^m 2^{2m} e^{\xi} (\operatorname{sen}\xi + \cos\xi)}{(4m+1)!}\left(\frac{1}{10}\right)^{4m+1}\right| \leq \frac{2^{2m+2}}{(4m+1)!}\left(\frac{1}{10}\right)^{4m+1} \\
\left|R_{4m+2}f\left(e^x \operatorname{sen} x, \frac{1}{10}, 0\right)\right| &= \left|\frac{(-1)^m 2^{2m+1} e^{\xi} \cos\xi}{(4m+2)!}\left(\frac{1}{10}\right)^{4m+2}\right| \leq \frac{2^{2m+2}}{(4m+2)!}\left(\frac{1}{10}\right)^{4m+2} \\
\left|R_{4m+3}f\left(e^x \operatorname{sen} x, \frac{1}{10}, 0\right)\right| &= \left|\frac{(-1)^{m+1} 2^{2m+1} e^{\xi} (\operatorname{sen}\xi - \cos\xi)}{(4m+3)!}\left(\frac{1}{10}\right)^{4m+3}\right| \leq \frac{2^{2m+3}}{(4m+3)!}\left(\frac{1}{10}\right)^{4m+3}
\end{aligned}$$

y buscamos n

m	R_{4m}	R_{4m+1}	R_{4m+2}	R_{4m+3}
0	2	4×10^{-1}	2×10^{-2}	$\frac{4}{3}\times 10^{-3}$
1	$\frac{1}{3}\times 10^{-4}$	$\frac{2}{15}\times 10^{-5}$		
2				
3				

Como buscamos error menor que 10^{-4} tendremos que tomar $m=1$ y llegar hasta el término $4m+1=5$ para el error. Por tanto el grado del polinomio debe ser $n=4$. El polinomio será

$$P_3(x) = x + x^2 + \frac{x^3}{3}$$

y

$$P_3(0{,}1) = P\left(\frac{1}{10}\right) = \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \frac{1}{3000} = \frac{331}{3000} = 0{,}110\,33$$

mientras que el cálculo realizado por MAXIMA es

$$e^{0{,}1}\operatorname{sen}(0{,}1) = 0{,}1103329887302037$$

que nos da las 2 (de hecho son 5) cifras decimales pedidas.

29. Usando el polinomio de Taylor de la función $f(x) = 6\arcsin x$ en $x_0=0$, calcula una aproximación de π con 4 cifras decimales. (Ayuda: $\pi = f\left(\frac{1}{2}\right)$).

Solución: (*) Dificultad especial, no entraría en examen.

30. **El Principio de Fermat y la Ley de Snell en Óptica**. El Principio de Fermat establece que la luz viaja siguiendo el camino más rápido. Supongamos que en un plano tenemos dos puntos de coordenadas $A=(0,r)$ y $B=(s,q)$, con $r,s>0$ y $q<0$. Supongamos también que en la región $y>0$ la luz viaja a velocidad v mientras que al pasar por el eje OX (al cambiar de medio) se refracta y su velocidad pasa a ser w. Denotemos por x el punto del eje OX por el cual la luz pasa de un medio a otro. Se pide:

    a) Calcula, en función de x, el tiempo que tarda la luz en viajar desde A hasta B.

    b) Teniendo en cuenta el Principio de Fermat, encuentra la ecuación que satisface x.

    c) Denotemos por α el ángulo de incidencia, es decir, el ángulo que forma el rayo de luz con la vertical en el punto x antes de ser refractado, y por β el ángulo de refracción, es decir, el ángulo del rayo de luz en el punto x una vez se ha refractado. Demuestra que se satisface la lo que en óptica se llama Ley de Snell:

    $$\frac{\operatorname{sen}\alpha}{v} = \frac{\operatorname{sen}\beta}{w},$$

    d) El Princpio de Fermat también es válido para la luz reflejada. Demuestra que, en este caso, el ángulo de incidencia es igual al reflejado.

Solución:

a) Supongamos que la luz impacta con el punto $X=(x,0)$ en el eje OX. La luz viaja en línea recta desde A hasta X a la velocidad v, por tanto el tiempo que transcurre en el medio 1 es

$$t_1 = \frac{d(A,X)}{v} = \frac{d((0,r),(x,0))}{v} = \frac{\sqrt{x^2+r^2}}{v}$$

Por otra parte la luz viaja desde X hasta B a velocidad w, por tanto el tiempo que tarda en hacer este camino viene dado por

$$t_2 = \frac{d(X,B)}{w} = \frac{d((x,0),(s,q))}{w} = \frac{\sqrt{(s-x)^2+q^2}}{w}$$

El tiempo total será la suma de ambos, que es una función de x

$$T\left(x\right)=\frac{\sqrt{x^2+r^2}}{v}+\frac{\sqrt{\left(s-x\right)^2+q^2}}{w}.$$

b) Para encontrar el punto de corte, tenempos en cuenta que debe hacerlo en el mínimo tiempo posible, por tanto tenemos que buscar los puntos críticos de $T\left(x\right)$

$$T'\left(x\right)=\frac{2x}{v\sqrt{x^2+r^2}}-\frac{2\left(s-x\right)}{w\sqrt{\left(s-x\right)^2+q^2}}=0\Leftrightarrow\frac{x}{v\sqrt{x^2+r^2}}=\frac{\left(s-x\right)}{w\sqrt{\left(s-x\right)^2+q^2}}.$$

c) Teniendo en cuenta la definición de seno de un ángulo tendremos, para el rayo incidente

$$\operatorname{sen}\alpha=\frac{\text{Cateto Opuesto}}{\text{Hipotenusa}}=\frac{x}{d\left(A,X\right)}=\frac{x}{\sqrt{x^2+r^2}}$$

mientras que para el rayo refractado

$$\operatorname{sen}\beta=\frac{\text{Cateto Opuesto}}{\text{Hipotenusa}}=\frac{s-x}{d(X,B)}=\frac{\left(s-x\right)}{\sqrt{\left(s-x\right)^2+q^2}}$$

y sustituyendo en la ecuación del apartado anterior

$$\frac{x}{v\sqrt{x^2+r^2}}=\frac{\left(s-x\right)}{w\sqrt{\left(s-x\right)^2+q^2}}\Leftrightarrow\frac{\operatorname{sen}\alpha}{v}=\frac{\operatorname{sen}\beta}{w}$$

d) Para el caso de la luz reflejada, el medio es el mismo y por tanto $v=w$, de modo que

$$\operatorname{sen}\alpha=\operatorname{sen}\beta$$

como $\alpha,\beta\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, se debe cumplir $\alpha=\beta$.