1. Calcula las siguientes integrales indefinidas inmediatas

(a) $\int (2x-1)^3 \; dx$ (b) $\int (4x+3)\, e^{-\left(2x^2+3x+1\right)}\, dx$ (c) $\int \dfrac{\log x}{x}\, dx$

(d) $\int \frac{x}{2x^2+3}\, dx$ (e) $\int \left(x+x^2\right)^{-1/2}(1+2x)\; dx$ (f) $\int \operatorname{sen}(ax)\cos(ax)\, dx$

Solución: En cada caso se modifica la función del integrando de forma conveniente para obtener una integral inmediata:

a) Tipo $f(x)^n f'(x)$:
$$\int (2x-1)^3 \; dx = \frac{1}{2}\int 2\,(2x-1)^3\; dx = \frac{(2x-1)^4}{8} + C.$$

b) Tipo $f'(x)\, e^{f(x)}$:
$$\int (4x+3)\, e^{-\left(2x^2+3x+1\right)}\, dx = -\int -(4x+3)\, e^{-\left(2x^2+3x+1\right)}\, dx = -e^{-\left(2x^2+3x+1\right)} + C.$$

c) Tipo $f(x)^n f'(x)$ con $f(x) = \log x$ y $n = 1$
$$\int \frac{\log x}{x}\, dx = \frac{(\log x)^2}{2} + C.$$

d) La derivada del denominador es $4x$, luego multiplicamos y dividimos por 4 en el integrando
$$\int \frac{x}{2x^2+3}\, dx = \frac{1}{4}\int \frac{4x}{2x^2+3}\, dx = \frac{1}{4}\ln\left|2x^2+3\right| + C.$$

e) Inmediata del tipo $f(x)^\alpha f'(x)$ con $\alpha = -\frac{1}{2}$, $f(x) = \left(x+x^2\right)$
$$\int \left(x+x^2\right)^{-1/2}(1+2x)\; dx = 2\left(x+x^2\right)^{\frac{1}{2}} + C.$$

f) Inmediata usando la fórmula del ángulo doble: $\operatorname{sen}(2ax) = 2\operatorname{sen}(ax)\cos(ax)$
$$\int \operatorname{sen}(ax)\cos(ax)\, dx = \frac{1}{2}\int 2\operatorname{sen}(ax)\cos(ax)\, dx = \frac{1}{2}\int \operatorname{sen}(2ax)\, dx = -\frac{\cos(2ax)}{4a} + C,$$
o inmediata del tipo $f(x)^n f'(x)$
$$\int \operatorname{sen}(ax)\cos(ax)\, dx = \frac{1}{a}\int a\operatorname{sen}(ax)\cos(ax)\, dx = \frac{\operatorname{sen}^2(ax)}{2a} + C.$$
Notar que aunque la expresión de la primitiva no es la misma, si usamos la fórmula del ángulo doble para $\operatorname{sen}^2\alpha = (1-\cos 2\alpha)/2$
$$\left[\frac{\operatorname{sen}^2(ax)}{2a} + C\right] = \frac{1}{2a}\left(\frac{1-\cos(2ax)}{2}\right) + C = -\frac{\cos(2ax)}{4a} + \left(C + \frac{1}{4a}\right),$$
que coincide con la anterior salvo una constante.

2. Calcula las siguientes integrales por el método de cambio de variable, usando el cambio adecuado en cada caso:

(a) $\int \frac{e^x-1}{e^x+2}dx$ (b) $\int \frac{5^x+2}{5^x-1}\,dx$ (c) $\int \frac{1+\operatorname{arcsen}^2 x}{(1+\operatorname{arcsen} x)\sqrt{1-x^2}}\,dx$

(e) $\int \frac{1}{e^{2x}-e^x}\,dx$ (f) $\int \frac{\tan^3 x}{1+\tan^2 x}\,dx$ (g) $\int \dfrac{\arctan x+3}{(2-\arctan x)\,(1+x^2)}\,dx$

Solución:

a) Cambio:

$$e^x = u \Rightarrow e^x dx = du \Rightarrow dx = \frac{1}{e^x}du = \frac{1}{u}du$$

Transformación usando el cambio:

$$\int \frac{e^x-1}{e^x+2}dx = \int \frac{u-1}{u+2}\frac{1}{u}du = \int \frac{u-1}{u\,(u+2)}du$$

Realizamos la descomposición en fracciones simples

$$\int \frac{u-1}{u(u+2)}du = \int \frac{A}{u} + \frac{B}{u+2}dx = A\ln|u| + B\ln|u+2| + C.$$

Para calcular los valores de A y B

$$\frac{u-1}{u(u+2)} = \frac{A}{u} + \frac{B}{u+2} = \frac{A\,(u+2)+Bu}{u(u+2)}$$

de donde

$$u-1 = A\,(u+2)+Bu$$

Dando a u los valores 0 y -2, obtenemos fácilmente que

$$u=0 \Rightarrow -1 = 2A \Leftrightarrow A = -\frac{1}{2}$$

$$u=-2 \Rightarrow -3 = -2B \Leftrightarrow B = \frac{3}{2}$$

luego

$$\int \frac{u-1}{u(u+2)}dx = -\frac{1}{2}\ln|u| + \frac{3}{2}\ln|u+2| + C$$

y deshaciendo el cambio

$$\begin{aligned}\int \frac{e^x-1}{e^x+2}dx &= -\frac{1}{2}\ln|e^x| + \frac{3}{2}\ln|e^x+2| + C\\ &\ -\frac{x}{2} + \frac{3}{2}\ln|e^x+2| + C\end{aligned}$$

b) Cambio

$$5^x = u \Rightarrow 5^x\ln 5dx = du \Rightarrow dx = \frac{1}{5^x\ln 5}du = \frac{1}{u\ln 5}du$$

$$\int \frac{5^x+2}{5^x-1}\,dx = \int \frac{u+2}{u-1}\frac{1}{u\ln 5}du = \frac{1}{\ln 5}\int \frac{u+2}{u\,(u-1)}du$$

Realizamos la descomposición en fracciones simples

$$\int \frac{u+2}{u\,(u-1)}du = \int \frac{A}{u} + \frac{B}{u-1}dx = A\ln|u| + B\ln|u-1| + C.$$

Calculo de los valores A y B :

$$\frac{u+2}{u\left(u-1\right)}=\frac{A}{u}+\frac{B}{u-1}=\frac{A\left(u-1\right)+Bu}{u(u-1)}$$

de donde

$$u+2=A\left(u-1\right)+Bu$$

Dando a u los valores 0 y 1, obtenemos fácilmente que

$$u=0\Rightarrow 2=-A\Leftrightarrow A=-2$$

$$u=1\Rightarrow 3=B\Leftrightarrow B=3$$

luego

$$\int\frac{u+2}{u\left(u-1\right)}dx=-2\ln|u|+3\ln|u-1|+C$$

y deshacemos el cambio

$$\begin{aligned}\int\frac{5^x+2}{5^x-1}\,dx &= \frac{1}{\ln 5}\left(-2\ln|5^x|+3\ln|5^x+2|\right)+C\\ &= -2x+\frac{3}{\ln 5}\ln|5^x+2|+C\end{aligned}$$

c) Cambio

$$\operatorname{arcsen}x=u\Rightarrow\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx=du$$

$$\int\frac{1+\operatorname{arcsen}^2x}{\left(1+\operatorname{arcsen}x\right)\sqrt{1-x^2}}\,dx=\int\frac{1+u^2}{1+u}du$$

Como el grado del numerador es mayor que el del denominador, primero hacemos la división

$$\frac{1+u^2}{1+u}=\left(u-1\right)+\frac{2}{u+1}$$

y ahora integramos directamente

$$\int\frac{1+u^2}{1+u}du=\int\left(u-1\right)+\frac{2}{u+1}du=\frac{u^2}{2}-u+2\ln\left(u+1\right)$$

Deshacemos el cambio:

$$\int\frac{1+\operatorname{arcsen}^2x}{\left(1+\operatorname{arcsen}x\right)\sqrt{1-x^2}}\,dx=\frac{1}{2}\operatorname{arcsen}^2x-\operatorname{arcsen}x+2\ln\left(\operatorname{arcsen}x+1\right)+C$$

d) Cambio

$$e^x=u\Rightarrow e^xdx=du\Rightarrow dx=\frac{1}{e^x}du=\frac{1}{u}du$$

$$\int\frac{1}{e^{2x}-e^x}\,dx=\int\frac{1}{u^2-u}\frac{1}{u}du=\int\frac{1}{u^2\left(u-1\right)}du$$

Realizamos la descomposición en fracciones simples

$$\int\frac{1}{u^2\left(u-1\right)}du=\int\frac{A}{u}+\frac{B}{u^2}+\frac{C}{u-1}dx=A\ln|u|-B\frac{1}{u}+C\ln|u-1|+D.$$

$$\frac{1}{u^2\left(u-1\right)}=\frac{A}{u}+\frac{B}{u^2}+\frac{C}{u-1}=\frac{Au\left(u-1\right)+B\left(u-1\right)+Cu^2}{u^2(u-1)}$$

es decir

$$1 = Au\left(u-1\right) + B\left(u-1\right) + Cu^2$$

Dando a u los valores 0 y 1

$$u = 0 \Rightarrow 1 = -B$$

$$u = 1 \Rightarrow 1 = C$$

para obtener el valor de A, damos otro valor a u, por ejemplo $u = -1$

$$1 = 2A - 2B + C$$

y como sabemos los valores de B y C

$$1 = 2A + 2 + 1 \Rightarrow A = -1$$

Es decir

$$\int \frac{1}{u^2\left(u-1\right)} du = -\ln|u| + \frac{1}{u} + \ln|u-1| + D$$

y deshaciendo el cambio

$$\int \frac{1}{e^{2x} - e^x}\, dx = -x + e^{-x} + \ln|e^x - 1| + D$$

$e)$

$$u = \tan\left(x\right) \Rightarrow du = \left(1 + \tan^2\left(x\right)\right) dx \Rightarrow du = \left(1 + u^2\right) dx \Rightarrow \frac{1}{1+u^2} du = dx$$

$$\int \frac{\tan^3 x}{1 + \tan^2 x}\, dx = \int \frac{u^3}{1+u^2}\frac{1}{1+u^2} du = \int \frac{u^3}{\left(1+u^2\right)^2} du$$

Utilizaremos Hermite para rresolver esta integral puesto que hay una raíz compleja doble

$$\begin{aligned}
\frac{u^3}{\left(1+u^2\right)^2} &= \frac{Au+B}{1+u^2} + \left(\frac{Cu+D}{1+u^2}\right)' \\
&= \frac{Au+B}{1+u^2} + \frac{C\left(1+u^2\right) - 2u\left(Cu+D\right)}{\left(1+u^2\right)} \\
&= \frac{\left(Au+B\right)\left(1+u^2\right) + C\left(1+u^2\right) - 2u\left(Cu+D\right)}{\left(1+u^2\right)^2} \\
&= \frac{Au^3 + \left(B-C\right)u^2 + \left(A-2D\right)u + \left(B+C\right)}{\left(1+u^2\right)^2}
\end{aligned}$$

e igualando coeficientes

$$\begin{aligned}
A &= 1 \\
B - C &= 0 \\
A - 2D &= 0 \\
B + C &= 0
\end{aligned}$$

con solución

$$A = 1;\ B = 0;\ C = 0;\ D = \frac{1}{2}$$

y por tanto

$$\begin{aligned}
\int \frac{u^3}{\left(1+u^2\right)^2} du &= \int \left(\frac{u}{1+u^2} + \left(\frac{1/2}{1+u^2}\right)'\right) du \\
&= \frac{1}{2}\ln\left|1+u^2\right| + \frac{1}{2}\frac{1}{1+u^2} + C
\end{aligned}$$

y deshaciendo el cambio

$$\int \frac{\tan^3 x}{1+\tan^2 x}\,dx = \frac{1}{2}\ln\left|1+\tan^2 x\right| + \frac{1}{2}\frac{1}{1+\tan^2 x} + C$$

f) Cambio

$$\arctan x = u \Rightarrow \frac{1}{1+x^2}dx = du$$

$$\int \frac{\arctan x + 3}{(2-\arctan x)\,(1+x^2)}\,dx = \int \frac{u+3}{(2-u)}du$$

Dividimos los polinomios

$$\int \frac{u+3}{2-u}du = \int \left(-1 - \frac{5}{u-2}\right) du = -u - 5\ln|u-2| + c$$

y deshaciendo el cambio

$$\int \frac{\arctan x + 3}{(2-\arctan x)\,(1+x^2)}\,dx = -\arctan x - 5\ln|\arctan x - 2| + c$$

3. Calcula las siguientes integrales por el método de integración por partes

(a) $\int x\cos(3x)\,dx$ (b) $\int x^2 \operatorname{sen}(5x)\,dx$ (c) $\int \operatorname{sen}(2x)e^{-x}\,dx$

(d) $\int \log x\,dx$ (e) $\int x^2 e^{-x}\,dx$

a) Por partes, tomando $u = x$ y $dv = \cos(3x)\,dx \Rightarrow du = dx$ y $v = \frac{\operatorname{sen}(3x)}{3}$

$$\int x\cos(3x)\,dx = \frac{1}{3}x\operatorname{sen}(3x) - \frac{1}{3}\int \operatorname{sen}(3x)\,dx = \frac{1}{3}x\operatorname{sen}(3x) + \frac{1}{9}\cos(3x) + C.$$

b) Por partes, tomando $u = x^2$ y $dv = \operatorname{sen}(5x)\,dx \Rightarrow du = 2xdx$ y $v = -\frac{\cos(5x)}{5}$

$$\int x^2\operatorname{sen}(5x)\,dx = -\frac{1}{5}x^2\cos(5x) + \frac{2}{5}\int x\cos(5x)\,dx.$$

Se vuelve a hacer integración por partes, tomando $u = x$ y $dv = \cos(5x)\,dx \Rightarrow du = dx$ y $v = \frac{\operatorname{sen}(5x)}{3}$

$$\int x\cos(5x)\,dx = \frac{1}{5}x\operatorname{sen}(5x) - \frac{1}{5}\int \operatorname{sen}(5x)\,dx = \frac{1}{5}x\operatorname{sen}(5x) + \frac{1}{25}\cos(5x),$$

de este modo

$$\begin{aligned}\int x^2\operatorname{sen}(5x)\,dx &= -\frac{1}{5}x^2\cos(5x) + \frac{2}{5}\left(\frac{1}{5}x\operatorname{sen}(5x) + \frac{1}{25}\cos(5x)\right) + C\\ &= -\frac{1}{5}x^2\cos(5x) + \frac{2}{25}x\operatorname{sen}(5x) + \frac{2}{125}\cos(5x) + C.\\ &= \frac{\left(2-25x^2\right)\cos(5x) + 10x\operatorname{sen}(5x)}{125} + C\end{aligned}$$

c) Por partes, tomando $u = e^{-x}$ y $dv = \operatorname{sen}(2x)\,dx$ y por tanto $du = -e^{-x}dx$ y $v = -\frac{\cos 2x}{2}$

$$\int \operatorname{sen}(2x)e^{-x}\,dx = -\frac{e^{-x}\cos(2x)}{2} - \frac{1}{2}\int e^{-x}\cos(2x)\,dx,$$

y volvemos a hacer integración por partes con la integral que nos queda, tomando en este caso $dv = \cos(2x)\,dx$ y $v = \frac{1}{2}\,\text{sen}\,(2x)$

$$\int e^{-x}\cos(2x)\,dx = \frac{e^{-x}}{2}\,\text{sen}\,(2x) + \frac{1}{2}\int e^{-x}\,\text{sen}\,(2x)\,dx,$$

de esta forma tendremos que si $I = \int \text{sen}(2x)e^{-x}\,dx$, entonces

$$I = -\frac{e^{-x}\cos(2x)}{2} - \frac{1}{2}\left(\frac{e^{-x}}{2}\,\text{sen}\,(2x) + \frac{1}{2}I\right),$$

de donde

$$\frac{5}{4}I = -\frac{e^{-x}\cos(2x)}{2} - \frac{e^{-x}\,\text{sen}\,(2x)}{4},$$

y podemos despejar la I

$$I = \frac{4}{5}\left(-\frac{e^{-x}\cos(2x)}{2} - \frac{e^{-x}\,\text{sen}\,(2x)}{4}\right) + C = \frac{1}{5}\left(-2e^{-x}\cos(2x) - e^{-x}\,\text{sen}\,(2x)\right) + C.$$

o

$$\int \text{sen}(2x)e^{-x}\,dx = -\frac{e^{-x}}{5}\left(2\cos(2x) + \text{sen}\,(2x)\right) + C.$$

d) Por partes con $u = \log x$ y $dv = dx$, por tanto $du = \frac{1}{x}$ y $v = x$

$$\int \log x\,dx = x\log x - \int x\frac{1}{x}dx = x\log x - \int dx = x\log x - x + C$$

e) Por partes con $u = x^2$ y $dv = e^{-x}$, de donde $du = 2xdx$ y $v = -e^{-x}$

$$\int x^2e^{-x}\,dx = -x^2e^{-x} + 2\int xe^{-x}dx$$

y aplicamos de nuevo partes a la integral resultante, tomando en este caso $u = x$, de donde $du = dx$, la v sería la misma

$$\int xe^{-x}dx = -xe^{-x} + \int e^{-x}dx = -xe^{-x} - e^{-x}$$

y la integral final sería

$$\int x^2e^{-x}\,dx = -x^2e^{-x} + 2\left(-xe^{-x} - e^{-x}\right) = -\left(x^2 + 2x + 2\right)e^{-x} + C$$

4. Calcula las siguientes integrales trigonométricas donde $a, b \in \mathbb{R}$:

(a) $\int \frac{1}{\text{sen}^2 x\cos x}\,dx$	(b) $\int \text{sen}\,(ax)\cos(bx)\ dx$	(c) $\int \text{sen}\,(ax)\,\text{sen}\,(bx)\ dx$
(d) $\int \cos(ax)\cos(bx)\ dx$	(e) $\int \cos^2(ax)\ dx$	(f) $\int \text{sen}^2(ax)\ dx$
(g) $\int \cos^5(x)\ dx$	(h) $\int \text{sen}^4(x)\ dx$	(i) $\int \frac{1}{5-3\cos x+4\,\text{sen}\,x}dx$
(j) $\int \frac{1-\text{sen}\,x}{1+\text{sen}\,x}\,dx$	(k) $\int \frac{1}{10+6\,\text{sen}\,x+8\cos x}dx$	(l) $\int \tan^3 x dx$
(m) $\int \frac{\tan x}{1+\text{sen}\,x}dx$	(n) $\int \text{sen}^4 x\cos^2 x dx$	(ñ) $\int \text{sen}^2 x\cos^2 x dx$

a)

$$\int \frac{1}{\text{sen}^2 x\cos x}\,dx$$

La función es impar en $\cos(x)$

$$R(\operatorname{sen} x, -\cos x) = \frac{1}{\operatorname{sen}^2 x(-\cos x)} = -\frac{1}{\operatorname{sen}^2 x \cos x} = -R(\operatorname{sen} x, \cos x)$$

por tanto hacemos el cambio

$$\operatorname{sen} x = t \Rightarrow \begin{cases} \cos x = \sqrt{1-\operatorname{sen}^2 x} = \sqrt{1-t^2} \\ \cos x dx = dt \Rightarrow dx = \frac{1}{\cos x} dx = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt \end{cases}$$

$$\int \frac{1}{\operatorname{sen}^2 x \cos x} dx = \int \frac{1}{t^2\sqrt{1-t^2}} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt = \int \frac{1}{t^2(1-t^2)} dt$$

Integral racional, descomponemos la función racional en fracciones simples

$$\frac{1}{t^2(1-t^2)} = \frac{A}{t} + \frac{B}{t^2} + \frac{C}{1-t} + \frac{D}{1+t} = \frac{At\left(1-t^2\right) + B\left(1-t^2\right) + Ct(1+t) + Dt(1-t)}{t^2(1-t^2)}$$

$$1 = At\left(1-t^2\right) + B\left(1-t^2\right) + Ct(1+t) + Dt(1-t)$$

Damos valores $0, 1$ y -1 a t

$$\begin{aligned} t &= 0 \Rightarrow 1 = B \\ t &= 1 \Rightarrow 1 = 2C \Rightarrow C = \frac{1}{2} \\ t &= -1 \Rightarrow 1 = -2D \Rightarrow D = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

Para obtener A le damos un valor cualquiera a t, por ejemplo 2 y sabiendo los valores B, C y D obtenemos

$$t = 2 \Rightarrow A = 0$$

por tanto

$$\frac{1}{t^2(1-t^2)} = \frac{1}{t^2} + \frac{1}{2}\frac{1}{1-t} - \frac{1}{2}\frac{1}{1+t}.$$

y la integral

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{t^2(1-t^2)} dt &= \int \left(\frac{1}{t^2} + \frac{1}{2}\frac{1}{1-t} - \frac{1}{2}\frac{1}{1+t}\right) dt = -\frac{1}{t} + \frac{1}{2}\ln|1-t| - \frac{1}{2}\ln|1+t| + C \\ &= -\frac{1}{t} + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1-t}{1+t}\right| \end{aligned}$$

y deshaciendo el cambio

$$-\frac{1}{\operatorname{sen} x} + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1-\operatorname{sen} x}{1+\operatorname{sen} x}\right|.$$

b) Para las integrales de los apartados b, c y d, se utilizarán las fórmulas trigonométricas que transforman productos en sumas.

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}(A)\cos(B) &= \frac{1}{2}\left(\operatorname{sen}(A-B) + \operatorname{sen}(A+B)\right), \\ \cos(A)\cos(B) &= \frac{1}{2}\left(\cos(A-B) + \cos(A+B)\right), \\ \operatorname{sen}(A)\operatorname{sen}(B) &= \frac{1}{2}\left(\cos(A-B) - \cos(A+B)\right). \end{aligned}$$

Supongamos que $a \neq b$

$$\int \operatorname{sen}(ax)\operatorname{sen}(bx)\ dx = \frac{1}{2}\int \left(\cos(a-b)x - \cos(a+b)x\right) dx = \frac{1}{2}\left[\frac{\operatorname{sen}(a-b)x}{(a-b)} - \frac{\operatorname{sen}(a+b)x}{(a+b)}\right] + C.$$

Si $a = b$, entonces

$$\int \operatorname{sen}(ax)\operatorname{sen}(ax)\ dx = \int \operatorname{sen}^2(ax)\ dx = \int \frac{1-\cos(2ax)}{2}dx = \frac{1}{2}x - \frac{\operatorname{sen}(2ax)}{4a}$$

c) Supongamos que $a \neq b$

$$\int \cos(ax)\cos(bx)\ dx = \frac{1}{2}\int (\cos(a-b)x + \cos(a+b)x)\,dx = \frac{1}{2}\left[\frac{\operatorname{sen}(a-b)x}{(a-b)} + \frac{\operatorname{sen}(a+b)x}{(a+b)}\right]+C.$$

Si $a = b$ entonces

$$\int \cos(ax)\cos(ax)\ dx = \int \cos^2(ax)\ dx = \int \frac{1+\cos(2ax)}{2}dx = \frac{1}{2}x + \frac{\operatorname{sen}(2ax)}{4a}$$

d) Supongamos que $a \neq b$

$$\int \operatorname{sen}(ax)\cos(bx)\ dx = \frac{1}{2}\int (\operatorname{sen}(a-b)x + \operatorname{sen}(a+b)x)\,dx = \frac{1}{2}\left[-\frac{\cos(a-b)x}{(a-b)} - \frac{\cos(a+b)x}{(a+b)}\right]+C.$$

Si $a = b$ entonces

$$\int \operatorname{sen}(ax)\cos(ax)\ dx = \frac{1}{2}\int 2\operatorname{sen}(ax)\cos(ax)\ dx = \frac{1}{2}\int \operatorname{sen}(2ax)\ dx = -\frac{1}{4a}\cos(2ax)$$

e) Usando la fórmula del ángulo doble para $\cos^2 x$

$$\int \cos^2(ax)\ dx = \int \frac{1+\cos(2ax)}{2}dx = \int \frac{1}{2}dx + \int \frac{\cos(2ax)}{2}dx = \frac{1}{2}x + \frac{\operatorname{sen}(2ax)}{4a}x + C.$$

f) Usando la fórmula del ángulo doble para $\operatorname{sen}^2 x$

$$\int \operatorname{sen}^2(ax)\ dx = \int \frac{1-\cos(2ax)}{2}dx = \int \frac{1}{2}dx - \int \frac{\cos(2ax)}{2}dx = \frac{1}{2}x - \frac{\operatorname{sen}(2ax)}{4a}x + C.$$

g) Potencia impar para la función $\cos x$

$$\begin{aligned}
\int \cos^5(x)\,dx &= \int \cos^4 x\cos x dx = \int \left(\cos^2 x\right)^2\cos x dx = \int \left(1-\operatorname{sen}^2 x\right)^2\cos x dx \\
&= \int \left(1+\operatorname{sen}^4 x - 2\operatorname{sen}^2 x\right)\cos x dx \\
&= \int \left(\cos x + \operatorname{sen}^4 x\cos x - 2\operatorname{sen}^2 x\cos x\right)dx \\
&= \operatorname{sen} x + \frac{\operatorname{sen}^5 x}{5} - \frac{2\operatorname{sen}^3 x}{3} + C
\end{aligned}$$

h)

$$\begin{aligned}
\int \operatorname{sen}^4(x)\,dx &= \int \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2 dx = \int \frac{1+\cos^2 2x - 2\cos 2x}{4}dx \\
&= \int \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\cos^2 2x - \frac{1}{2}\cos 2x\right)dx \\
&= \int \left(\frac{3}{8} + \frac{\cos 4x}{8} - \frac{\cos 2x}{2}\right)dx \\
&= \frac{3}{8}x + \frac{\operatorname{sen} 4x}{32} - \frac{\operatorname{sen} 2x}{4}
\end{aligned}$$

i)

$$\int \frac{1}{5-3\cos x+4\operatorname{sen} x}dx$$

Cambio general

$$t=\tan\frac{x}{2}\Rightarrow\begin{cases}\operatorname{sen} x=\frac{2t}{1+t^2}\\ \cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}\\ dt=\frac{2}{1+t^2}dt\end{cases}$$

por tanto

$$5-3\cos x+4\operatorname{sen} x=5-3\frac{1-t^2}{1+t^2}+4\frac{2t}{1+t^2}=2\frac{(2t+1)^2}{t^2+1}$$

y por tanto

$$\begin{aligned}\int\frac{1}{5-3\cos x+4\operatorname{sen} x}dx &= \int\frac{1+t^2}{2\left(2t+1\right)^2}\frac{2}{1+t^2}dt\\ &= \int\frac{1}{\left(2t+1\right)^2}dt=\frac{1}{2}\int 2\left(2t+1\right)^{-2}dt=-\frac{1}{2\left(2t+1\right)}\end{aligned}$$

y deshacemos el cambio

$$\int\frac{1}{5-3\cos x+4\operatorname{sen} x}dx=-\frac{1}{2\left(2\tan\frac{x}{2}+1\right)}$$

o como $\tan\frac{x}{2}=\frac{\operatorname{sen}\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}$ tendremos

$$\int\frac{1}{5-3\cos x+4\operatorname{sen} x}dx=-\frac{\cos\frac{x}{2}}{4\cos\frac{x}{2}+2\cos\frac{x}{2}}.$$

j)

$$\int\frac{1-\operatorname{sen} x}{1+\operatorname{sen} x}\,dx$$

Cambio de variable de tipo general

$$\int\frac{1-\frac{2t}{1+t^2}}{1+\frac{2t}{1+t^2}}\frac{2}{1+t^2}dt=\int\frac{2\left(t-1\right)^2}{\left(t^2+1\right)\left(t+1\right)^2}dx$$

Realizamos la descomposición en fracciones simples, tiene una raíz real doble (-1) y una compleja i:

$$\begin{aligned}\frac{2\left(t-1\right)^2}{\left(t^2+1\right)\left(t+1\right)^2} &= \frac{A}{t+1}+\frac{B}{\left(t+1\right)^2}+\frac{Ct+D}{t^2+1}\\ &= \frac{A\left(t+1\right)\left(t^2+1\right)+B\left(t^2+1\right)+\left(Ct+D\right)\left(t+1\right)^2}{\left(t+1\right)^2\left(t^2+1\right)}\\ &= \frac{\left(A+C\right)t^3+\left(A+B+2C+D\right)t^2+\left(A+C+2D\right)t+\left(A+B+D\right)}{\left(t+1\right)^2\left(t^2+1\right)}\end{aligned}$$

Igualando

$$2\left(t-1\right)^2=\left(A+C\right)t^3+\left(A+B+2C+D\right)t^2+\left(A+C+2D\right)t+\left(A+B+D\right)$$

es decir

$$2t^2-4t+2=\left(A+C\right)t^3+\left(A+B+2C+D\right)t^2+\left(A+C+2D\right)t+\left(A+B+D\right)$$

e identificando coeficiente

$$\begin{aligned} A+C &= 0 \\ A+B+2C+D &= 2 \\ A+C+2D &= -4 \\ A+B+D &= 2 \end{aligned}$$

que tiene por solución

$$A = C = 0; B = 4; D = -2$$

de modo que

$$\int \frac{2\left(t-1\right)^2}{\left(t^2+1\right)\left(t+1\right)^2}dt = \int \left(\frac{4}{\left(t+1\right)^2} - \frac{2}{t^2+1}\right)dt = -\frac{4}{\left(t+1\right)} - 2\arctan t$$

y deshaciendo el cambio $\arctan t = \frac{x}{2}$

$$\int \frac{1-\operatorname{sen} x}{1+\operatorname{sen} x}\,dx = -\frac{4}{\tan\frac{x}{2}+1} - x$$

k)

$$\int \frac{1}{10+6\operatorname{sen} x + 8\cos x}dx$$

Cambio general

$$t = \tan\frac{x}{2} \Rightarrow \begin{cases} \operatorname{sen} x = \frac{2t}{1+t^2} \\ \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \\ dt = \frac{2}{1+t^2}dt \end{cases}$$

por tanto

$$10+6\operatorname{sen} x+8\cos x = 10+6\frac{2t}{1+t^2}+8\frac{1-t^2}{1+t^2} = 2\frac{\left(t+3\right)^2}{t^2+1}$$

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{10+6\operatorname{sen} x+8\cos x}dx &= 2\int \frac{\left(t+3\right)^2}{t^2+1}dt = 2\int \left(1+\frac{6t+8}{t^2+1}\right)dt \\ &= 2\int \left(1+3\frac{2t}{t^2+1}+8\frac{1}{t^2+1}\right)dt \\ &= 2t+6\ln\left|t^2+1\right|+16\arctan t \end{aligned}$$

y deshacemos el cambio

$$\int \frac{1}{10+6\operatorname{sen} x+8\cos x}dx = 2\tan\left(\frac{x}{2}\right)+6\ln\left(1+\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)\right)+8x$$

l)

$$\int \tan^3 x dx$$

Cambio

$$t = \tan x \Rightarrow dt = \left(1+\tan^2 x\right)dx \Rightarrow dx = \frac{1}{1+\tan^2 x}dt = \frac{1}{1+t^2}dt$$

de forma que

$$\int \tan^3 x dx = \int \frac{t^3}{1+t^2}dt = \int \left(t - \frac{t}{1+t^2}\right)dt = \frac{t^2}{2} - \frac{1}{2}\ln\left(1+t^2\right)$$

y deshacemos el cambio

$$\int \tan^3 x dx = \frac{1}{2}\tan^2 x - \frac{1}{2}\ln\left(1+\tan^2 x\right)$$

m)

$$\int \frac{\tan x}{1+\operatorname{sen} x}dx = \int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x\,(1+\operatorname{sen} x)}dx$$

La función es simétrica en $\cos x$

$$R\left(-\cos x, \operatorname{sen} x\right) = \frac{\operatorname{sen} x}{-\cos x\,(1+\operatorname{sen} x)} = -R\left(\cos x, \operatorname{sen} x\right)$$

Hacemos el cambio

$$t = \operatorname{sen} x \Rightarrow \begin{cases} \operatorname{sen} x = t \\ \cos x = \sqrt{1-t^2} \\ dx = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}dt \end{cases}$$

$$\int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x\,(1+\operatorname{sen} x)}dx = \int \frac{t}{\sqrt{1-t^2}\,(1+t)}\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}dt = \int \frac{t}{(1+t)\,(1-t^2)}dt = \int \frac{1}{(t+1)^2\,(1-t)}dt$$

Que resolveremos descomponiendo en fracciones simples

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{(t+1)^2\,(1-t)}dt &= \int\left(\frac{1}{4}\frac{1}{1+t} + \frac{1}{2}\frac{1}{(1+t)^2} - \frac{1}{4}\frac{1}{t-1}\right)dt \\ &= \frac{1}{4}\ln\left(t+1\right) + \frac{1}{2}\arctan t - \frac{1}{4}\left(t-1\right)\end{aligned}$$

y deshaciendo el cambio

$$\int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x\,(1+\operatorname{sen} x)}dx = \frac{1}{4}\ln\left(1+\operatorname{sen} x\right) + \frac{1}{2}\arctan \operatorname{sen} x - \frac{1}{4}\left(\operatorname{sen} x - 1\right)$$

n)

$$\int \operatorname{sen}^4 x \cos^2 x dx$$

Vamos a cambiar el integrando haciendo el siguiente cambio:

$$\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}; \operatorname{sen}^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$$

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}^4 x \cos^2 x &= \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2\left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right) \\ &= \frac{1}{8}\left(1-\cos 2x-\cos^2 2x+\cos^3 2x\right)\end{aligned}$$

y volvemos a usar la fórmula del ángulo doble con $\cos^2 2x$

$$\begin{aligned}&\frac{1}{8}\left(1-\cos 2x-\cos^2 2x+\cos^3 2x\right) \\ =\ &\frac{1}{8}\left(1-\cos 2x-\frac{1+\cos 4x}{2}+\cos^3 2x\right) \\ =\ &\frac{1}{16}-\frac{1}{8}\cos 2x-\frac{1}{16}\cos 4x+\frac{1}{8}\cos^3 2x\end{aligned}$$

La pontencia impar la descomponemos como sigue

$$\cos^3 2x = \cos^2 2x \cos 2x = \left(1-\operatorname{sen}^2 2x\right)\cos 2x$$

y el integrando se transforma en

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen}^4 x\cos^2 x &= \frac{1}{16}-\frac{1}{8}\cos 2x-\frac{1}{16}\cos 4x+\frac{1}{8}\left(1-\operatorname{sen}^2 2x\right)\cos 2x \\
&= \frac{1}{16}-\frac{1}{8}\cos 2x-\frac{1}{16}\cos 4x+\frac{1}{8}\cos 2x-\frac{1}{8}\operatorname{sen}^2 2x\cos 2x \\
&= \frac{1}{16}-\frac{1}{16}\cos 4x-\frac{1}{8}\operatorname{sen}^2 2x\cos 2x
\end{aligned}$$

y podemos integrar término a término

$$\begin{aligned}
\int \operatorname{sen}^4 x\cos^2 x dx &= \frac{1}{16}\int dx-\frac{1}{16}\int \cos 4x dx-\frac{1}{8}\int \operatorname{sen}^2 2x\cos 2x dx \\
&= \frac{1}{16}x-\frac{1}{64}\operatorname{sen} 4x-\frac{1}{48}\operatorname{sen}^3 2x
\end{aligned}$$

$\tilde{n}$)

$$\int \operatorname{sen}^2 x\cos^2 x dx$$

Vamos a cambiar el integrando haciendo el siguiente cambio:

$$\cos^2 x=\frac{1+\cos 2x}{2};\operatorname{sen}^2 x=\frac{1-\cos 2x}{2}$$

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen}^2 x\cos^2 x &= \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)\left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right) \\
&= \frac{1}{4}\left(1-\cos^2 2x\right)
\end{aligned}$$

y volvemos a usar la fórmula del ángulo doble con $\cos^2 2x$

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{4}\left(1-\cos^2 2x\right) \\
&= \frac{1}{4}\left(1-\frac{1+\cos 4x}{2}\right) \\
&= \frac{1}{8}-\frac{1}{8}\cos 4x
\end{aligned}$$

y podemos integrar término a término

$$\begin{aligned}
\int \operatorname{sen}^2 x\cos^2 x dx &= \frac{1}{8}\int dx-\frac{1}{8}\int \cos 4x dx \\
&= \frac{1}{8}x-\frac{1}{32}\operatorname{sen} 4x
\end{aligned}$$

5. Calcula las siguientes integrales de funciones racionales:

(a) $\int \dfrac{1}{(x-2)(3-x)}dx$ (b) $\int \dfrac{5x+1}{x^3-3x+2}\,dx$ (c) $\int \dfrac{1}{x^2+2x+5}dx$

(d) $\int \frac{1}{4x^2+4x+3}\,dx$ (e) $\int \frac{x+1}{x^2+x-2}\,dx$ (f) $\int \dfrac{1}{x^2+10x+16}\,dx$

(g) $\int \dfrac{x+2}{(x-1)(x+3)}\,dx$ (h) $\int \dfrac{3x^2+2x+7}{x^2+1}\,dx$ (i) $\int \dfrac{2x^3+9x^2+4}{x^2(x^2+4)(x-1)}\,dx$

(j) $\int \dfrac{x}{x^2+4x+5}\,dx$ (k) $\int \dfrac{1}{x^2+4x+2}dx$ (l) $\int \frac{1}{4x^2-4x+4}\,dx$

(m) $\int \frac{1}{x^2+2x+4}\,dx$ (n) $\int \frac{x-3}{x^2+2x+2}\,dx$ (ñ) $\int \frac{x+1}{x^2-3x+5}\,dx$

(o) $\int \frac{33x^2-3x-6}{(9x^2-1)(2x+1)}\,dx$ (p) $\int \frac{x^5-3x^4-2x^3-7x^2+x-4}{x^3+3x^2-x-3}\,dx$ (q) $\int \frac{x^4+x^3-12x^2-25x-5}{x^3-7x-6}\,dx$

(r) $\int \frac{3x^3+2x^2+x-7}{x^4+x^3-3x^2-5x-2}\,dx$ (s) $\int \frac{4}{(x-1)^2(x^2+1)^2}dx$ (t) $\int \frac{1}{\left((2x+1)^2+1\right)^2}dx$

(u) $\int \frac{9}{(x^2+x+1)^2(x-1)^2}dx$ (v) $\int \frac{1}{(x^2+1)^3}dx$ (w) $\int \frac{1}{(x-1)(x^2+x+1)^2}dx$

a) Realizamos la descomposición en fracciones simples del integrando

$$\int \frac{1}{(x-2)(3-x)}dx = \int \frac{A}{x-2} + \frac{B}{3-x}dx = \int \frac{A}{x-2} - \frac{B}{x-3}dx = A\ln|x-2| - B\ln|x-3| + C.$$

Para calcular los valores de A y B

$$\frac{1}{(x-2)(3-x)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{3-x} = \frac{A\,(3-x) + B\,(x-2)}{(x-2)(3-x)}$$

de donde

$$1 = A\,(3-x) + B\,(x-2)$$

Dando a x los valores 2 y 3, obtenemos fácilmente que

$$B = 1 \text{ y } A = 1$$

luego

$$\int \frac{1}{(x-2)(3-x)}dx = \ln|x-2| - \ln|x-3| + C = \ln\left|\frac{x-2}{x-3}\right| + C$$

b) Factorizamos el denominador usando Ruffini y utilizamos fracciones simples

$$\frac{5x+1}{x^3-3x+2} = \frac{5x+1}{(x-1)^2\,(x+2)} = \frac{A}{(x-1)} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{(x+2)},$$

luego

$$\int \frac{5x+1}{x^3-3x+2}\,dx = \int \left(\frac{A}{(x-1)} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{(x+2)}\right)dx = A\ln|x-1| - B\frac{1}{x-1} + C\ln|x-2| + D.$$

Para calcular los valores de A, B y C

$$\frac{5x+1}{(x-1)^2\,(x+2)} = \frac{A}{(x-1)} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{(x+2)} = \frac{A\,(x-1)\,(x+2) + B\,(x+2) + C\,(x-1)^2}{(x-1)^2\,(x+2)}$$

de donde

$$5x+1=A(x-1)(x+2)+B(x+2)+C(x-1)^2$$

Dando a x los valores 1 y -2, obtenemos fácilmente que

$$\begin{aligned} x &= 1 \Rightarrow 6=3B \Rightarrow B=2 \\ x &= -2 \Rightarrow -9=9C \Rightarrow C=-1 \end{aligned}$$

para obtener el parámetro que falta, tomemos por ejemplo $x=0$

$$1=-2A+2B+C \Rightarrow 2A=2B+C-1=4-1-1=2 \Rightarrow A=1$$

luego

$$\begin{aligned} \int \frac{5x+1}{x^3-3x+2}\,dx &= \int \left(\frac{!}{(x-1)} + \frac{2}{(x-1)^2} - \frac{1}{(x+2)} \right) dx = \ln|x-1| - 2\frac{1}{x-1} - \ln|x+2| + D \\ &= \ln \frac{x-1}{x+2} - \frac{2}{x-1} + D. \end{aligned}$$

c) El denominador tiene raíces complejas

$$x^2+2x+5=0 \Leftrightarrow x=\frac{-2\pm\sqrt{4-20}}{2}=\frac{-2\pm\sqrt{-16}}{2}=\frac{-2\pm 4i}{2}=-1\pm 2i,$$

luego se puede expresar como $(x-\operatorname{Re}(x_0))^2+\operatorname{Im}(x_0)^2$

$$x^2+2x+5=(x+1)^2+4,$$

y la integral se puede expresar como

$$\int \frac{dx}{x^2+2x+5} = \int \frac{1}{4+(x+1)^2}dx,$$

que es inmediata del tipo $f'(x)\arctan f(x)$

$$\int \frac{1}{4+(x+1)^2}dx = \frac{1}{4}\int \frac{1}{1+\frac{(x+1)^2}{4}}dx = \frac{1}{4}\int \frac{1}{1+\left(\frac{x+1}{2}\right)^2}dx = \frac{1}{2}\int \frac{\frac{1}{2}}{1+\left(\frac{x+1}{2}\right)^2}dx = \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{x+1}{2}\right)+C.$$

d) Calculamos las raíces del denominador

$$4x^2+4x+3=0 \Leftrightarrow x=\frac{-4\pm\sqrt{16-48}}{8}=\frac{-4\pm\sqrt{-32}}{8}=\frac{-4\pm 4\sqrt{2}i}{8} \Leftrightarrow \begin{cases} r_1=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i \\ r_2=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i \end{cases}$$

son complejas, así que expresamos la ecuación como

$$4x^2+4x+3=4\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+2$$

y la integral se puede expresar como

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{4x^2+4x+3}\,dx &= \int \frac{1}{2+4\left(x+\frac{1}{2}\right)^2}dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{1+2\left(x+\frac{1}{2}\right)^2}dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{1+\left(\sqrt{2}x+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}dx \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2}}\int \frac{\sqrt{2}}{1+\left(\sqrt{2}x+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}dx = \frac{1}{2\sqrt{2}}\arctan\left(\sqrt{2}x+\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \end{aligned}$$

e) Calculamos las raíces del denominador

$$x^2 + x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{-1 \pm 3}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} r_1 = 1 \\ \\ r_2 = -2 \end{cases}$$

y el denominador se factoriza como

$$x^2 + x - 2 = (x-1)(x+2)$$

Realizamos la descomposición en fracciones simples del integrando

$$\int \frac{x+1}{(x-1)(x+2)} dx = \int \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2} dx = A \ln|x-1| + B \ln|x+2| + C.$$

Para calcular los valores de A y B

$$\frac{x+1}{(x-1)(x+2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2} = \frac{A(x+2) + B(x-1)}{(x-1)(x+2)}$$

de donde

$$x + 1 = A(x+2) + B(x-1)$$

Dando a x los valores 1 y -2, obtenemos fácilmente que

$$A = \frac{2}{3} \text{ y } B = \frac{1}{3}$$

luego

$$\int \frac{x+1}{(x-1)(x+2)} dx = \frac{2}{3} \ln|x-1| + \frac{1}{3} B \ln|x+2| + C.$$

f) El denominador se puede descomponer como

$$x^2 + 10x + 16 = (x+8)(x+2),$$

luego la integral se puede expresar como

$$\int \frac{1}{x^2 + 10x + 16} \, dx = \int \frac{1}{(x+8)(x+2)} \, dx,$$

y se resuelve por descomposición en fracciones simples

$$\int \frac{1}{(x+8)(x+2)} \, dx = \int \frac{A}{x+8} + \frac{B}{x+2} dx = A \ln|x+8| + B \ln|x+2| + C.$$

Para calcular los valores de A y B

$$\frac{1}{(x+8)(x+2)} = \frac{A}{x+8} + \frac{B}{x+2} = \frac{A(x+2) + B(x+8)}{(x+8)(x+2)},$$

de donde

$$1 = A(x+2) + B(x+8).$$

Dando a x los valores -2 y -8, obtenemos fácilmente que

$$\begin{aligned} 1 &= 6B \Rightarrow B = \frac{1}{6}, \\ 1 &= -6A \Rightarrow A = -\frac{1}{6}, \end{aligned}$$

luego

$$\int \frac{1}{(x+8)(x+2)} \, dx = -\frac{1}{6} \ln|x+8| + \frac{1}{6} \ln|x+2| + C = \frac{1}{6} \ln\left|\frac{x+2}{x+8}\right| + C.$$

g) Realizamos la descomposición en fracciones simples del integrando

$$\int \frac{x+2}{(x-1)(x+3)}\,dx = \int \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+3} dx = A\ln|x-1| + B\ln|x+3| + C.$$

Para calcular los valores de A y B

$$\frac{x+2}{(x-1)(x+3)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+3} = \frac{A\,(x+3) + B\,(x-1)}{(x-1)(x+3)},$$

de donde

$$x+2 = A\,(x+3) + B\,(x-1)\,.$$

Dando a x los valores 1 y -3, obtenemos fácilmente que

$$\begin{aligned} 3 &= 4A \Rightarrow A = \frac{3}{4}, \\ -1 &= -4B \Rightarrow B = \frac{1}{4}, \end{aligned}$$

luego

$$\int \frac{x+2}{(x-1)(x+3)}\,dx = \frac{3}{4}\ln|x-1| + \frac{1}{4}\ln|x+3| + C = \frac{1}{4}\ln\,(x-1)^3\,(x+3) + C.$$

h) Como el grado del numerador y denominador coinciden, en primer lugar hay que hacer una división polinomial y expresar el integrando como

$$\frac{3x^2+2x+7}{x^2+1} = 3 + \frac{2x+4}{x^2+1},$$

la integral se transforma en

$$\int \frac{3x^2+2x+7}{x^2+1}\,dx = \int \left(3 + \frac{2x+4}{x^2+1}\right) dx,$$

que puede descomponerse en tres integrales que son inmediatas

$$\int \left(3 + \frac{2x+4}{x^2+1}\right) dx = \int 3dx + \int \frac{2x}{1+x^2}dx + 4\int \frac{1}{1+x^2}dx = 3x + \ln\left(1+x^2\right) + 4\arctan x + C.$$

i) Descomponemos el integrando en fracciones simples, teniendo en cuenta que una es doble ($x=0$) y dos de ellas son complejas conjugadas ($x = \pm 2i$)

$$\frac{2x^3+9x^2+4}{x^2(x^2+4)(x-1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{Cx+D}{x^2+4} + \frac{E}{x-1},$$

sumando las fracciones de la derecha obtenemos

$$\frac{Ax\left(x^2+4\right)(x-1) + B\left(x^2+4\right)(x-1) + (Cx+D)\,x^2\,(x-1) + Ex^2\left(x^2+4\right)}{x^2(x^2+4)(x-1)},$$

igualando numeradores

$$\begin{aligned} 2x^3+9x^2+4 &= Ax\left(x^2+1\right)(x-1) + B\left(x^2+1\right)(x-1) + (Cx+D)\,x^2\,(x-1) + Ex^2\left(x^2+1\right), \\ &= x^4\,(A+C+E) + x^3\,(-A+B-C+D) + x^2\,(4A-B-D+4E) + 4x\,(B-A) - 4B. \end{aligned}$$

E identificando coeficientes

$$\begin{aligned} A+C+E &= 0 \\ -A+B-C+D &= 2 \\ 4A-B-D+4E &= 9 \\ 4B-4A &= 0 \\ -4B &= 4 \end{aligned}$$

Sistema cuya solución es

$$A=-1;\ B=-1;\ C=-2;\ D=0;\quad E=3,$$

sustituyendo en la integral

$$\begin{aligned} \int \frac{2x^3+9x^2+4}{x^2(x^2+4)(x-1)}\,dx &= \int \left(-\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}-\frac{2x}{x^2+1}+\frac{3}{x-1}\right)dx \\ &= -\int \frac{1}{x}dx - \int \frac{1}{x^2}dx - \int \frac{2x}{x^2+4} + 3\int \frac{1}{x-1}dx \\ &= -\ln|x| + \frac{1}{x} - \ln\left|x^2+4\right| + 3\ln|x-1| + C \\ &= \ln\frac{(x-1)^3}{x\left(x^2+4\right)} + \frac{1}{x} + C \end{aligned}$$

j) Las raíces del denominador son complejas

$$x^2+4x+5 = \frac{-4\pm\sqrt{16-20}}{2} = \frac{-4\pm\sqrt{-4}}{2} = \frac{-4\pm 2i}{2} = -2\pm i,$$

y podemos expresar el polinomio como

$$x^2+4x+5 = (x+2)^2+1,$$

mientras que la integral se puede expresar como

$$\int \frac{x}{x^2+4x+5}\,dx = \int \frac{x}{1+(x+2)^2}dx.$$

integral que es casi inmediata realizando los cambios oportunos

$$\int \frac{x}{1+(x+2)^2}dx = \frac{1}{2}\int\left(\frac{2(x+2)}{1+(x+2)^2} - \frac{4}{1+(x+2)^2}\right)dx = \frac{1}{2}\ln\left|1+(x+2)^2\right| - 2\arctan(x+2) + C$$

k) Podemos descomponer el denominador

$$x^2+4x+2 = \frac{-4\pm\sqrt{16-8}}{2} = \frac{-4\pm\sqrt{8}}{2} = \frac{-4\pm2\sqrt{2}}{2} = -2\pm\sqrt{2},$$

luego se puede expresar como

$$x^2+4x+2 = (x-\alpha)(x-\beta),$$

donde $\alpha=-2+\sqrt{2}$ o $\beta=-2-\sqrt{2}$ y la integral se puede expresar como

$$\int \frac{1}{x^2+4x+2}dx = \int \frac{1}{(x-\alpha)(x-\beta)}dx,$$

que podemos expresar como

$$\int \frac{1}{x^2+4x+2}dx = \int \left(\frac{A}{x-\alpha} + \frac{B}{x-\beta}\right) dx = A\ln|x-\alpha| + B\ln|x-\beta| + C.$$

Para calcular los valores de A y B

$$\frac{1}{x^2+4x+2} = \frac{A}{x-\alpha} + \frac{B}{x-\beta} = \frac{A(x-\beta)+B(x-\alpha)}{(x-\alpha)(x-\beta)},$$

de donde

$$1 = A(x-\beta) + B(x-\alpha)$$

Dando a x los valores α y β, obtenemos fácilmente que

$$\begin{aligned} 1 &= A(\alpha-\beta) \Rightarrow A = \frac{1}{\alpha-\beta}, \\ 1 &= B(\beta-\alpha) \Rightarrow B = \frac{1}{\beta-\alpha}, \end{aligned}$$

luego

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{x^2+4x+2}dx &= \frac{1}{\alpha-\beta}\ln|x-\alpha| + \frac{1}{\beta-\alpha}\ln|x-\beta| + C \\ &= \frac{1}{\alpha-\beta}\ln|x-\alpha| - \frac{1}{\alpha-\beta}\ln|x-\beta| + C \\ &= \frac{1}{\alpha-\beta}\ln\left|\frac{x-\alpha}{x-\beta}\right| + C \end{aligned}$$

y sustituyendo los valores de α y β

$$\alpha - \beta = \left(-2+\sqrt{2}\right) - \left(-2-\sqrt{2}\right) = 2\sqrt{2}$$

$$\int \frac{1}{x^2+4x+2}dx = \frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{x+2-\sqrt{2}}{x+2+\sqrt{2}}\right| + C$$

l)

$$4x^2-4x+4$$

6. Calcula las siguientes integrales de funciones irracionales algebráicas:

(a) $\int \frac{\sqrt{x^3}}{x-1}\,dx$ (b) $\int \frac{\sqrt[3]{x^2}+1}{\sqrt[3]{x}-1}\,dx$ (c) $\int \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x^3}-1}\,dx$

(d) $\int \frac{\sqrt[5]{x}}{\sqrt[5]{x}+1}\,dx$ (e) $\int \frac{x+\sqrt{(x+1)^3}}{(x-1)\sqrt{x+1}}dx$ (f) $\int \frac{\sqrt[3]{x-1}-1}{\sqrt[3]{(x-1)^2}+1}dx$

(g) $\int x\sqrt{\frac{x+2}{x-2}}dx$ (h) $\int \frac{\sqrt{(x-2)^3}-\sqrt{(x-2)^5}}{\sqrt{(x-2)}+3}dx$ (i) $\int \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\frac{1}{x}dx$

Solución:

a) Cambio

$$x = t^2 \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{x} = t \\ \sqrt{x^3} = t^3 \\ dx = 2tdt \end{cases}$$

$$\int \frac{\sqrt{x^3}}{x-1}dx = \int \frac{t^3}{t^2-1}2tdt = 2\int \frac{t^4}{t^2-1}dt$$

Función racional que resolvemos por descomposición en fracciones simples, previa división de los polinomios ya que el grado del numerador es mayo que el grado del denominador

$$\int \frac{t^4}{t^2-1}dt = \int \left(\left(t^2+1\right) + \frac{1}{t^2-1}\right)dt = \frac{t^3}{3} + t + \int \frac{1}{t^2-1}dt$$

la integral

$$\int \frac{1}{t^2-1}dt = \int \frac{A}{t-1} + \frac{B}{t+1}dt = A\ln(t-1) + B\ln(t+1)$$

Cálculo de A y B

$$\frac{1}{t^2-1} = \frac{A}{t-1} + \frac{B}{t+1} = \frac{A(t+1)+B(t-1)}{(t^2-1)} = \frac{(A+B)t+(A-B)}{t^2-1}$$

Por tanto

$$\left.\begin{array}{l} A+B=0 \\ \\ A-B=1 \end{array}\right\} \Rightarrow A = \frac{1}{2} \text{ y } B = -\frac{1}{2}$$

La integral será

$$\int \frac{1}{t^2-1}dt = \frac{1}{2}\ln(t-1) - \frac{1}{2}B\ln(t+1) = \frac{1}{2}\ln\frac{t-1}{t+1}$$

es decir

$$\int \frac{\sqrt{x^3}}{x-1}dx = \ln\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}$$

b) Cambio

$$x = t^3 \Rightarrow \left\{\begin{array}{c} \sqrt[3]{x} = t \\ \sqrt[3]{x^2} = \left(\sqrt[3]{x}\right)^2 = t^2 \\ dx = 3t^2dt \end{array}\right.$$

$$\int \frac{\sqrt[3]{x^2}+1}{\sqrt[3]{x}-1}\,dx = \int \frac{t^2+1}{t-1}3t^2dt = 3\int \frac{t^4+t^2}{t-1}dt$$

Realizamos la división de los polinomios ya que el grado del numerador es mayor que el grado del denominador

$$\int \frac{t^4+t^2}{t-1}dt = \int t^3+t^2+2t+2+\frac{2}{t-1}dt = \frac{t^4}{4} + \frac{t^3}{3} + t^2 + 2t + 2\ln(t-1)$$

Y deshaciendo el cambio la integral es

$$\int \frac{\sqrt[3]{x^2}+1}{\sqrt[3]{x}-1}\,dx = \frac{3\sqrt[3]{x^4}}{4} + x + 3\sqrt[3]{x^2} + 6\sqrt[3]{x} + 6\ln\left(\sqrt[3]{x}-1\right).$$

c) Cambio

$$x = t^2 \Rightarrow \left\{\begin{array}{c} \sqrt{x} = t \\ \sqrt{x^3} = \left(\sqrt{x}\right)^3 = t^3 \\ dx = 2tdt \end{array}\right.$$

$$\int \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x^3}-1}\,dx = \int \frac{t+1}{t^3-1}2t\;dt = 2\int \frac{t^2+t}{t^3-1}dt$$

Realizamos la descomposición en fracciones simples, hay una raíz real y una compleja (junto con su conjugado)

$$\left(t^3-1\right) = (t-1)\left(t^2+t+1\right) = (t-1)\left(\left(t+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}\right)$$

la descomposición será

$$\frac{t^2+t}{t^3-1}=\frac{A}{t-1}+\frac{Bt+C}{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}=\frac{A\left(t^2+t+1\right)+(Bt+C)(t-1)}{(t-1)(t^2+t+1)}$$

es decir

$$\frac{t^2+t}{t^3-1}=\frac{t^2(A+B)+t(A-B)+(A-C)}{(t-1)(t^2+t+1)}$$

es decir

$$\left\{\begin{array}{c} A+B=1 \\ A-B+C=1 \\ A-C=0 \end{array}\right. \Rightarrow A=\frac{2}{3};B=\frac{1}{3};C=\frac{2}{3}$$

por tanto

$$\int\frac{t^2+t}{t^3-1}dt=\int\frac{2}{3}\frac{1}{t-1}+\frac{1}{3}\frac{t+2}{t^2+t+1}dt=\frac{2}{3}\int\frac{dt}{t-1}+\frac{1}{3}\int\frac{t+2}{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}dt$$

Transformamos la integral que queda

$$\begin{aligned}\frac{t+2}{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}} &= \frac{1}{2}\frac{2t+4}{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}} \\ &= \frac{1}{2}\frac{2t+1}{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}+\frac{3}{2}\frac{1}{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}} \\ &= \frac{1}{2}\frac{2t+1}{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}+\frac{3}{\sqrt{3}}\frac{\frac{2}{\sqrt{3}}}{1+\left(\frac{2t+1}{\sqrt{3}}\right)^2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int\frac{\sqrt[3]{x^2}+1}{\sqrt[3]{x}-1}\,dx &= 2\left(\frac{2}{3}\int\frac{dt}{t-1}+\frac{1}{3}\int\left(\frac{1}{2}\frac{2t+1}{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}+\frac{3}{\sqrt{3}}\frac{\frac{2}{\sqrt{3}}}{1+\left(\frac{2t+1}{\sqrt{3}}\right)^2}\right)dt\right) \\ &= \frac{4}{3}\int\frac{dt}{t-1}+\frac{1}{3}\int\frac{2t+1}{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}dt+\frac{2}{\sqrt{3}}\int\frac{\frac{2}{\sqrt{3}}}{1+\left(\frac{2t+1}{\sqrt{3}}\right)^2}dt \\ &= \frac{4}{3}\ln(t-1)+\frac{1}{3}\ln\left(\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\right)+\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2t+1}{\sqrt{3}}\right).\end{aligned}$$

y deshaciendo el cambio $t=\sqrt{x}$

$$\begin{aligned}\int\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x^3}-1}\,dx &= \frac{4}{3}\ln\left(\sqrt{x}-1\right)+\frac{1}{3}\ln\left(\left(\sqrt{x}+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\right)+\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2\sqrt{x}+1}{\sqrt{3}}\right) \\ &= \frac{4}{3}\ln\left(\sqrt{x}-1\right)+\frac{1}{3}\ln\left(x+\sqrt{x}+1\right)+\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2\sqrt{x}+1}{\sqrt{3}}\right)\end{aligned}$$

d) Cambio

$$x=t^5\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}\sqrt[5]{x}=t \\ \\ dx=5t^4dt\end{array}\right.$$

$$\int\frac{\sqrt[5]{x}}{\sqrt[5]{x}+1}\,dx=\int\frac{t}{t+1}5t^4dt=5\int\frac{t^5}{t+1}dt$$

Hacemos la división polinomial

$$\frac{t^5}{t+1} = t^4 - t^3 + t^2 - t + 1 - \frac{1}{t+1}$$

por tanto

$$5\int \frac{t^5}{t+1}dt = 5\int \left(t^4 - t^3 + t^2 - t + 1 - \frac{1}{t+1}\right) dt = 5\left(\frac{t^5}{5} - \frac{t^4}{4} + \frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2} + t - \ln(t+1)\right)$$

y deshaciendo el cambiod

$$\int \frac{\sqrt[5]{x}}{\sqrt[5]{x}+1}\,dx = \left(x - \frac{5}{4}\sqrt[5]{x}^4 + \frac{5}{3}\sqrt[5]{x^3} - \frac{5}{2}\sqrt[5]{x^2} + 5\sqrt[5]{x} - 5\ln\left(\sqrt[5]{x}+1\right)\right)$$

e) Cambio

$$x+1 = t^2 \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{(x+1)^3} = t^3 \\ \sqrt{(x+1)} = t \\ dx = 2tdt \\ x = t^2 - 1 \end{cases}$$

$$\int \frac{x+\sqrt{(x+1)^3}}{(x-1)\sqrt{x+1}} = \int \frac{\left(t^2-1\right)+t^3}{\left(t^2-2\right)t}2tdt = 2\int \frac{\left(t^2-1\right)+t^3}{t^2-2}dt$$

Hacemos la división polinomial

$$\frac{t^3+t^2-1}{t^2-2} = t+1+\frac{2t+1}{t^2-2}$$

por tanto

$$2\int \frac{\left(t^2-1\right)+t^3}{t^2-2}dt = 2\int \left(t+1+\frac{2t+1}{t^2-2}\right)dt = t^2+t+2\int \frac{2t+1}{t^2-2}$$

La integral que queda se hace por descomposición en fracciones simples

$$\frac{2t+1}{t^2-2} = \frac{A}{t+\sqrt{2}} + \frac{B}{t-\sqrt{2}} = \frac{A\left(t-\sqrt{2}\right)+B\left(t+\sqrt{2}\right)}{t^2-2} = \frac{(A+B)\,t+\sqrt{2}\,(B-A)}{t^2-2}$$

e igualando

$$\left.\begin{array}{c} A+B=1 \\ \\ (B-A)\sqrt{2}=1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{c} A+B=1 \\ \\ B-A=\frac{1}{\sqrt{2}} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{c} A=\frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}} \\ \\ B=\frac{\sqrt{2}+1}{2\sqrt{2}} \end{array}\right\}$$

de esta forma

$$\begin{aligned} t^2+t+2\int \frac{2t+1}{t^2-2}dt &= t^2+t+2\int \left(\frac{\frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}}}{t+\sqrt{2}} + \frac{\frac{\sqrt{2}+1}{2\sqrt{2}}}{t-\sqrt{2}}\right)dt \\ &= t^2+t+\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}\ln\left(t+\sqrt{2}\right)+\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}}\ln\left(t-\sqrt{2}\right) \\ &= t^2+t+\ln\left(t+\sqrt{2}\right)\left(t-\sqrt{2}\right)+\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left(\frac{t-\sqrt{2}}{t+\sqrt{2}}\right) \\ &= t^2+t+\ln\left(t^2-2\right)+\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left(\frac{t-\sqrt{2}}{t+\sqrt{2}}\right) \end{aligned}$$

y deshaciendo el cambio $t=\sqrt{x+1}$

$$\int \frac{x+\sqrt{(x+1)^3}}{(x-1)\sqrt{x+1}}dx = (x+1)+\sqrt{x+1}+\ln(x-1)+\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{2}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{2}}.$$

f) Cambio

$$x-1=t^3 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} \sqrt[3]{(x-1)}=t \\ \sqrt[3]{(x-1)^2}=t^2 \\ dx=3t^2dt \\ x=t^3+1 \end{array} \right.$$

$$\int \frac{\sqrt[3]{x-1}-1}{\sqrt[3]{(x-1)^2}+1}dx=\int \frac{t-1}{t^2+1}3t^2dt=3\int \frac{t^3-t^2}{t^2+1}dt$$

Hacemos la división polinomial

$$\frac{t^3-t^2}{t^2+1}=t-1+\frac{1-t}{t^2+1}$$

por tanto

$$3\int \frac{t^3-t^2}{t^2+1}dt=3\int \left(t-1+\frac{1-t}{t^2+1}\right)dt=\frac{3t^2}{2}-3t+3\int \frac{1-t}{t^2+1}$$

La integral que queda es inmediata con los siguientes cambios

$$\int \frac{1-t}{t^2+1}=-\frac{1}{2}\int \frac{2t}{t^2+1}+\int \frac{1}{1+t^2}dt=-\frac{1}{2}\ln\left(1+t^2\right)+\arctan t$$

por tanto

$$3\int \frac{t^3-t^2}{t^2+1}dt=\frac{3t^2}{2}-3t-\frac{3}{2}\ln\left(1+t^2\right)+3\arctan t$$

y deshaciendo el cambio

$$\int \frac{\sqrt[3]{x-1}-1}{\sqrt[3]{(x-1)^2}+1}dx=\frac{3\sqrt[3]{(x-1)^2}}{2}-3\sqrt[3]{(x-1)}-\frac{3}{2}\ln\left(1+\sqrt[3]{(x-1)^2}\right)+3\arctan\sqrt[3]{(x-1)}$$

g) Cambio

$$\frac{x+2}{x-2}=t^2 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} \sqrt{\frac{x+2}{x-2}}=t \\ x=\frac{2t^2+2}{t^2-1} \\ dx=-\frac{8t}{(t^2-1)^2}dt \end{array} \right.$$

$$\int x\sqrt{\frac{x+2}{x-2}}dx=\int \left(\frac{2t^2+2}{t^2-1}\right)t\left(-\frac{8t}{(t^2-1)^2}\right)dt=-16\int \frac{t^4+t^2}{(t^2-1)^3}dt$$

Descomponemos en fracciones simples

$$\frac{t^4+t^2}{(t^2-1)^3}=\frac{A}{t-1}+\frac{B}{(t-1)^2}+\frac{C}{(t-1)^3}+\frac{D}{t+1}+\frac{E}{(t+1)^2}+\frac{F}{(t+1)^3}$$

el numerador de la fracción de la derecha es

$$A(t-1)^2(t+1)^3+B(t-1)(t+1)^3+C(t+1)^3+D(t+1)^2(t-1)^3+E(t+1)(t-1)^3+F(t-1)^3$$

o si lo ordenamos por potencias

$$\begin{array}{l} t^5(A+D)+ \\ t^4(A+B-D+E)+ \\ t^3(2B-2A+C+F-2D-2E)+ \\ t^2(3C-2A-3F+2D)+ \\ t(A-2B+3C+3F+D+2E)+ \\ A-B+C-F-D-E \end{array}$$

e igualando a los coeficientes del numerador del miembro de la izquierda

$$\left\{\begin{array}{c} A+D=0 \\ A+B-D+E=1 \\ 2B-2A+C+F-2D-2E=0 \\ 3C-2A-3F+2D=1 \\ A-2B+3C+3F+D+2E=0 \\ A-B+C-F-D-E=0 \end{array}\right.$$

que tiene por solución

$$A=\frac{1}{8}; B=\frac{3}{8}; C=\frac{1}{4}, D=-\frac{1}{8}; E=\frac{3}{8}; F=-\frac{1}{4}$$

por tanto

$$\begin{aligned} -16\int \frac{t^4+t^2}{\left(t^2-1\right)^3}dt &= -16\int \left(\frac{A}{t-1}+\frac{B}{\left(t-1\right)^2}+\frac{C}{\left(t-1\right)^3}+\frac{D}{t+1}+\frac{E}{\left(t+1\right)^2}+\frac{F}{\left(t+1\right)^3}\right)dt = \\ &= -16\left(A\ln\left(t-1\right)-\frac{B}{\left(t-1\right)}-\frac{C}{2\left(t-1\right)^2}+D\ln\left(t+1\right)-\frac{E}{\left(t+1\right)}-\frac{F}{2\left(t+1\right)^2}\right) \\ &= -16\left(\frac{1}{8}\ln\left(t-1\right)-\frac{3}{8\left(t-1\right)}-\frac{1}{8\left(t-1\right)^2}-\frac{1}{8}\ln\left(t+1\right)-\frac{3}{8\left(t+1\right)}+\frac{1}{8\left(t+1\right)^2}\right) \\ &= -2\ln\left(t-1\right)+\frac{6}{\left(t-1\right)}+\frac{2}{\left(t-1\right)^2}+2\ln\left(t+1\right)+\frac{6}{\left(t+1\right)}-\frac{2}{\left(t+1\right)^2} \\ &= 2\ln\frac{t+1}{t-1}+\frac{12t^3-4t}{\left(t^2-1\right)^4} \end{aligned}$$

donde en el último paso hemos sumado todas las fracciones. Si ahora deshacemos el cambio:

$$\int x\sqrt{\frac{x+2}{x-2}}dx = 2\ln\frac{\sqrt{\frac{x+2}{x-2}}+1}{\sqrt{\frac{x+2}{x-2}}-1}+\frac{12\sqrt{\left(\frac{x+2}{x-2}\right)^3}-4\sqrt{\frac{x+2}{x-2}}}{\left(\sqrt{\left(\frac{x+2}{x-2}\right)^2}-1\right)^4}$$

h) Cambio

$$x-2=t^2 \Rightarrow \left\{\begin{array}{c} \sqrt{(x-2)}=t \\ \sqrt{\left(x-2\right)^3}=t^3 \\ \sqrt{\left(x-2\right)^5}=t^5 \\ dx=2tdt \\ x=t^2+2 \end{array}\right.$$

$$\int \frac{\sqrt{\left(x-2\right)^3}-\sqrt{\left(x-2\right)^5}}{\sqrt{(x-2)}+3}dx = \int \frac{t^3-t^5}{t+3}2tdt = 2\int \frac{t^4-t^6}{t+3}dt$$

Hacemos la división polinomial

$$\frac{t^4-t^6}{t+3} = -t^5+3t^4-8t^3+24t^2-72t+216-\frac{648}{t+3}$$

por tanto

$$\begin{aligned}
2\int \frac{t^4-t^6}{t+3}dt &= 2\int\left(-t^5+3t^4-8t^3+24t^2-72t+216-\frac{648}{t+3}\right)dt \\
&= 2\left(-\frac{t^6}{6}+\frac{3t^5}{5}-2t^4+8t^3-36t^2+216t-648\ln(t+3)\right) \\
&= -\frac{1}{3}t^6+\frac{6}{5}t^5-4t^4+16t^3-72t^2+432t-1296\ln(t+3)
\end{aligned}$$

y deshaciendo el cambio

$$\begin{aligned}
\int \frac{\sqrt{(x-2)^3}-\sqrt{(x-2)^5}}{\sqrt{(x-2)}+3}dx &= -\frac{1}{3}\sqrt{(x-2)^6}+\frac{6}{5}\sqrt{(x-2)^5}-4\sqrt{(x-2)^4}+16\sqrt{(x-2)^3} \\
&\quad -72\sqrt{(x-2)^2}+432\sqrt{(x-2)}-1296\ln\left(\sqrt{(x-2)}+3\right) \\
&= -\frac{1}{3}(x-2)^3+\frac{6}{5}\sqrt{(x-2)^5}-4(x-2)^2+16\sqrt{(x-2)^3} \\
&\quad -72(x-2)+432\sqrt{(x-2)}-1296\ln\left(\sqrt{(x-2)}+3\right) \\
&= -\frac{1}{3}x^3-2x^2-60x+\frac{392}{3} \\
&\quad +\left(\frac{6}{5}x^2+\frac{56}{5}x+\frac{2024}{5}\right)\sqrt{x-2} \\
&\quad -1296\ln\left(\sqrt{(x-2)}+3\right)
\end{aligned}$$

$$\frac{6}{5}(x-2)^2\sqrt{(x-2)}+16(x-2)\sqrt{(x-2)}+432\sqrt{(x-2)}$$

$$\frac{6}{5}(x-2)^2+16(x-2)+432$$

i) Cambio

$$\frac{x-1}{x+1}=t^2 \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}=t \\ x=\frac{1+t^2}{1-t^2} \\ dx=\frac{8t}{(1-t^2)^2}dt \end{cases}$$

$$\int\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\frac{1}{x}dx=\int t\frac{1-t^2}{1+t^2}\frac{4t}{(1-t^2)^2}dt=\int\frac{4t^2}{(1-t^2)(1+t^2)}dt$$

Descomponemos en fracciones simples

$$\frac{4t^2}{(1-t^2)(1+t^2)}=\frac{A}{1-t}+\frac{B}{1+t}+\frac{Ct+D}{1+t^2}$$

el numerador de la fracción de la derecha es

$$A(1+t)\left(1+t^2\right)+B(1-t)\left(1+t^2\right)+(Ct+D)\left(1-t^2\right)$$

o si lo ordenamos por potencias

$$t^3(A-B-C)+t^2(A+B-D)+t(A-B+C)+(A+B+D)$$

e igualando a los coeficientes del numerador del miembro de la izquierda

$$\begin{cases} A-B-C=0 \\ A+B-D=4 \\ A-B+C=0 \\ A+B+D=0 \end{cases}$$

que tiene por solución

$$A=1; B=1; C=0, D=-2$$

por tanto

$$\begin{aligned} \int \frac{4t^2}{(1-t^2)(1+t^2)}dt &= \int \left(\frac{A}{1-t} + \frac{B}{1+t} + \frac{Ct+D}{1+t^2} \right) dt = \\ &= \int \left(\frac{1}{1-t} + \frac{1}{1+t} - \frac{2}{1+t^2} \right) dt \\ &= \ln(1-t) + \ln(1+t) - 2\arctan t \end{aligned}$$

Si ahora deshacemos el cambio:

$$\int \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} \frac{1}{x} dx = \ln\left(1-\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\right) + \ln\left(1+\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\right) - 2\arctan\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$$

7. Calcula las siguientes integrales de funciones radicales:

(a) $\int \frac{1}{\sqrt{-x^2-2x+3}}\,dx$	(b) $\int \frac{1}{\sqrt{-x^2+2x+1}}\,dx$	(c) $\int \frac{1}{\sqrt{-4x^2+4x+1}}\,dx$
(d) $\int \frac{x}{\sqrt{-x^2-4x+2}}\,dx$	(e) $\int \sqrt{-4x^2-8x-3}dx$	(f) $\int \frac{1}{x^2\sqrt{x^2+1}}$
(g) $\int \sqrt{4x^2+8x+8}dx$	(h) $\int \sqrt{-x^2+4x}dx$	(i) $\int \frac{x^2}{\sqrt{4x-x^2}}dx$
(j) $\int \sqrt{x^2-2x-3}dx$	(k) $\int \sqrt{-x^2+2x}dx$	(l) $\int \frac{x^2}{\sqrt{3x-x^2}}dx$
(m) $\int \frac{1}{x^2\sqrt{x^2+x-3}}dx$	(n) $\int \frac{1}{\left(x-\frac{1}{2}\right)\sqrt{4x^2-1}}dx$	(ñ) $\int \frac{1}{\sqrt{4x^2+x+1}}dx$
(o) $\int \frac{1}{x\sqrt{-x^2+2x+1}}dx$	(p) $\int \frac{1}{x\sqrt{-2x^2-x+1}}dx$	(q) $\int \frac{1}{(x-1)\sqrt{-x^2+x+4}}dx$
(r) $\int \frac{1}{\sqrt{x^2+3x+2}}dx$	(s) $\int \frac{1}{x\sqrt{x^2-4}}dx$	(t) $\int \frac{1}{\sqrt{x^2+x-2}}dx$

En todos los apartados hay que transformar al cuadrado de una suma:

a) En este apartado lo haremos paso a paso, en los siguientes los cálculos intermedios se obviarán.

$$\int \frac{1}{\sqrt{-x^2-2x+3}}\,dx$$

En primer lugar convertimos el polinomio de 2^o grado para que incluya el cuadrado de una suma o diferencia:

$$-x^2-2x+3 = 4-(x+1)^2$$

y por tanto la integral se transforma en

$$\int \frac{1}{\sqrt{-x^2-2x+3}}\,dx = \int \frac{1}{\sqrt{4-(x+1)^2}}dx.$$

A continuación, hacemos el cambio el cambio de variable

$$(x+1)^2 = 4\operatorname{sen}^2 t \Leftrightarrow (x+1) = 2\operatorname{sen} t$$

de forma que:

$$\begin{aligned} dx &= 2\cos t dt \\ t &= \operatorname{arcsen} \frac{x+1}{2} \end{aligned}$$

y sustituyendo en la integral

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{\sqrt{4-(x+1)^2}} dx &= \int \frac{1}{\sqrt{4-4\operatorname{sen}^2 t}} 2\cos t dt \\ &= \int \frac{1}{\sqrt{4\left(1-\operatorname{sen}^2 t\right)}} 2\cos t dt \\ &= \int \frac{1}{\sqrt{4\cos^2 t}} 2\cos t dt \\ &= \int \frac{1}{2\cos t} 2\cos t dt \\ &= \int dt = t \end{aligned}$$

y deshaciendo el cambio de variable

$$\int \frac{1}{\sqrt{4-(x+1)^2}} dx = \operatorname{arcsen} \frac{x+1}{2} + C$$

b)

$$\int \frac{1}{\sqrt{-x^2+2x+1}}\, dx$$

Transformación del polinomio:

$$-x^2+2x+1 = 2-(x-1)^2$$

y por tanto la integral se transforma en

$$\int \frac{1}{\sqrt{-x^2+2x+1}}\, dx = \int \frac{1}{\sqrt{2-(x-1)^2}} dx.$$

Cambio de variable

$$(x-1)^2 = 2\operatorname{sen}^2 t \Leftrightarrow (x-1) = \sqrt{2}\operatorname{sen} t$$

de forma que:

$$\begin{aligned} dx &= \sqrt{2}\cos t dt \\ t &= \operatorname{arcsen} \frac{x-1}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

y sustituyendo en la integral

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{\sqrt{2-(x-1)^2}}dx &= \int \frac{1}{\sqrt{2-2\operatorname{sen}^2 t}}\sqrt{2}\cos t dt \\ &= \int dt = t\end{aligned}$$

y deshaciendo el cambio de variable

$$\int \frac{1}{\sqrt{2-(x-1)^2}}dx = \operatorname{arcsen}\frac{x-1}{\sqrt{2}} + C$$

c)

$$\int \frac{1}{\sqrt{-4x^2+4x+1}}\,dx$$

Transformación del polinomio:

$$-4x^2+4x+1 = 2-(2x-1)^2$$

y por tanto la integral se transforma en

$$\int \frac{1}{\sqrt{-4x^2+4x+1}}\,dx = \int \frac{1}{\sqrt{2-(2x-1)^2}}dx.$$

Cambio de variable

$$(2x-1)^2 = 2\operatorname{sen}^2 t \Leftrightarrow (2x-1) = \sqrt{2}\operatorname{sen} t$$

de forma que:

$$\begin{aligned}2dx &= \sqrt{2}\cos t dt \Rightarrow dx = \frac{\sqrt{2}}{2}\cos t dt \\ t &= \operatorname{arcsen}\frac{2x-1}{\sqrt{2}}\end{aligned}$$

y sustituyendo en la integral

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{\sqrt{2-(2x-1)^2}}dx &= \int \frac{1}{\sqrt{2-2\operatorname{sen}^2 t}}\frac{\sqrt{2}}{2}\cos t dt \\ &= \int \frac{1}{2}dt = \frac{t}{2}\end{aligned}$$

y deshaciendo el cambio de variable

$$\int \frac{1}{\sqrt{2-(2x-1)^2}}dx = \frac{1}{2}\operatorname{arcsen}\frac{2x-1}{\sqrt{2}} + C$$

d)

$$\int \frac{x}{\sqrt{-x^2-4x+2}}\,dx$$

Transformación del polinomio:

$$-x^2-4x+2 = 6-(x+2)^2$$

y por tanto la integral se transforma en

$$\int \frac{x}{\sqrt{-x^2-4x+2}}\,dx = \int \frac{x}{\sqrt{6-(x+2)^2}} dx.$$

Cambio de variable

$$(x+2)^2 = 6\operatorname{sen}^2 t \Leftrightarrow (x+2) = \sqrt{6}\operatorname{sen} t$$

de forma que:

$$\begin{aligned} dx &= \sqrt{2}\cos t dt \\ t &= \operatorname{arcsen}\frac{x+2}{\sqrt{6}} \end{aligned}$$

y sustituyendo en la integral

$$\begin{aligned} \int \frac{x}{\sqrt{6-(x+2)^2}} dx &= \int \frac{\left(\sqrt{6}\operatorname{sen} t - 2\right)}{\sqrt{6-6\operatorname{sen}^2 t}} \sqrt{6}\cos t dt \\ &= \int \left(\sqrt{6}\operatorname{sen} t - 2\right) dt = -\sqrt{6}\cos t - 2t \end{aligned}$$

y deshaciendo el cambio de variable

$$\int \frac{x}{\sqrt{6-(x+2)^2}} dx = -\sqrt{6}\cos\left(\operatorname{arcsen}\frac{x+2}{\sqrt{6}}\right) - 2\left(\operatorname{arcsen}\frac{x+2}{\sqrt{6}}\right) + C$$

y si ponemos

$$\cos\left(\operatorname{arcsen}\left(\frac{x+2}{\sqrt{6}}\right)\right) = \sqrt{1-\operatorname{sen}^2 \operatorname{arcsen}\left(\frac{x+2}{\sqrt{6}}\right)} = \sqrt{1-\left(\frac{x+2}{\sqrt{6}}\right)^2} = \frac{1}{\sqrt{6}}\sqrt{6-(x+2)^2}$$

obtenemos de forma simplificada

$$\int \frac{x}{\sqrt{6-(x+2)^2}} dx = -\sqrt{6-(x+2)^2} - 2\left(\operatorname{arcsen}\frac{x+2}{\sqrt{6}}\right) + C$$

e)

$$\int \sqrt{-4x^2-8x-3} dx$$

Transformación del polinomio:

$$-4x^2 - 8x - 3 = 1 - (2x+2)^2$$

y por tanto la integral se transforma en

$$\int \sqrt{-4x^2-8x-3} dx = \int \sqrt{1-(2x+2)^2} dx$$

Cambio de variable

$$(2x+2)^2 = \operatorname{sen}^2 t \Leftrightarrow (2x+2) = \operatorname{sen} t$$

de forma que:

$$\begin{aligned} 2dx &= \cos t dt \Rightarrow dx = \frac{1}{2}\cos t dt \\ t &= \operatorname{arcsen}(2x+2) \end{aligned}$$

y sustituyendo en la integral

$$\begin{aligned} \int \sqrt{1-(2x+2)^2}dx &= \int \left(\sqrt{1-\operatorname{sen}^2 t}\right)\left(\frac{1}{2}\cos t\right) dt \\ &= \frac{1}{2}\int \cos^2 t dt = \frac{1}{2}\int \left(\frac{1+\cos 2t}{2}\right) dt \\ &= \frac{1}{4}t + \frac{\operatorname{sen} 2t}{8} \end{aligned}$$

Usamos que

$$\operatorname{sen} 2t = 2\operatorname{sen} t \cos t = 2\operatorname{sen} t\sqrt{1-\operatorname{sen}^2 t}$$

y deshaciendo el cambio de variable

$$\int \sqrt{1-(2x+2)^2}dx = \frac{1}{4}\operatorname{arcsen}(2x+2) + \frac{1}{4}(x+1)\sqrt{1-(2x+2)^2}$$

f)

$$\int \frac{1}{x^2\sqrt{x^2+1}}dx$$

Cambio de variable

$$x^2 = \operatorname{Sh}^2 t \Leftrightarrow x = \operatorname{Sh} t$$

de forma que:

$$\begin{aligned} dx &= \operatorname{Ch} t\ dt \\ t &= \arg\operatorname{Sh} x = \ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right) \end{aligned}$$

y sustituyendo en la integral

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{x^2\sqrt{x^2+1}}dx &= \int \frac{1}{\operatorname{Sh}^2 t\sqrt{\operatorname{Sh}^2 t+1}}\operatorname{Ch} t\ dt \\ &= \int \frac{1}{\operatorname{Sh}^2 t}dt. \end{aligned}$$

Para resolver esta integral, expresamos la función $\operatorname{Sh} t$, en términos de la función exponencial

$$\int \frac{1}{\operatorname{Sh}^2 t}dt = \int \frac{1}{\left(\frac{e^t-e^{-t}}{2}\right)^2}dt = \int \frac{4}{(e^t-e^{-t})^2}dt$$

y hacemos el cambio de variable

$$e^t = u \Rightarrow dt = \frac{1}{u}du$$

y obtendremos

$$\int \frac{4}{(e^t-e^{-t})^2}dt = \int \frac{4}{\left(u-\frac{1}{u}\right)^2}\frac{1}{u}du = \int \frac{4}{\left(\frac{u^2-1}{u}\right)^2}\frac{1}{u}du = \int \frac{4u}{(u^2-1)^2}du$$

que es una integral racional, no obstante si ponemos

$$\int \frac{4u}{\left(u^2-1\right)^2} du = 2\int 2u\left(u^2-1\right)^{-2} du$$

vemos que es una integral inmediata de la forma $f'(x)\left[f(x)\right]^n$ con $n \neq -1$, cuya primitiva es $\frac{[f(x)]^{n+1}}{n+1}$

$$\int \frac{4u}{\left(u^2-1\right)^2} du = \frac{2\left(u^2-1\right)^{-1}}{-1} = \frac{2}{1-u^2}$$

Deshacemos el último cambio $u = e^t$

$$\frac{2}{1-u^2} = \frac{2}{1-e^{2t}}$$

y deshacemos el primer cambio

$$t = \ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$$

y tendremos

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{x^2\sqrt{x^2+1}} dx &= \frac{2}{1-e^{2\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)}} = \frac{2}{1-e^{\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)^2}} = \frac{2}{1-\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)^2} \\ &= -\frac{2}{\left(2x^2+2x\sqrt{x^2+1}\right)} = \frac{-1}{x^2+x\sqrt{x^2+1}} = \frac{-1}{x\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)}\end{aligned}$$

También podemos considerar esta integral como binómica

$$\int x^{-2}\left(1+x^2\right)^{-\frac{1}{2}} dx$$

de tipo general. Haciendo el cambio

$$\begin{aligned} x^2 &= t \Rightarrow x = t^{\frac{1}{2}} \\ dx &= \frac{1}{2} t^{-\frac{1}{2}} dt \end{aligned}$$

obtenemos

$$\int x^{-2}\left(1+x^2\right)^{-\frac{1}{2}} dx = \frac{1}{2}\int t^{-1}(1+t)^{-\frac{1}{2}} t^{-\frac{1}{2}} dt = \frac{1}{2}\int t^{-\frac{3}{2}}(1+t)^{-\frac{1}{2}} dt$$

que es de tipo 1, siendo la suma de los exponentes

$$-\frac{3}{2}-\frac{1}{2} = -\frac{4}{2} = -2 \in \mathbb{Z}$$

luego debemos multiplicar y dividir por $t^{-\frac{1}{2}}$

$$\frac{1}{2}\int t^{-\frac{3}{2}}(1+t)^{-\frac{1}{2}} dt = \frac{1}{2}\int t^{-\frac{3}{2}}(1+t)^{-\frac{1}{2}} \frac{t^{-\frac{1}{2}}}{t^{-\frac{1}{2}}} dt = \frac{1}{2}\int t^{-2}\left(\frac{1+t}{t}\right)^{-\frac{1}{2}} dt$$

y haremos el cambio

$$\begin{aligned} \frac{1+t}{t} &= u^2 \Rightarrow t = \frac{1}{u^2-1} \\ dt &= -\frac{2u}{\left(u^2-1\right)^2} du \end{aligned}$$

de forma que

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\int t^{-2}\left(\frac{1+t}{t}\right)^{-\frac{1}{2}}dt &= \frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{u^2-1}\right)^{-2}\left(u^2\right)^{-\frac{1}{2}}\left(-\frac{2u}{\left(u^2-1\right)^2}du\right)\\ &= -\int du=-u\end{aligned}$$

y deshaciendo cambios

$$-u=-\sqrt{\frac{1+t}{t}}=-\sqrt{\frac{1+x^2}{x^2}}=-\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}$$

es decir

$$\int\frac{1}{x^2\sqrt{x^2+1}}dx=-\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}$$

Aunque esta primitiva es distinta a la obtenida por el método anterior, podemos comprobar como su diferencia es una constante

$$\left(\frac{-1}{x\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)}\right)-\left(-\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}\right)=1$$

$g)$

$$\int\sqrt{4x^2+8x+8}dx$$

Transformación del polinomio:

$$4x^2+8x+8=(2x+2)^2+4=4\left((x+1)^2+1\right)$$

y por tanto la integral se transforma en

$$\int\sqrt{4x^2+8x+8}dx=\int 2\sqrt{(x+1)^2+1}dx$$

Cambio de variable

$$(x+1)^2=\operatorname{Sh}^2 t\Leftrightarrow(x+1)=\operatorname{Sh} t$$

de forma que:

$$\begin{aligned}dx &= \operatorname{Ch} t dt\\ t &= \arg\operatorname{Sh}(x+1)=\ln\left((x+1)+\sqrt{(x+1)^2+1}\right)\end{aligned}$$

y sustituyendo en la integral

$$2\int\sqrt{(x+1)^2+1}dx=2\int\left(\sqrt{\operatorname{Sh}^2 t+1}\right)\operatorname{Ch} t dt=2\int\operatorname{Ch}^2 t\ dt$$

Para calcular la integral, expresamos el coseno hiperbólico en términos de la función exponencial

$$\int 2\operatorname{Ch}^2 t\ dt=2\int\left(\frac{e^t+e^{-t}}{2}\right)^2 dt=\frac{1}{2}\int\left(e^{2t}+e^{-2t}+2\right)dt=\frac{e^{2t}}{4}-\frac{e^{-2t}}{4}+t$$

y deshaciendo el cambio de variable

$$\begin{aligned}
\int 2\operatorname{Ch}^2 t\; dt &= \frac{e^{2\ln\left(\left((x+1)+\sqrt{(x+1)^2+1}\right)\right)}}{4} - \frac{e^{-2\ln\left(\left((x+1)+\sqrt{(x+1)^2+1}\right)\right)}}{4} + \operatorname{arg\,Sh}(x+1) \\
&= \frac{\left(x+1+\sqrt{(x+1)^2+1}\right)^2}{4} - \frac{1}{4\left(x+1+\sqrt{(x+1)^2+1}\right)^2} + \ln\left(x+1+\sqrt{(x+1)^2+1}\right)
\end{aligned}$$

h)

$$\int \sqrt{-x^2+4x}dx$$

Transformación del polinomio:

$$-x^2+4x = 4-(x-2)^2$$

y por tanto la integral se transforma en

$$\int \sqrt{-x^2+4x}dx = \int \sqrt{4-(x-2)^2}dx$$

Cambio de variable

$$\begin{aligned}
(x-2)^2 &= 4\operatorname{sen}^2 t \Leftrightarrow (x-2) = 2\operatorname{sen} t \\
t &= \operatorname{arcsen}\frac{x-2}{2} \\
dx &= 2\cos t dt
\end{aligned}$$

y sustituyendo en la integral

$$\begin{aligned}
\int \sqrt{4-(x-2)^2}dx &= \int \sqrt{4-4\operatorname{sen}^2 t}2\cos t dt = \int 4\cos^2 t dt = 4\int \left(\frac{1+\cos(2t)}{2}\right) dt \\
&= 2t + \operatorname{sen}(2t) = 2t + 2\operatorname{sen} t\sqrt{1-\operatorname{sen}^2 t}
\end{aligned}$$

y como

$$\operatorname{sen} t = \frac{x-2}{2}$$

obtenemos

$$\begin{aligned}
\int \sqrt{4-(x-2)^2}dx &= 2\operatorname{arcsen}\frac{x-2}{2} + (x-2)\sqrt{1-\frac{(x-2)^2}{4}} \\
&= 2\operatorname{arcsen}\frac{x-2}{2} + \frac{x-2}{2}\sqrt{-x^2+4x}
\end{aligned}$$

i)

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{4x-x^2}}dx = \int \frac{x^2}{\sqrt{4-(x-2)^2}}dx$$

El mismo cambio que antes

$$\begin{aligned}(x-2)^2 &= 4\operatorname{sen}^2 t \Leftrightarrow (x-2) = 2\operatorname{sen} t\\ t &= \operatorname{arcsen}\frac{x-2}{2}\\ dx &= 2\cos t dt\end{aligned}$$

En este caso

$$\begin{aligned}\int \frac{x^2}{\sqrt{4-(x-2)^2}}dx &= \int \frac{(2+2\operatorname{sen} t)^2}{\sqrt{4-4\operatorname{sen}^2 t}}2\cos t dt = \int (2+2\operatorname{sen} t)^2\, dt\\ &= \int \left(4+4\operatorname{sen}^2 t + 8\operatorname{sen} t\right) dt\\ &= \int (4+2(1-\cos 2t)+8\operatorname{sen} t)\, dt\\ &= \int (6-2\cos 2t+8\operatorname{sen} t)\, dt\\ &= 6t-\operatorname{sen} 2t - 8\cos t\end{aligned}$$

y expresado en términos del $\operatorname{sen} t$

$$6t-2\operatorname{sen} t\sqrt{1-\operatorname{sen}^2 t}-8\sqrt{1-\operatorname{sen}^2 t}$$

y puesto que

$$\operatorname{sen} t = \frac{x-2}{2}$$

la integral buscada es

$$\begin{aligned}\int \frac{x^2}{\sqrt{4-(x-2)^2}}dx &= 6\operatorname{arcsen}\frac{x-2}{2}-(x-2)\sqrt{1-\left(\frac{x-2}{2}\right)^2}-8\sqrt{1-\left(\frac{x-2}{2}\right)^2}\\ &= 6\operatorname{arcsen}\frac{x-2}{2}-\frac{(x-2)}{2}\sqrt{4x-x^2}-4\sqrt{4x-x^2}\\ &= 6\operatorname{arcsen}\frac{x-2}{2}-\frac{x}{2}\sqrt{4x-x^2}-3\sqrt{4x-x^2}\end{aligned}$$

$j)$ Expresamos en términos del cuadrado de una suma

$$x^2-2x-3=(x-1)^2-4$$

$$\int \sqrt{x^2-2x-3}dx = \int \sqrt{(x-1)^2-4}$$

Hacemos el cambio de variable

$$\begin{aligned}(x-1)^2 &= 4\operatorname{Ch}^2 t \Rightarrow (x-1) = 2\operatorname{Ch} t\\ dx &= 2\operatorname{Sh} t\ dt\\ t &= \ln\left(\frac{x-1}{2}+\sqrt{\left(\frac{x-1}{2}\right)^2-1}\right) = \ln\frac{(x-1)+\sqrt{x^2-2x-3}}{2}\end{aligned}$$

Sustituimos en la integral y empleamos la definición de $\operatorname{Sh} t$ en términos de e^t

$$\begin{aligned}
\int \sqrt{(x-1)^2-4}dx &= \int \sqrt{4\operatorname{Ch}^2 t-4}2\operatorname{Sh} t\ dt = \int 4\operatorname{Sh}^2 t dt \\
&= 4\int \frac{e^{2t}+e^{-2t}-2}{4}dt = \frac{e^{2t}}{2}-\frac{e^{-2t}}{2}-2t = \operatorname{Sh}(2t)-2t \\
&= 2\operatorname{Sh} t\operatorname{Ch} t-2t = 2\sqrt{\operatorname{Ch}^2 t-1}\operatorname{Ch} t-2t
\end{aligned}$$

Deshacemos el cambio

$$\begin{aligned}
2\sqrt{\operatorname{Ch}^2 t-1}\operatorname{Ch} t-2t &= 2\sqrt{\left(\frac{x-1}{2}\right)^2-1}\frac{(x-1)}{2}-2\ln\frac{(x-1)+\sqrt{x^2-2x-3}}{2} \\
&= \frac{(x-1)}{2}\sqrt{x^2-2x-3}-2\ln\frac{(x-1)+\sqrt{x^2-2x-3}}{2}
\end{aligned}$$

$k)$

$$-x^2+2x = 1-(x-1)^2$$

$$\begin{aligned}
(x-1)^2 &= \operatorname{sen}^2 t \Rightarrow (x-1) = \operatorname{sen} t \\
dx &= \cos t\ dt
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int \sqrt{-x^2+2x}dx &= \int \sqrt{1-(x-1)^2}dx \\
&= \int \sqrt{1-\operatorname{sen}^2 t}\cos t dt \\
&= \int \cos^2 t dt \\
&= \int \frac{1+\cos 2t}{2}dt \\
&= \frac{1}{2}t+\frac{\operatorname{sen} 2t}{4}
\end{aligned}$$

y deshaciendo el cambio

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}t+\frac{1}{4}\operatorname{sen} 2t &= \frac{1}{2}t+\frac{1}{4}2\operatorname{sen} t\cos t = \frac{1}{2}t+\frac{1}{2}\operatorname{sen} t\sqrt{1-\operatorname{sen}^2 t} \\
&= \frac{1}{2}\arcsin(x-1)+\frac{1}{2}(x-1)\sqrt{1-(x-1)^2} \\
&= \frac{1}{2}\arcsin(x-1)+\frac{1}{2}(x-1)\sqrt{-x^2+2x}
\end{aligned}$$

$l)$

$$3x-x^2 = \frac{9}{4}-\left(x-\frac{3}{2}\right)^2$$

$$\begin{aligned}
\left(x-\frac{3}{2}\right)^2 &= \frac{9}{4}\operatorname{sen}^2 t \Rightarrow \left(x-\frac{3}{2}\right) = \frac{3}{2}\operatorname{sen} t \\
dx &= \frac{3}{2}\cos t\ dt
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int \frac{x^2}{\sqrt{3x-x^2}}dx &= \int \frac{x^2}{\sqrt{\frac{9}{4}-\left(x-\frac{3}{2}\right)^2}}dx = \int \frac{\left(\frac{3}{2}\operatorname{sen} t+\frac{3}{2}\right)^2}{\sqrt{\frac{9}{4}-\frac{9}{4}\operatorname{sen}^2 t}}\frac{3}{2}\cos t dt \\
&= \int \left(\frac{3}{2}\operatorname{sen} t+\frac{3}{2}\right)^2 dt = \int \left(\frac{9}{4}\operatorname{sen}^2 t+\frac{9}{4}+\frac{9}{2}\operatorname{sen} t\right) dt \\
&= \int \left(\frac{9}{4}\frac{1-\cos 2t}{2}+\frac{9}{4}+\frac{9}{2}\operatorname{sen} t\right) dt \\
&= \frac{9}{8}t-\frac{9}{16}\operatorname{sen} 2t+\frac{9}{4}t-\frac{9}{2}\cos t \\
&= \frac{27}{8}t-\frac{9}{16}\operatorname{sen} 2t-\frac{9}{2}\cos t
\end{aligned}$$

Expresamos en función de la función $\operatorname{sen} t$

$$\begin{aligned}
\frac{27}{8}t-\frac{9}{16}\operatorname{sen} 2t-\frac{9}{2}\cos t &= \frac{27}{8}t-\frac{9}{16}2\operatorname{sen} t\cos t-\frac{9}{2}\cos t \\
&= \frac{27}{8}t-\frac{9}{16}2\operatorname{sen} t\sqrt{1-\operatorname{sen}^2 t}-\frac{9}{2}\sqrt{1-\operatorname{sen}^2 t}
\end{aligned}$$

deshaciendo el cambio y las oportunas simplificaciones, tendresmo

$$\begin{aligned}
&\frac{27}{8}t-\frac{9}{16}2\operatorname{sen} t\sqrt{1-\operatorname{sen}^2 t}-\frac{9}{2}\sqrt{1-\operatorname{sen}^2 t} \\
&= \frac{27}{8}\arcsin\left(\frac{1}{3}(2x-3)\right)-\frac{(2x+9)}{4}\sqrt{3x-x^2}
\end{aligned}$$

es decir

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{3x-x^2}}dx = \frac{27}{8}\arcsin\left(\frac{1}{3}(2x-3)\right)-\frac{(2x+9)}{4}\sqrt{3x-x^2}$$

$m)$

$$x^2+x-3=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{13}{4}$$

$$\begin{aligned}
\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 &= \frac{13}{4}\operatorname{Ch}^2 t \Rightarrow \left(x+\frac{1}{2}\right)=\frac{\sqrt{13}}{2}\operatorname{Ch} t \Rightarrow x=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{13}}{2}\operatorname{Ch} t \\
dx &= \frac{\sqrt{13}}{2}\operatorname{Sh} t\ dt
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{x^2\sqrt{x^2+x-3}}dx &= \int \frac{1}{x^2\sqrt{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{13}{4}}}dx \\
&= \int \frac{1}{\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{13}}{2}\operatorname{Ch} t\right)^2\sqrt{\frac{13}{4}\operatorname{Ch}^2 t-\frac{13}{4}}}\frac{\sqrt{13}}{2}\operatorname{Sh} t\ dt \\
&= \int \frac{1}{\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{13}}{2}\operatorname{Ch} t\right)^2}\ dt
\end{aligned}$$

Hacemos el cambio

$$e^t=u \Rightarrow dt=\frac{1}{u}du$$

y por tanto

$$\begin{aligned}\operatorname{Sh} t &= \frac{e^t - e^{-t}}{2} = \frac{u - \frac{1}{u}}{2} = \frac{u^2 - 1}{2u} \\ \operatorname{Ch} t &= \frac{e^t + e^{-t}}{2} = \frac{u + \frac{1}{u}}{2} = \frac{u^2 + 1}{2u}\end{aligned}$$

$n)$

$$4x^2 - 1 = 4x^2 - 1$$

$$\begin{aligned}4x^2 &= \operatorname{Ch}^2 t \Rightarrow 2x = \operatorname{Ch} t \\ dx &= \frac{1}{2} \operatorname{Sh} t \; dt\end{aligned}$$

$$t = \arg \operatorname{Ch}(2x) = \ln\left(2x + \sqrt{4x^2 - 1}\right)$$

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{\left(x - \frac{1}{2}\right)\sqrt{4x^2 - 1}} dx &= \int \frac{1}{\left(\frac{\operatorname{Ch} t}{2} - \frac{1}{2}\right)\sqrt{\operatorname{Ch}^2 t - 1}} \frac{1}{2} \operatorname{Sh} t \; dt \\ &= \int \frac{1}{\operatorname{Ch} t - 1} dt = \int \frac{1}{\frac{e^t + e^{-t}}{2} - 1} dt = \int \frac{2}{e^t + e^{-t} - 2} dt\end{aligned}$$

Hacemos el cambio

$$e^t = u \Rightarrow e^t dt = du \Rightarrow dt = \frac{1}{e^t} du = \frac{1}{u} du$$

$$\int \frac{2}{e^t + e^{-t} - 2} dt = \int \frac{2}{u + \frac{1}{u} - 2} \frac{1}{u} du = \int \frac{2}{u^2 + 1 - 2u} du = \int \frac{2}{(u-1)^2} du = -\frac{2}{(u-1)} = \frac{2}{1-u}$$

y deshaciendo todos los cambios

$$\frac{2}{1-u} = \frac{2}{1-e^t} = \frac{2}{1 - e^{\ln\left(2x + \sqrt{4x^2-1}\right)}} = \frac{2}{1 - \left(2x + \sqrt{4x^2 - 1}\right)}$$

$$\int \frac{1}{\left(x - \frac{1}{2}\right)\sqrt{4x^2 - 1}} dx = \frac{2}{1 - \left(2x + \sqrt{4x^2 - 1}\right)} + C$$

$ñ)$

$$4x^2 + x + 1 = \left(2x + \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{15}{16}$$

$$\begin{aligned}\left(2x + \frac{1}{4}\right)^2 &= \frac{15}{16} \operatorname{Sh}^2 t \Rightarrow \left(2x + \frac{1}{4}\right) = \frac{\sqrt{15}}{4} \operatorname{Sh} t \\ dx &= \frac{\sqrt{15}}{8} \operatorname{Ch} t \; dt\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{\sqrt{4x^2 + x + 1}} dx &= \int \frac{1}{\sqrt{\left(2x + \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{15}{16}}} dx = \int \frac{1}{\sqrt{\frac{15}{16} \operatorname{Sh}^2 t + \frac{15}{16}}} \frac{\sqrt{15}}{8} \operatorname{Ch} t \; dt \\ &= \int \frac{2}{\sqrt{\frac{15}{16}}\sqrt{\operatorname{Sh}^2 t + 1}} \frac{\sqrt{15}}{8} \operatorname{Ch} t \; dt \\ &= \int \frac{2}{\frac{1}{4}\sqrt{15} \operatorname{Ch} t} \frac{\sqrt{15}}{8} \operatorname{Ch} t \; dt = \int dt = t\end{aligned}$$

Y deshaciendo el cambio

$$\begin{aligned} t &= \arg\mathrm{Sh}\,\frac{4}{\sqrt{15}}\left(2x+\frac{1}{4}\right)=\arg\mathrm{Sh}\,\frac{8x+1}{\sqrt{15}} \\ &= \ln\left(\frac{8x+1}{\sqrt{15}}+\sqrt{\left(\frac{8x+1}{\sqrt{15}}\right)^2+1}\right) \end{aligned}$$

Luego

$$\int \frac{1}{\sqrt{4x^2+x+1}}dx=\ln\left(\frac{8x+1}{\sqrt{15}}+\sqrt{\left(\frac{8x+1}{\sqrt{15}}\right)^2+1}\right)+C$$

$o)$

$$-x^2+2x+1=2-(x-1)^2$$

$$\begin{aligned} (x-1)^2 &= 2\cos^2 t \Rightarrow (x-1)=\sqrt{2}\cos t \\ x &= 1+\sqrt{2}\cos t \\ dx &= -\sqrt{2}\,\mathrm{sen}\,t\ dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{x\sqrt{-x^2+2x+1}}dx &= \int \frac{1}{x\sqrt{2-(x-1)^2}}dx=-\int \frac{1}{\left(1+\sqrt{2}\cos t\right)\sqrt{2-2\cos^2 t}}\sqrt{2}\,\mathrm{sen}\,t\ dt \\ &= \int \frac{-1}{\left(1+\sqrt{2}\cos t\right)}\ dt \end{aligned}$$

que es una integral trigonométrica que podemos hacer mediante el cambio general

$$\tan\frac{t}{2}=u$$

Recordemos que en este caso tendremos

$$\begin{aligned} \cos t &= \frac{1-u^2}{1+u^2} \\ dt &= \frac{2}{1+u^2}du \end{aligned}$$

por tanto

$$\int \frac{-1}{\left(1+\sqrt{2}\cos t\right)}\ dt=\int \frac{-1}{1+\sqrt{2}\frac{1-u^2}{1+u^2}}\frac{2}{1+u^2}du=\int \frac{2\sqrt{2}+2}{\left(u+\sqrt{2}+1\right)\left(u-\sqrt{2}-1\right)}du$$

$$\frac{2\sqrt{2}+2}{\left(u+\sqrt{2}+1\right)\left(u-\sqrt{2}-1\right)}$$

Y ahora hacemos la descomposición en fracciones simples

$$\frac{2\sqrt{2}+2}{\left(u+\sqrt{2}+1\right)\left(u-\sqrt{2}-1\right)}=\frac{1}{u-\sqrt{2}-1}-\frac{1}{u+\sqrt{2}+1}$$

luego

$$\begin{aligned} \int \frac{2\sqrt{2}+2}{\left(u+\sqrt{2}+1\right)\left(u-\sqrt{2}-1\right)}du &= \int\left(\frac{1}{u-\sqrt{2}-1}-\frac{1}{u+\sqrt{2}+1}\right)du \\ &= \ln\left(u-\sqrt{2}-1\right)-\ln\left(u+\sqrt{2}+1\right) \\ &= \ln\left(\frac{u-\sqrt{2}-1}{u+\sqrt{2}+1}\right) \end{aligned}$$

y podemos deshacer los cambios anteriores

$$\ln\left(\frac{u-\sqrt{2}-1}{u+\sqrt{2}+1}\right)=\ln\left(\frac{\tan\frac{t}{2}-\sqrt{2}-1}{\tan\frac{t}{2}+\sqrt{2}+1}\right)$$

y teniendo en cuenta que

$$\tan\frac{t}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos t}{1+\cos t}}=\sqrt{\frac{1-\frac{x-1}{\sqrt{2}}}{1+\frac{x-1}{\sqrt{2}}}}=\sqrt{\frac{\sqrt{2}-(x-1)}{\sqrt{2}+(x-1)}}$$

luego la integral buscada es

$$\int\frac{1}{x\sqrt{-x^2+2x+1}}dx=\ln\left(\frac{\sqrt{\frac{\sqrt{2}-(x-1)}{\sqrt{2}+(x-1)}}-\sqrt{2}-1}{\sqrt{\frac{\sqrt{2}-(x-1)}{\sqrt{2}+(x-1)}}+\sqrt{2}+1}\right)$$

$p)$

$$-2x^2-x+1=\frac{9}{8}-2\left(x+\frac{1}{4}\right)^2$$

$$\begin{aligned}2\left(x+\frac{1}{4}\right)^2&=\frac{9}{8}\operatorname{sen}^2 t\Rightarrow\sqrt{2}\left(x+\frac{1}{4}\right)=\frac{3}{2\sqrt{2}}\operatorname{sen} t\\ dx&=\frac{3}{4}\cos t\ dt\end{aligned}$$

$$\int\frac{1}{x\sqrt{-2x^2-x+1}}dx$$

$q)$

$$-x^2+x+4=\frac{17}{4}-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2$$

$$\begin{aligned}\left(x-\frac{1}{2}\right)^2&=\frac{17}{4}\operatorname{sen}^2 t\Rightarrow\left(x-\frac{1}{2}\right)=\frac{\sqrt{17}}{2}\operatorname{sen} t\\ dx&=\frac{\sqrt{17}}{2}\cos t\ dt\end{aligned}$$

$$\int\frac{1}{(x-1)\sqrt{-x^2+x+4}}dx$$

$r)$

$$x^2+3x+2=\left(x+\frac{3}{2}\right)^2-\frac{1}{4}$$

$$\begin{aligned}\left(x+\frac{3}{2}\right)^2&=\frac{1}{4}\operatorname{Ch}^2 t\Rightarrow\left(x+\frac{3}{2}\right)=\frac{1}{2}\operatorname{Ch} t\\ dx&=\frac{1}{2}\operatorname{Sh} t\ dt\end{aligned}$$

$$\int\frac{1}{\sqrt{x^2+3x+2}}dx$$

s)

$$x^2-4=x^2-4$$

$$\begin{aligned} x^2 &= 4\,\mathrm{Ch}^2 t \Rightarrow x=2\,\mathrm{Ch}\,t \\ dx &= 2\,\mathrm{Sh}\,t\ dt \end{aligned}$$

$$\int \frac{1}{x\sqrt{x^2-4}}dx$$

t)

$$x^2+x-2=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{9}{4}$$

$$\begin{aligned} \left(x+\frac{1}{2}\right)^2 &= \frac{9}{4}\,\mathrm{Ch}^2 t \Rightarrow \left(x+\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{2}\,\mathrm{Ch}\,t \\ dx &= \frac{3}{2}\,\mathrm{Sh}\,t\ dt \end{aligned}$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+x-2}}dx$$

8. Aplica el método Alemán para calcular las siguientes integrales:

(a) $\int \frac{3x+1}{\sqrt{-x^2-2x+1}}\,dx$ (b) $\int \frac{-12x^3+2x^2+8x+7}{\sqrt{-4x^2+4x+4}}\,dx$ (c) $\int \frac{-2x^2-5x}{\sqrt{-x^2-2x+1}}\,dx$

(d) $\int \frac{2x^2+2x-6}{\sqrt{x^2+2x-3}}\,dx$ (e) $\int \frac{4x^2+3x-1}{\sqrt{x^2+x}}\,dx$ (f) $\int \frac{4x^2-x-7}{\sqrt{x^2-x-4}}$

Solución: Detallamos el primer problema, los demás se harán siguiendo el método Alemán obviando algunos de los pasos intermedios:

a) El numerador es un polinomio de primer grado luego

$$\int \frac{3x+1}{\sqrt{-x^2-2x+1}}dx = P_{n-1}(x)\sqrt{-x^2-2x+1}+\int \frac{L}{\sqrt{-x^2-2x+1}}dx$$

como el numerador de la integral es un polinomio de grado 1, el polinomio $P_{n-1}(x)$ debe ser un polinomio de grado 0, es decir, una constante $P_{n-1}(x)=A$, por tanto

$$\int \frac{3x+1}{\sqrt{-x^2-2x+1}}dx = A\sqrt{-x^2-2x+1}+\int \frac{L}{\sqrt{-x^2-2x+1}}dx$$

Derivando la expresión anterior obtendremos los coeficientes A y L

$$\frac{3x+1}{\sqrt{-x^2-2x+1}} = -A\frac{x+1}{\sqrt{-x^2-2x+1}}+\frac{L}{\sqrt{-x^2-2x+1}} = \frac{-Ax-A+L}{\sqrt{-x^2-2x+1}}$$

e igualando coeficientes

$$\left.\begin{aligned} 3 &= -A \\ 1 &= -A+L \end{aligned}\right\} \Rightarrow A=-3 \text{ y } L=-2$$

por tanto

$$\int \frac{3x+1}{\sqrt{-x^2-2x+1}}dx = -3\sqrt{-x^2-2x+1}-\int \frac{2}{\sqrt{-x^2-2x+1}}dx$$

La integral

$$\int \frac{2}{\sqrt{-x^2-2x+1}}dx$$

se calcula mediante un cambio de variable. Completamos el cuadrado de la suma

$$-x^2 - 2x + 1 = 2 - (x+1)^2$$

por tanto

$$\int \frac{2}{\sqrt{-x^2 - 2x + 1}} dx = \int \frac{2}{\sqrt{2 - (x+1)^2}} dx$$

Hacemos el cambio

$$(x+1)^2 = 2\operatorname{sen}^2 t \Longleftrightarrow (x+1) = \sqrt{2}\operatorname{sen} t \Longrightarrow dx = \sqrt{2}\cos t\ dt$$

y por tanto

$$\begin{aligned}
\int \frac{2}{\sqrt{2-(x+1)^2}} dx &= \int \frac{2}{\sqrt{2 - 2\operatorname{sen}^2 t}} dt = \int \frac{2}{\sqrt{2\left(1 - \operatorname{sen}^2 t\right)}} \sqrt{2}\cos t\ dt \\
&= \int \frac{2}{\sqrt{\left(1 - \operatorname{sen}^2 t\right)}} \cos t\ dt = \int \frac{2}{\sqrt{\cos^2 t}} \cos t\ dt \\
&= \int 2dt = 2t = 2\operatorname{arcsen} \frac{x+1}{\sqrt{2}}
\end{aligned}$$

De modo que la integral es

$$\int \frac{3x+1}{\sqrt{-x^2-2x+1}} dx = -3\sqrt{-x^2-2x+1} - 2\operatorname{arcsen}\frac{x+1}{\sqrt{2}}.$$

b) El numerador es un polinomio de tercer grado luego

$$\int \frac{-12x^3 + 2x^2 + 8x + 7}{\sqrt{-4x^2+4x+4}} dx = P_2(x)\sqrt{-4x^2+4x+4} + \int \frac{L}{\sqrt{-4x^2+4x+4}} dx$$

como el numerador de la integral es un polinomio de grado 3, el polinomio $P_2(x)$ debe ser un polinomio de grado 2

$$\int \frac{-12x^3 + 2x^2 + 8x + 7}{\sqrt{-4x^2+4x+4}} dx = \left(Ax^2 + Bx + C\right)\sqrt{-4x^2+4x+4} + \int \frac{L}{\sqrt{-4x^2+4x+4}} dx$$

Derivando la expresión anterior obtendremos los coeficientes A, B, C y L

$$\begin{aligned}
\frac{-12x^3 + 2x^2 + 8x + 7}{\sqrt{-4x^2+4x+4}} &= (2Ax+B)\sqrt{-4x^2+4x+4} + \frac{\left(Ax^2+Bx+C\right)(-4x+2)}{\sqrt{-4x^2+4x+4}} + \frac{L}{\sqrt{-4x^2+4x+4}} \\
&= \frac{(2Ax+B)\left(-4x^2+4x+4\right) + \left(Ax^2+Bx+C\right)(-4x+2) + L}{\sqrt{-4x^2+4x+4}} \\
&= \frac{-12Ax^3 + x^2(10A - 8B) + x(8A + 6B - 4C) + 4B + 2C + L}{\sqrt{-4x^2+4x+4}}
\end{aligned}$$

e igualando coeficientes

$$\left.\begin{array}{c} -12A = -12 \\ 10A - 8B = 2 \\ 8A + 6B - 4C = 8 \\ 4B + 2C + L = 7 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{c} A = 1 \\ B = 1 \\ C = \frac{3}{2} \\ L = 0 \end{array}\right\}$$

por tanto

$$\int \frac{3x+1}{\sqrt{-x^2-2x+1}} dx = -3\sqrt{-x^2-2x+1} - \int \frac{2}{\sqrt{-x^2-2x+1}} dx$$

La integral

$$\int \frac{2}{\sqrt{-x^2-2x+1}}dx$$

se calcula mediante un cambio de variable. Completamos el cuadrado de la suma

$$-x^2-2x+1=2-(x+1)^2$$

por tanto

$$\int \frac{-12x^3+2x^2+8x+7}{\sqrt{-4x^2+4x+4}}dx=\left(x^2+x+\frac{3}{2}\right)\sqrt{-4x^2+4x+4}$$

c) Usando el método Alemán

$$\int \frac{-2x^2-5x}{\sqrt{-x^2-2x+1}}\,dx=P_1(x)\sqrt{-x^2-2x+1}+\int \frac{L}{\sqrt{-x^2-2x+1}}dx$$

como el numerador de la integral es un polinomio de grado 2, el polinomio $P_1(x)$ debe ser un polinomio de grado 1, por tanto

$$\int \frac{-2x^2-5x}{\sqrt{-x^2-2x+1}}dx=(Ax+B)\sqrt{-x^2-2x+1}+\int \frac{L}{\sqrt{-x^2-2x+1}}dx$$

Derivando la expresión anterior obtendremos los coeficientes A, B y L

$$\begin{aligned}
\frac{-2x^2-5x}{\sqrt{-x^2-2x+1}} &= A\sqrt{-x^2-2x+1}+(Ax+B)\frac{-x-1}{\sqrt{-x^2-2x+1}}+\frac{L}{\sqrt{-x^2-2x+1}}\\
&= \frac{A\left(-x^2-2x+1\right)+(Ax+B)(-x-1)+L}{\sqrt{-x^2-2x+1}}\\
&= \frac{-2Ax^2-x(3A+B)+A-B+L}{\sqrt{-x^2-2x+1}}
\end{aligned}$$

e igualando coeficientes

$$\left.\begin{array}{r}-2=-2A\\ \\ -5=-3A-B\\ \\ 0=A-B+L\end{array}\right\}\Rightarrow \left.\begin{array}{r}A=1\\ \\ B=2\\ \\ L=1\end{array}\right\}$$

por tanto

$$\int \frac{-2x^2-5x}{\sqrt{-x^2-2x+1}}dx=(x+2)\sqrt{-x^2-2x+1}+\int \frac{1}{\sqrt{-x^2-2x+1}}dx$$

La integral

$$\int \frac{1}{\sqrt{-x^2-2x+1}}dx$$

la hemos calculado en el apartado a.

$$\int \frac{1}{\sqrt{-x^2-2x+1}}dx=\operatorname{arcsen}\frac{x+1}{\sqrt{2}}$$

De modo que la integral es

$$\int \frac{-2x^2-5x}{\sqrt{-x^2-2x+1}}dx=(x+2)\sqrt{-x^2-2x+1}+\operatorname{arcsen}\frac{x+1}{\sqrt{2}}.$$

d) Usando el método Alemán

$$\int \frac{2x^2+2x-6}{\sqrt{x^2+2x-3}}\,dx = P_1(x)\sqrt{x^2+2x-3} + \int \frac{L}{\sqrt{x^2+2x-3}}dx$$

como el numerador de la integral es un polinomio de grado 2, el polinomio $P_1(x)$ debe ser un polinomio de grado 1, por tanto

$$\int \frac{2x^2+2x-6}{\sqrt{x^2+2x-3}}\,dx = (Ax+B)\sqrt{x^2+2x-3} + \int \frac{L}{\sqrt{x^2+2x-3}}dx$$

Derivando la expresión anterior obtendremos los coeficientes A, B y L

$$\begin{aligned}
\frac{2x^2+2x-6}{\sqrt{x^2+2x-3}} &= A\sqrt{x^2+2x-3} + (Ax+B)\frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x-3}} + \frac{L}{\sqrt{x^2+2x-3}} \\
&= \frac{A\left(x^2+2x-3\right) + (Ax+B)(x+1) + L}{\sqrt{x^2+2x-3}} \\
&= \frac{2Ax^2 + x(3A+B) + B - 3A + L}{\sqrt{x^2+2x-3}}
\end{aligned}$$

e igualando coeficientes

$$\left.\begin{array}{r} 2 = 2A \\ 2 = 3A+B \\ -6 = B-3A+L \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} A = 1 \\ B = -1 \\ L = -2 \end{array}\right\}$$

por tanto

$$\int \frac{2x^2+2x-6}{\sqrt{x^2+2x-3}}dx = (x-1)\sqrt{x^2+2x-3} - \int \frac{2}{\sqrt{x^2+2x-3}}dx$$

Calculamons la integral

$$\int \frac{2}{\sqrt{x^2+2x-3}}dx$$

transformando el radicando

$$x^2+2x-3 = (x+1)^2 - 4$$

por tanto

$$\int \frac{2}{\sqrt{x^2+2x-3}}dx = \int \frac{2}{\sqrt{(x+1)^2-4}}dx$$

Hacemos el cambio

$$(x+1)^2 = 4\operatorname{Ch}^2 t \Longleftrightarrow (x+1) = 2\operatorname{Ch} t \Longrightarrow dx = 2\operatorname{Sh} t\ dt$$

y por tanto

$$\int \frac{2}{\sqrt{(x+1)^2-4}}dx = \int \frac{2}{\sqrt{4\operatorname{Ch}^2 t - 4}} 2\operatorname{Sh} t dt = \int 2\ dt = 2t = 2\ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)$$

De modo que la integral es

$$\int \frac{2x^2+2x-6}{\sqrt{x^2+2x-3}}dx = (x-1)\sqrt{x^2+2x-3} - 2\ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)$$

e) Usando el método Alemán

$$\int \frac{4x^2+3x-1}{\sqrt{x^2+x}}\,dx = P_1(x)\sqrt{x^2+x} + \int \frac{L}{\sqrt{x^2+x}}dx$$

como el numerador de la integral es un polinomio de grado 2, el polinomio $P_1(x)$ debe ser un polinomio de grado 1, por tanto

$$\int \frac{4x^2+3x-1}{\sqrt{x^2+x}}\,dx = (Ax+B)\sqrt{x^2+x} + \int \frac{L}{\sqrt{x^2+x}}dx$$

Derivando la expresión anterior obtendremos los coeficientes A, B y L

$$\begin{aligned}
\frac{4x^2+3x-1}{\sqrt{x^2+x}} &= A\sqrt{x^2+x} + (Ax+B)\frac{x+\frac{1}{2}}{\sqrt{x^2+x}} + \frac{L}{\sqrt{x^2+x}} \\
&= \frac{A\left(x^2+x\right)+(Ax+B)\left(x+\frac{1}{2}\right)+L}{\sqrt{x^2+x}} \\
&= \frac{2Ax^2+x\left(\frac{3}{2}A+B\right)+\frac{1}{2}B+L}{\sqrt{x^2+x}}
\end{aligned}$$

e igualando coeficientes

$$\left.\begin{array}{r} 4=2A \\ \\ 3=\frac{3}{2}A+B \\ \\ -1=\frac{1}{2}B+L \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{c} A=2 \\ \\ B=0 \\ \\ L=-1 \end{array}\right\}$$

por tanto

$$\int \frac{4x^2+3x-1}{\sqrt{x^2+x}}\,dx = 2x\sqrt{x^2+x} - \int \frac{1}{\sqrt{x^2+x}}dx$$

La integral

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+x}}dx$$

transformando el radicando

$$x^2+x = \left(x+\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}$$

por tanto

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+x}}dx = \int \frac{1}{\sqrt{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}}}dx$$

Hacemos el cambio

$$\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}\,\mathrm{Ch}^2 t \Longleftrightarrow \left(x+\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\,\mathrm{Ch}\, t \Longrightarrow dx = \frac{1}{2}\,\mathrm{Sh}\, t\ dt$$

y por tanto

$$\int \frac{1}{\sqrt{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}}}dx = \int \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{4}\,\mathrm{Ch}^2 t-\frac{1}{4}}}\frac{1}{2}\,\mathrm{Sh}\, t dt = \int dt = t = \ln\left(2x+1+\sqrt{(2x+1)^2-1}\right)$$

De modo que la integral es

$$\int \frac{4x^2+3x-1}{\sqrt{x^2+x}}\,dx = 2x\sqrt{x^2+x} - \ln\left(2x+1+\sqrt{(2x+1)^2-1}\right)$$

f) Usando el método Alemán

$$\int \frac{4x^2-x-7}{\sqrt{x^2-x-4}} = P_1(x)\sqrt{x^2-x-4} + \int \frac{L}{\sqrt{x^2-x-4}}dx$$

como el numerador de la integral es un polinomio de grado 2, el polinomio $P_1(x)$ debe ser un polinomio de grado 1, por tanto

$$\int \frac{4x^2 - x - 7}{\sqrt{x^2 - x - 4}}\,dx = (Ax + B)\sqrt{x^2 - x - 4} + \int \frac{L}{\sqrt{x^2 - x - 4}}dx$$

Derivando la expresión anterior obtendremos los coeficientes A, B y L

$$\begin{aligned}
\frac{4x^2 - x - 7}{\sqrt{x^2 - x - 4}} &= A\sqrt{x^2 - x - 4} + (Ax + B)\frac{x - \frac{1}{2}}{\sqrt{x^2 - x - 4}} + \frac{L}{\sqrt{x^2 - x - 4}} \\
&= \frac{A\left(x^2 - x - 4\right) + (Ax + B)\left(x - \frac{1}{2}\right) + L}{\sqrt{x^2 + x}} \\
&= \frac{2Ax^2 + x\left(B - \frac{3}{2}A\right) + L - \frac{1}{2}B - 4A}{\sqrt{x^2 + x}}
\end{aligned}$$

e igualando coeficientes

$$\left.\begin{aligned} 4 &= 2A \\ -1 &= B - \tfrac{3}{2}A \\ -7 &= L - \tfrac{1}{2}B - 4A \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} A &= 2 \\ B &= 2 \\ L &= 2 \end{aligned}\right\}$$

por tanto

$$\int \frac{4x^2 - x - 7}{\sqrt{x^2 - x - 4}}\,dx = 2(x + 1)\sqrt{x^2 - x - 4} + \int \frac{2}{\sqrt{x^2 - x - 4}}dx$$

La integral

$$\int \frac{2}{\sqrt{x^2 - x - 4}}dx$$

transformando el radicando

$$x^2 - x - 4 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{17}{4}$$

por tanto

$$\int \frac{2}{\sqrt{x^2 - x - 4}}dx = \int \frac{2}{\sqrt{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{17}{4}}}dx$$

Hacemos el cambio

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{17}{4}\operatorname{Ch}^2 t \Longleftrightarrow \left(x - \frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{17}}{2}\operatorname{Ch} t \Longrightarrow dx = \frac{\sqrt{17}}{2}\operatorname{Sh} t\; dt$$

y por tanto

$$\int \frac{2}{\sqrt{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{17}{4}}}dx = \int \frac{2}{\sqrt{\frac{17}{4}\operatorname{Ch}^2 t - \frac{17}{4}}}\frac{\sqrt{17}}{2}\operatorname{Sh} t dt = \int 2dt = 2t = 2\ln\left(2x + 1 + \sqrt{(2x + 1)^2 - 1}\right)$$

De modo que la integral es

$$\int \frac{4x^2 - x - 7}{\sqrt{x^2 - x - 4}}\,dx = 2(x + 1)\sqrt{x^2 - x - 4} + \ln\left(\frac{2x - 1}{\sqrt{17}} + \sqrt{\frac{(2x - 1)^2}{17} - 1}\right).$$

9. Calcula las siguientes integrales binomiales

(a) $\int \frac{1}{x^3\sqrt[3]{x^3 + 1}}dx$ (b) $\int \frac{x^2}{\sqrt[3]{(2 + x)^2}}dx$ (c) $\int \sqrt{\frac{1 + 2x^{-1}}{x}}dx$

(d) $\int \frac{\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[6]{2 + x^{-2}}}dx$ (e) $\int \frac{\sqrt{x}}{2 + \sqrt{x}}dx$ (f) $\int \frac{1}{x^{\frac{2}{3}}\sqrt{1 + x^{-\frac{1}{3}}}}dx$

a) Interal de tipo general

$$\int \frac{1}{x^3 \sqrt[3]{x^3+1}} dx = \int x^{-3} \left(1+x^3\right)^{-1/3} dx$$

hacemos el cambio

$$x^3 = t \Rightarrow x = t^{1/3} \Rightarrow dx = \frac{1}{3} t^{-2/3} dx$$

para transformarla en integral binómica de tipo I:

$$\int x^{-3} \left(1+x^3\right)^{-1/3} dx = \int t^{-1} (1+t)^{-1/3} \frac{1}{3} t^{-2/3} dt = \frac{1}{3} \int t^{-5/3} (1+t)^{-1/3} dt$$

En este caso la suma de exponentes

$$-\frac{5}{3} - \frac{1}{3} = -\frac{6}{3} = -2 \in \mathbb{Z}$$

si es un número entero, así que multiplicamos y dividimos por $t^{\beta} = t^{-1/3}$

$$\frac{1}{3} \int t^{-5/3} (1+t)^{-1/3} dt = \frac{1}{3} \int t^{-5/3} (1+t)^{-1/3} \frac{t^{-1/3}}{t^{-1/3}} dt$$

y reagrupamos

$$\frac{1}{3} \int t^{-2} \left(\frac{1+t}{t}\right)^{-1/3} dt$$

finalmente hacemos el cambio

$$\frac{1+t}{t} = u^3 \Rightarrow u = \sqrt[3]{\frac{1+t}{t}}$$

$$1+t = tu^3 \Rightarrow 1 = t\left(u^3-1\right) \Rightarrow t = \frac{1}{u^3-1} \Rightarrow dt = \frac{-3u^2}{\left(u^3-1\right)^2} du$$

con lo que la integral se transforma en

$$\begin{aligned}
\frac{1}{3} \int t^{-2} \left(\frac{1+t}{t}\right)^{-1/3} dt &= \frac{1}{3} \int \left(\frac{1}{u^3-1}\right)^{-2} \left(u^3\right)^{-1/3} \left(\frac{-3u^2}{\left(u^3-1\right)^2}\right) du \\
&= \frac{1}{3} \int \left(u^3-1\right)^2 u^{-1} \left(\frac{-3u^2}{\left(u^3-1\right)^2}\right) du \\
&= -\int u du = -\frac{u^2}{2}
\end{aligned}$$

deshaciendo el segundo cambio

$$-\frac{\left(\sqrt[3]{\frac{1+t}{t}}\right)^2}{2} = -\frac{1}{2} \left(\frac{1+t}{t}\right)^{2/3}$$

y finalmente el primero $x^3 = t$

$$\int \frac{1}{x^3 \sqrt[3]{x^3+1}} dx = -\frac{1}{2} \left(\frac{1+x^3}{x^3}\right)^{2/3} + C = -\frac{1}{2} \frac{\left(1+x^3\right)^{2/3}}{x^2} + C$$

b) Interal de tipo general

$$\int \frac{x^2}{\sqrt[3]{(2+x)^2}} dx = \int x^2 (2+x)^{-2/3} dx$$

hacemos el cambio

$$x = 2t \Rightarrow t = \frac{1}{2}x \Rightarrow dx = 2dt$$

para transformarla en integral binómica de tipo I:

$$\int x^2 (2+x)^{-2/3}\, dx = \int 4t^2 (2+2t)^{-2/3}\, 2dt = \int 4t^2 (1+t)^{-2/3}\, 2dt = 2^{7/3} \int t^2 (1+t)^{-2/3}\, dt$$

En este caso, el exponente de t es un número entero, por tanto, hacemos el cambio

$$1 + t = u^3 \Rightarrow t = u^3 - 1$$

donde el exponente es el denominador de la potencia no entera de $(1+t)$
En este caso

$$dt = 3u^2 du$$

de forma que

$$\begin{aligned} 2^{7/3} \int t^2 (1+t)^{-2/3}\, dt &= 2^{7/3} \int \left(u^3-1\right)^2 \left(u^3\right)^{-2/3} 3u^2 du = 2^{7/3} \int 3\left(u^3-1\right)^2 du \\ &= 2^{7/3} \int 3\left(u^6 - 2u^3 + 1\right) du \\ &= 2^{7/3} \left(\frac{3}{7}u^7 - \frac{3}{2}u^4 + 3u\right) \end{aligned}$$

deshaciendo el segundo cambio

$$u = (1+t)^{1/3} \Rightarrow 2^{7/3}\left(\frac{3}{7}\left((1+t)^{1/3}\right)^7 - \frac{3}{2}\left((1+t)^{1/3}\right)^4 + 3\left((1+t)^{1/3}\right)\right)$$

y finalmente el primero $t = \frac{x}{2}$

$$\begin{aligned} \int x^2 (2+x)^{-2/3}\, dx &= 2^{7/3}\left(\frac{3}{7}\left((1+t)^{1/3}\right)^7 - \frac{3}{2}\left((1+t)^{1/3}\right)^4 + 3\left((1+t)^{1/3}\right)\right) \\ &= 2^{7/3}\left(\frac{3}{7}\left(1+\frac{x}{2}\right)^{7/3} - \frac{3}{2}\left(1+\frac{x}{2}\right)^{4/3} + 3\left(1+\frac{x}{2}\right)^{1/3}\right) \\ &= 2^{7/3}\left(\frac{3}{7}\frac{(x+2)^{7/3}}{2^{7/3}} - \frac{3}{2^{7/3}}(x+2)^{4/3} + \frac{3}{2^{1/3}}(x+2)^{1/3}\right) \\ &= \frac{3}{7}(x+2)^{7/3} - 3(x+2)^{4/3} + 12(x+2)^{1/3} \end{aligned}$$

$c)$ Interal de tipo general

$$\int \sqrt{\frac{1+2x^{-1}}{x}} dx = \int x^{-1/2} \left(1+2x^{-1}\right)^{1/2} dx$$

hacemos el cambio

$$2x^{-1} = t \Rightarrow x = 2t^{-1} \Rightarrow dx = -2t^{-2}dt$$

para transformarla en integral binómica de tipo I:

$$\begin{aligned} \int x^{-1/2}\left(1+2x^{-1}\right)^{1/2} dx &= \int \left(2t^{-1}\right)^{-1/2} (1+t)^{1/2} \left(-2t^{-2}\right) dt \\ &= \int 2^{-1/2} t^{1/2} (1+t)^{1/2} \left(-2t^{-2}\right) dt \\ &= -2^{1/2} \int t^{-3/2} (1+t)^{1/2}\, dt \end{aligned}$$

En este caso la suma de exponentes

$$-\frac{3}{2}+\frac{1}{2}=-\frac{2}{2}=-1\in\mathbb{Z}$$

si es un número entero, así que multiplicamos y dividimos por $t^{\beta}=t^{1/2}$

$$-2^{1/2}\int t^{-3/2}\left(1+t\right)^{1/2}dt=-2^{1/2}\int t^{-3/2}\left(1+t\right)^{1/2}\frac{t^{1/2}}{t^{1/2}}dt$$

y reagrupamos

$$-2^{1/2}\int t^{-1}\left(\frac{1+t}{t}\right)^{1/2}dt$$

finalmente hacemos el cambio

$$\frac{1+t}{t}=u^2\Rightarrow u=\sqrt{\frac{1+t}{t}}$$

$$1+t=tu^2\Rightarrow 1=t\left(u^2-1\right)\Rightarrow t=\frac{1}{u^2-1}\Rightarrow dt=\frac{-2u}{\left(u^2-1\right)^2}du$$

con lo que la integral se transforma en

$$\begin{aligned}
-2^{1/2}\int t^{-1}\left(\frac{1+t}{t}\right)^{1/2}dt &= -2^{1/2}\int\left(\frac{1}{u^2-1}\right)^{-1}\left(u^2\right)^{1/2}\left(\frac{-2u}{\left(u^2-1\right)^2}\right)du\\
&= 2^{3/2}\int\left(u^2-1\right)u^2\left(\frac{1}{\left(u^2-1\right)^2}\right)du\\
&= 2^{3/2}\int\frac{u^2}{u^2-1}du=2^{3/2}\int\left(1+\frac{1}{u^2-1}\right)du\\
&= 2^{3/2}\int\frac{u^2}{u^2-1}du=2^{3/2}\left(\int du+\int\frac{1}{u^2-1}du\right)\\
&= 2^{3/2}\left(\int du+\int\frac{\frac{1}{2}}{u-1}du+\int\frac{-\frac{1}{2}}{u+1}du\right)\\
&= 2^{3/2}\left(u+\frac{1}{2}\ln\left(u-1\right)-\frac{1}{2}\ln\left(u+1\right)\right)\\
&= 2^{1/2}\left(2u+\ln\frac{u-1}{u+1}\right)
\end{aligned}$$

deshaciendo el segundo cambio $u=\left(\frac{1+t}{t}\right)^{1/2}$

$$2^{1/2}\left(2u+\ln\frac{u-1}{u+1}\right)=2^{1/2}\left(2\left(\frac{1+t}{t}\right)^{1/2}+\ln\frac{\left(\frac{1+t}{t}\right)^{1/2}-1}{\left(\frac{1+t}{t}\right)^{1/2}+1}\right)$$

y ahora el primero $2x^{-1}=t$

$$\int\sqrt{\frac{1+2x^{-1}}{x}}dx=2^{1/2}\left(2\left(\frac{1+2x^{-1}}{2x^{-1}}\right)^{1/2}+\ln\frac{\left(\frac{1+2x^{-1}}{2x^{-1}}\right)^{1/2}-1}{\left(\frac{1+2x^{-1}}{2x^{-1}}\right)^{1/2}+1}\right)+C$$

Simplificando

$$\frac{1+2x^{-1}}{2x^{-1}}=\frac{x+2}{2}$$

$$\begin{aligned}\int \sqrt{\frac{1+2x^{-1}}{x}}dx &= 2^{1/2}\left(2\left(\frac{x+2}{2}\right)^{1/2}+\ln\frac{\left(\frac{x+2}{2}\right)^{1/2}-1}{\left(\frac{x+2}{2}\right)^{1/2}+1}\right)+C\\ &= 2\left(x+2\right)^{1/2}+2^{1/2}\ln\frac{\left(x+2\right)^{1/2}-2^{1/2}}{\left(x+2\right)^{1/2}+2^{1/2}}+C\end{aligned}$$

d) Interal de tipo general

$$\int \frac{\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[6]{2+x^{-2}}}dx = \int x^{2/3}\left(2+x^{-2}\right)^{-1/6}dx$$

hacemos el cambio

$$x^{-2}=2t \Rightarrow x = 2^{-1/2}t^{-1/2} \Rightarrow dx = -\frac{2^{-1/2}}{2}t^{-3/2}dt = -2^{-3/2}t^{-3/2}dt$$

para transformarla en integral binómica de tipo I:

$$\begin{aligned}\int x^{2/3}\left(2+x^2\right)^{-1/6}dx &= \int\left(2^{-1/2}t^{-1/2}\right)^{2/3}\left(2+2t\right)^{-1/6}\left(-2^{-3/2}t^{-3/2}\right)dt\\ &= -\int 2^{-1/3}t^{-1/3}2^{-1/6}\left(1+t\right)^{-1/6}2^{-3/2}t^{-3/2}dt\\ &= -\int 2^{-2}t^{-11/6}\left(1+t\right)^{-1/6}dt\end{aligned}$$

En este caso la suma de exponentes

$$-\frac{11}{6}-\frac{1}{6}=-\frac{12}{6}=-2\in\mathbb{Z}$$

si es un número entero, así que multiplicamos y dividimos por $t^{\beta}=t^{-1/6}$

$$-\int 2^{-2}t^{-11/6}\left(1+t\right)^{-1/6}dt = -\int 2^{-2}t^{-11/6}\left(1+t\right)^{-1/6}\frac{t^{-1/6}}{t^{-1/6}}dt$$

y reagrupamos

$$-\frac{1}{4}\int t^{-2}\left(\frac{1+t}{t}\right)^{-1/6}dt$$

finalmente hacemos el cambio

$$\frac{1+t}{t}=u^6 \Rightarrow u=\sqrt[6]{\frac{1+t}{t}}$$

$$1+t=tu^6 \Rightarrow 1=t\left(u^6-1\right) \Rightarrow t=\frac{1}{u^6-1} \Rightarrow dt=\frac{-6u^5}{\left(u^6-1\right)^2}du$$

con lo que la integral se transforma en

$$\begin{aligned}-\frac{1}{4}\int t^{-2}\left(\frac{1+t}{t}\right)^{-1/6}dt &= -\frac{1}{4}\int\left(\frac{1}{u^6-1}\right)^{-2}\left(u^6\right)^{-1/6}\left(\frac{-6u^5}{\left(u^6-1\right)^2}\right)du\\ &= -\frac{1}{4}\int\left(u^6-1\right)^2u^{-1}\left(\frac{-6u^5}{\left(u^6-1\right)^2}\right)du\\ &= -\frac{1}{4}\int\left(u^6-1\right)^2u^{-1}\left(\frac{-6u^5}{\left(u^6-1\right)^2}\right)du\\ &= \frac{1}{4}\int 6u^4du=\frac{6}{4}\frac{u^5}{5}=\frac{3}{10}u^5\end{aligned}$$

deshaciendo el segundo cambio $u = \left(\frac{1+t}{t}\right)^{1/6}$

$$\frac{3}{10}u^5 = \frac{3}{10}\left(\frac{1+t}{t}\right)^{5/6}$$

y ahora el primero $x^{-2} = 2t \Rightarrow t = \frac{1}{2x^2}$

$$\int x^{2/3}\left(2+x^2\right)^{-1/6}dx = \frac{3}{10}\left(\frac{1+\frac{1}{2x^2}}{\frac{1}{2x^2}}\right)^{5/6} + C$$

Simplificando

$$\frac{1+\frac{1}{2x^2}}{\frac{1}{2x^2}} = 2x^2+1$$

$$\int x^{2/3}\left(2+x^2\right)^{-1/6}dx = \frac{3}{10}\left(2x^2+1\right)^{5/6} + C.$$

e) Interal de tipo general

$$\int \frac{\sqrt{x}}{2+\sqrt{x}}dx = \int x^{1/2}\left(2+x^{1/2}\right)^{-1}dx$$

hacemos el cambio

$$x^{1/2} = 2t \Rightarrow x = 4t^2 \Rightarrow dx = 8tdt$$

para transformarla en integral binómica de tipo I:

$$\begin{aligned}
\int x^{1/2}\left(2+x^{1/2}\right)^{-1}dx &= \int (2t)(2+2t)^{-1}8tdt \\
&= 8\int t^2(1+t)^{-1}dt = 8\int \frac{t^2}{1+t}dt \\
&= 8\int\left(t-1+\frac{1}{1+t}\right)dt \\
&= 8\left(\frac{t^2}{2} - t + \ln(1+t)\right)
\end{aligned}$$

Deshaciendo el cambio $t = \frac{x^{1/2}}{2}$

$$\begin{aligned}
\int x^{1/2}\left(2+x^{1/2}\right)^{-1}dx &= 8\left(\frac{x}{8} - \frac{x^{1/2}}{2} + \ln\left(1+\frac{x^{1/2}}{2}\right)\right) + C \\
&= x - 4\sqrt{x} + 8\ln\frac{2+\sqrt{x}}{2} + C
\end{aligned}$$

f) Interal de tipo general

$$\int \frac{1}{x^{\frac{2}{3}}\sqrt{1+x^{-\frac{1}{3}}}}dx = \int x^{-2/3}\left(1+x^{1/3}\right)^{-\frac{1}{2}}dx$$

hacemos el cambio

$$x^{1/3} = t \Rightarrow x = t^3 \Rightarrow dx = 3t^2dt$$

para transformarla en integral binómica de tipo I:

$$\begin{aligned}
\int x^{-2/3}\left(1+x^{1/3}\right)^{-\frac{1}{2}}dx &= \int \left(t^3\right)^{-2/3}(1+t)^{-\frac{1}{2}}3t^2dt \\
&= 3\int (1+t)^{-\frac{1}{2}}dt
\end{aligned}$$

Hacemos cambio

$$1 + t = u^2 \Rightarrow dt = 2udu$$

$$3 \int \left(u^2\right)^{-\frac{1}{2}} 2udu = \int 6du = 6u$$

y deshaciendo el 2^o cambio

$$6u = 6\sqrt{1+t}$$

y ahora el primero

$$6\sqrt{1+t} = 6\sqrt{1+x^{1/3}}$$

luego

$$\int x^{-2/3} \left(1 + x^{1/3}\right)^{-\frac{1}{2}} dx = 6\sqrt{1+x^{1/3}} + C$$