1. Expresa el siguiente límite como una integral definida adecuada y calcula su valor

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{2}{(n+2)^2}+\cdots+\frac{n}{(n+n)^2}\right)$$

Solución: Trataremos de expresar el límite como una suma de Riemann que, recordemos, tiene la forma

$$S_R=\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k-x_{k-1})$$

donde $\xi_k \in [x_{k-1}-x_k]$. Tomaremos una partición con puntos equidistantes, es decir, $x_k - x_{k-1} = \frac{b-a}{n}$ para $k = 1,\ldots,n$. Esta simplificación permite expresar la suma de Riemann como

$$S_R=\frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)$$

Consideremos ahora el término del límite

$$\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{2}{(n+2)^2}+\cdots+\frac{n}{(n+n)^2}=\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{(n+k)^2},$$

Si ahora sacamos n factor común en el denominador, podemos poner

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{(n+k)^2}=\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{\left(n\left(1+\frac{k}{n}\right)\right)^2}=\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2\left(1+\frac{k}{n}\right)^2}$$

o tomando uno de los factores n del denominador y poniéndolo en el numerador

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2\left(1+\frac{k}{n}\right)^2}=\sum_{k=1}^{n}\frac{\frac{k}{n}}{n\left(1+\frac{k}{n}\right)^2}$$

el otro factor no depende de k y puede salir factor común en la suma

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\frac{k}{n}}{\left(1+\frac{k}{n}\right)^2}$$

y comparando con la expresión de la suma de Riemann, está claro que se trata del intervalo $[0,1]$ que ha sido dividido en n partes y se ha tomado $\xi_k = \frac{k}{n}$, el extremo superior del intervalo, la función utilizada es

$$f(x)=\frac{x}{(1+x)^2}$$

Cuando $n \to \infty$, entonces la suma de Riemann se acerca al valor de la integral

$$\int_0^1 \frac{x}{(1+x)^2} dx$$

que es una integral racional que podemos resolver descomponiendo en fracciones simples, el denominador tiene una raíz real doble

$$\int_0^1 \frac{x}{(1+x)^2} dx = \int_0^1 \frac{1}{x+1} - \frac{1}{(x+1)^2} dx = \left[\ln(x+1) + \frac{1}{x+1} \right]_0^1 = \ln(2) - \frac{1}{2}.$$

2. Expresa el siguiente límite como una integral definida adecuada y calcula su valor

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{(n+1)^2} + \frac{n}{(n+2)^2} + \cdots + \frac{n}{(n+n)^2} \right)$$

Solución: Se resuelve con el mismo mecanismo que el caso anterior

$$\frac{n}{(n+1)^2} + \frac{n}{(n+2)^2} + \cdots + \frac{n}{(n+n)^2} = \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{(n+k)^2},$$

Si ahora sacamos n factor común en el denominador, podemos poner

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{n}{(n+k)^2} = \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{\left(n\left(1+\frac{k}{n}\right)\right)^2} = \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2\left(1+\frac{k}{n}\right)^2}$$

simplificamos un factor n

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2\left(1+\frac{k}{n}\right)^2} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n\left(1+\frac{k}{n}\right)^2} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\left(1+\frac{k}{n}\right)^2}$$

Por tanto la función utilizada es

$$f(x) = \frac{1}{(1+x)^2}$$

y el límite se puede calcular usando la integral definida

$$\int_0^1 \frac{1}{(1+x)^2} dx = \left[-\frac{1}{(1+x)} \right]_0^1 = \frac{1}{2}$$

3. Expresa el siguiente límite como una integral definida adecuada y calcula su valor

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n^3+1} + \frac{2^2}{n^3+2^3} + \cdots + \frac{n^2}{n^3+n^3} \right)$$

Solución: Como en los ejercicios previos, expresamos el límite como un sumatorio

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{n^3+k^3}$$

Sacando n^3 factor común en el denominador, el sumatorio se puede expresar como

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{n^3\left(1+\frac{k^3}{n^3}\right)}$$

subimos dos factores n al numerador

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\frac{k^2}{n^2}}{n\left(1+\frac{k^3}{n^3}\right)}$$

y sacamos el factor n fuera del sumatorio

$$\frac{1}{n}\sum \frac{\frac{k^2}{n^2}}{1+\frac{k^3}{n^3}}$$

y se deduce que la función es

$$f(x)=\frac{x^2}{1+x^3}$$

y el límite se puede calcular con la integral definida

$$\int_0^1 \frac{x^2}{1+x^3}dx=\frac{1}{3}\int_0^1 \frac{3x^2}{1+x^3}dx=\left[\frac{1}{3}\ln\left(1+x^3\right)\right]_0^1=\frac{1}{3}\ln(2)$$

4. Expresa el siguiente límite como una integral definida adecuada y calcula su valor

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{4n+1}+\cdots+\sqrt{4n+n}}{n^{3/2}}$$

Solución: Igual que en los problemas anteriores

$$\frac{\sqrt{4n+1}+\cdots+\sqrt{4n+n}}{n^{3/2}}=\frac{\sqrt{4n+1}}{n^{3/2}}+\frac{\sqrt{4n+2}}{n^{3/2}}+\cdots+\frac{\sqrt{4n+n}}{n^{3/2}}=\sum_{k=1}^{n}\frac{\sqrt{4n+k}}{n^{3/2}}$$

Por una parte

$$n^{3/2}=n\cdot n^{1/2}$$

por tanto

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{\sqrt{4n+k}}{n\cdot n^{1/2}}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\sqrt{4n+k}}{n^{1/2}}$$

incluimos el denominador dentro de la raíz

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{\frac{4n+k}{n}}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{\frac{4n}{n}+\frac{k}{n}}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{4+\frac{k}{n}}$$

La función será en este caso

$$f(x)=\sqrt{4+x}$$

y la integral definida

$$\begin{aligned}\int_0^1 \sqrt{4+x}dx &= \int_0^1 (4+x)^{1/2}\, dx = \left[\frac{(4+x)^{3/2}}{3/2}\right]_0^1 = \frac{(4+1)^{3/2}}{3/2} - \frac{(4+0)^{3/2}}{3/2} \\ &= \frac{2}{3}\left[5^{3/2} - 4^{3/2}\right] = \frac{2}{3}\left[\sqrt{125} - \sqrt{64}\right] = \frac{2}{3}\left[\sqrt{125} - 8\right]\end{aligned}$$

5. Sea la función

$$f\left(x\right) = \frac{1}{1+x^2}$$

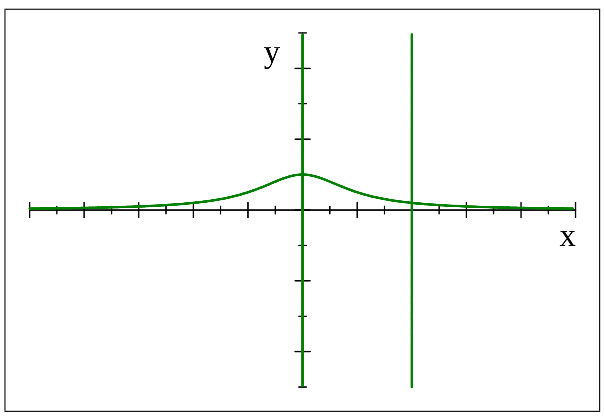
   a) Halla el área determinada por las rectas $x=0$, $x=t>0$, el eje OX y $f\left(x\right)$.

   b) Calcula el volumen obtenido al girar laregión anterior alrededor de $y=0$.

   c) ¿Cuáles son los valores correspondientes del área y del volumen anteriores si hacemos $t \to \infty$?

Solución:

a)



$$F\left(t\right) = \int_0^t \frac{1}{1+x^2}dx = \left[\arctan x\right]_0^t = \arctan t$$

b) El volumen alrededor del eje OX

$$V_{OX} = \int_0^t \pi f\left(x\right)^2 dx = \pi \int_0^t \frac{1}{\left(1+x^2\right)^2}dx$$

Como son raíces complejas múltiples (i y $-i$), usaremos el método de Hermite para encontrar una primitiva

$$\frac{1}{\left(1+x^2\right)^2} = \frac{Ax+B}{1+x^2} + H'\left(x\right)$$

siendo el término de Hermite es

$$H\left(x\right) = \frac{Cx+D}{1+x^2} \Rightarrow H'\left(x\right) = \frac{C\left(1+x^2\right) - 2x\left(Cx+D\right)}{\left(1+x^2\right)^2} = \frac{-Cx^2 - 2Dx + C}{\left(1+x^2\right)^2}$$

es decir

$$\begin{aligned}\frac{1}{\left(1+x^2\right)^2} &= \frac{Ax+B}{1+x^2}+\frac{-Cx^2-2Dx+C}{\left(1+x^2\right)^2}\\ &= \frac{(Ax+B)\left(1+x^2\right)-Cx^2-2Dx+C}{\left(1+x^2\right)^2}\\ &= \frac{Ax^3+x^2\left(B-C\right)+x\left(A-2D\right)+B+C}{\left(1+x^2\right)^2}\end{aligned}$$

e igualando numeradores

$$1=Ax^3+x^2\left(B-C\right)+x\left(A-2D\right)+B+C$$

entonces

$$\begin{aligned}A &= 0\\ B-C &= 0\\ A-2D &= 0\\ B+C &= 1\end{aligned}$$

cuya solución es $A=D=0$ y $B=C=\frac{1}{2}$. De modo que

$$\frac{1}{\left(1+x^2\right)^2}=\frac{\frac{1}{2}}{1+x^2}+\left(\frac{\frac{1}{2}x}{1+x^2}\right)'$$

e integrando término a término

$$\int\frac{1}{\left(1+x^2\right)^2}dx=\frac{1}{2}\int\frac{1}{1+x^2}+\frac{\frac{1}{2}x}{1+x^2}=\frac{1}{2}\arctan x+\frac{1}{2}\frac{x}{1+x^2}$$

y podemos calcular la integral definida

$$\int_0^t\frac{1}{\left(1+x^2\right)^2}dx=\left[\frac{1}{2}\arctan x+\frac{1}{2}\frac{x}{1+x^2}\right]_0^t=\frac{1}{2}\arctan t+\frac{1}{2}\frac{t}{1+t^2}$$

Siendo el volumen pedido

$$V_{OX}=\pi\left(\frac{1}{2}\arctan t+\frac{1}{2}\frac{t}{1+t^2}\right)$$

c) Si hacemos $t\to\infty$ en la expresión anterior:

$$\lim_{t\to\infty}\left(\frac{1}{2}\arctan t+\frac{1}{2}\frac{t}{1+t^2}\right)=\frac{\pi^2}{4}$$

6. Calcula

$$\lim_{x\to 0} \frac{\int_0^{x^2} \operatorname{sen}(t^2)\, dt}{x^6}$$

Solución: Si calculamos directamente el límite teniendo en cuenta que $\int_a^a f(x)\, dx = 0$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\int_0^{x^2} \operatorname{sen}(t^2)\, dt}{x^6} = \frac{\int_0^{0} \operatorname{sen}(t^2)\, dt}{0^6} = \frac{0}{0}$$

Luego podemos utilizar la Regla de L'Hôpital

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}\left(\left(x^2\right)^2\right) 2x}{6x^5} = \lim_{x\to 0} \frac{2x \operatorname{sen}(x^4)}{6x^5} = \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x^4)}{3x^4}$$

En lugar de seguir utilizando la regla de L'Hôpital en este paso, utilizaremos infinitésimos equivalentes puesto que

$$\operatorname{sen} x \sim x \text{ cuando } x \to 0$$

podemos poner

$$\operatorname{sen} x^4 \sim x^4 \text{ cuando } x \to 0$$

de forma que

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x^4)}{3x^4} = \lim_{x\to 0} \frac{x^4}{3x^4} = \frac{1}{3}.$$

7. Calcula

$$\lim_{x\to 0} \frac{\int_{x^2}^{x} \operatorname{sen}(t^2)\, dt}{x^2}$$

Solución: Si calculamos directamente el límite teniendo en cuenta que $\int_a^a f(x)\, dx = 0$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\int_{x^2}^{x} \operatorname{sen}(t^2)\, dt}{x^2} = \frac{\int_{0^2}^{0} \operatorname{sen}(t^2)\, dt}{0^2} = \frac{0}{0}$$

Luego podemos utilizar la Regla de L'Hôpital

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x^2) - \operatorname{sen}\left(\left(x^2\right)^2\right) 2x}{2x} = \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x^2) - 2x \operatorname{sen}(x^4)}{2x}$$

En lugar de seguir utilizando la regla de L'Hôpital en este paso, utilizaremos infinitésimos equivalentes puesto que

$$\operatorname{sen} x \sim x \text{ cuando } x \to 0$$

podemos poner

$$\operatorname{sen} x^2 \sim x^2 \text{ cuando } x \to 0$$

$$\operatorname{sen} x^4 \sim x^4 \text{ cuando } x \to 0$$

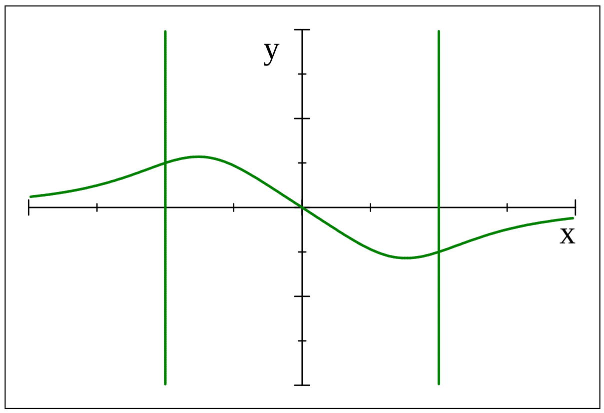
de forma que

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x^2) - 2x \operatorname{sen}(x^4)}{2x} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2 - 2xx^4}{2x} = 0.$$

8. Calcula el área de la región plana comprendida entre el eje X, la gráfica de la función

$$f(x) = -\frac{x}{1+x^4}$$

y limitada lateralmente por las rectas $x=-1$ y $x=1$.



Solución: El valor del área viene dado por

$$\int_{-1}^{1} \left| \frac{-x}{1+x^4} \right| dx$$

y observando la gráfica (o le valor de la función en cada subintervalo) podemos poner

$$\int_{-1}^{1} \left| \frac{-x}{1+x^4} \right| dx = \int_{-1}^{0} \frac{-x}{1+x^4} dx + \int_{0}^{1} \frac{x}{1+x^4} dx = -\int_{-1}^{0} \frac{x}{1+x^4} dx + \int_{0}^{1} \frac{x}{1+x^4} dx$$

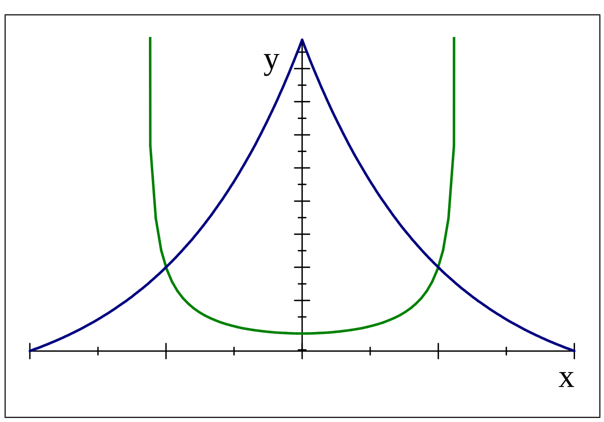
no obstante la gráfica es simétrica respecto al eje OY, podemos poner

$$\int_{-1}^{1} \left| \frac{-x}{1+x^4} \right| dx = 2\int_{0}^{1} \frac{x}{1+x^4} dx$$

que puede reescribirse como

$$2\int_{0}^{1} \frac{x}{1+x^4} dx = \int_{0}^{1} \frac{2x}{1+(x^2)^2} dx = \left[\arctan x^2\right]_0^1 = \frac{\pi}{4} - 0 = \frac{\pi}{4}.$$

9. Halla el área encerrada por las curvas $y = \frac{1}{\sqrt{4-3x^2}}$ e $y = e^{1-|x|}$, sabiendo que se cortan en $x=1$ y $x=-1$.



Solución: El área entre las curvas viene dada por la expresión

$$A = \int_{-1}^{1} |f(x) - g(x)|\, dx$$

donde $f(x) = e^{1-|x|}$ (color azul) y $g(x) = \frac{1}{\sqrt{4-3x^2}}$ (color verde). Teniendo en cuenta que la función $f(x)$ está en el intervalo de integración $[-1, 1]$ por encima de la curva $g(x)$ podemos quitar el valor absoluto y poner

$$A = \int_{-1}^{1} |f(x) - g(x)|\, dx = \int_{-1}^{1} \left(e^{1-|x|} - \frac{1}{\sqrt{4-3x^2}} \right) dx$$

y si ahora consideramos la definición de $g(x) = e^{1-|x|}$

$$g(x) = e^{1-|x|} = \begin{cases} e^{1-x} & x \geq 0 \\ \\ e^{1+x} & x < 0 \end{cases}$$

la integral se podrá poner como

$$\int_{-1}^{1} \left(e^{1-|x|} - \frac{1}{\sqrt{4-3x^2}} \right) dx = \int_{-1}^{0} \left(e^{1+x} - \frac{1}{\sqrt{4-3x^2}} \right) dx + \int_{0}^{1} \left(e^{1-x} - \frac{1}{\sqrt{4-3x^2}} \right) dx$$

También es posible, simetría respecto al eje OY, calcular sólo el área de la parte positiva, el área total será dos veces ese valor.

$$\int_{0}^{1} \left(e^{1-x} - \frac{1}{\sqrt{4-3x^2}} \right) dx = \int_{0}^{1} e^{1-x} dx - \int_{0}^{1} \frac{1}{\sqrt{4-3x^2}} dx$$

La primera integral se hace mediante el siguiente cambio de variable

$$\begin{aligned} 3x^2 &= 4 \operatorname{sen}^2 t \Rightarrow x^2 = \frac{4}{3} \operatorname{sen}^2 t \\ x &= \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{sen} t \\ dx &= \frac{2}{\sqrt{3}} \cos t \; dt \end{aligned}$$

Los nuevos extremos de integración son

$$x = 0 \Rightarrow 0 = \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{sen} t \Rightarrow 0 = \operatorname{sen} t \Rightarrow t = 0$$

$$x = 1 \Rightarrow 1 = \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{sen} t \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \operatorname{sen} t \Rightarrow t = \frac{\pi}{3}$$

luego

$$\begin{aligned} \int_{0}^{1} \frac{1}{\sqrt{4-3x^2}} dx &= \int_{0}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\sqrt{4 - 4\operatorname{sen}^2 t}} \frac{2}{\sqrt{3}} \cos t \; dt \\ &= \int_{0}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\sqrt{3}} dt = \left[\frac{x}{\sqrt{3}} \right]_{0}^{\pi/3} = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}. \end{aligned}$$

La segunda integral es inmediata

$$\int_0^1 e^{1-x}dx = \int_0^1 e^{1-x}dx = \left[-e^{1-x}\right]_0^1 = e - 1$$

El área buscada es

$$A = 2\left(\int_0^1 e^{1-x}dx - \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{4-3x^2}}dx\right) = 2\left(e - 1 - \frac{\pi}{3\sqrt{3}}\right)$$

10. Sea la función

$$f(x) = \tan x;\ x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$$

a) Calcula las primitivas de $f(x)$.

b) Halla la longitud de la curva $y = F(x)$ para $x \in \left[0, \frac{\pi}{6}\right]$, siendo $F(x)$ una primitiva de $f(x)$.

c) Estudia la convergencia de la integral impropia de segunda especie

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \tan x dx$$

Solución:

a)

$$\int \tan x\ dx = \int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}dx = -\ln\cos x = \ln\frac{1}{\cos x} = \ln\sec x + C$$

b) Utilizando la fórmula correspondiente a curvas planas y teniendo en cuenta que $F'(x) = f(x)$, tendremos

$$L = \int_0^{\pi/6} \sqrt{1 + (F'(x))^2}dx = \int_0^{\pi/6} \sqrt{1+\tan^2 x}dx$$

Ahora realizamos el cambio de variable

$$\begin{aligned} \tan x &= u \\ \left(1+\tan^2 x\right) dx &= du \Rightarrow dx = \frac{1}{1+\tan^2 x}du = \frac{1}{1+u^2}du \end{aligned}$$

y los extremos de integración serían

$$\begin{aligned} \text{Si } x &= 0 \Rightarrow u = \tan 0 = 0 \\ \text{Si } x &= \frac{\pi}{6} \Rightarrow u = \tan\frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}} \end{aligned}$$

y tendremos

$$\int_0^{\pi/6} \sqrt{1+\tan^2 x}dx = \int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \sqrt{1+u^2}\frac{1}{1+u^2}du = \int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \frac{1}{\sqrt{1+u^2}}du$$

Para resolver esta integral utilizamos otro cambio de variable

$$u = \operatorname{Sh} t \Rightarrow du = \operatorname{Ch} t \ dt$$

y los extremos de integración sería

$$\begin{aligned}
\text{Si } u &= 0 \Rightarrow 0 = \operatorname{Sh} t \Rightarrow t = \arg\operatorname{Sh} 0 = \ln\left(0+\sqrt{1+0^2}\right) = 0 \\
\text{Si } u &= \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{3}} = \operatorname{Sh} t \Rightarrow t = \arg\operatorname{Sh}\frac{1}{\sqrt{3}} = \ln\left(\frac{1}{\sqrt{3}} + \sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{3}}^2}\right) = \frac{1}{2}\ln 3
\end{aligned}$$

en el último apartado se han utilizado las propiedades de la función ln. La integral con este cambio queda como

$$\int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \frac{1}{\sqrt{1+u^2}}du = \int_0^{\frac{1}{2}\ln 3} \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{Sh}^2 t}}\operatorname{Ch} t dt = \int_0^{\frac{1}{2}\ln 3} dt = [t]_0^{\frac{1}{2}\ln 3} = \frac{1}{2}\ln 3.$$

c) La integral

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \tan x dx$$

es de segunda especie, puesto que en cada uno de los extremos, el integrando tiene una discontinuidad y toma valores $-\infty$ y ∞ respectivamente. Tendremos que calcular los siguientes límites

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \int_0^x \tan u du \text{ y } \lim_{x\to-\frac{\pi}{2}^{+-}} \int_x^0 \tan u du$$

En el apartado a, hemos calculado las primitivas de $\tan x$, luego

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \int_0^x \tan u du = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \left[\ln\frac{1}{\cos u}\right]_0^x = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \ln\frac{1}{\cos x} = \infty$$

Ya no es necesario calcular la otra y por tanto la integral es divergente.
Si queremos calcular el Valor Principal, entonces hay que calcular el siguiente límite

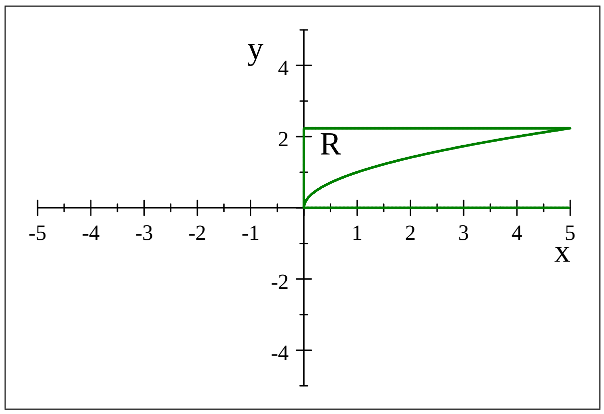
$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \int_{-x}^x \tan u du &= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \left[\ln\frac{1}{\cos u}\right]_{-x}^x \\
&= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \left[\ln\frac{1}{\cos x} - \ln\frac{1}{\cos(-x)}\right] \\
&= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \left[\ln\frac{1}{\cos x} - \ln\frac{1}{\cos x}\right] \\
&= 0
\end{aligned}$$

11. Sea R la región plana delimitada por las gráficas $y = 0$, $y = \sqrt{5}$, $x = 0$ y $x = y^2$. Determina el volumen del sólido generado al girar la región R alrededor del eje Y, mediante los dos siguientes métodos:

   a) Por secciones planas.

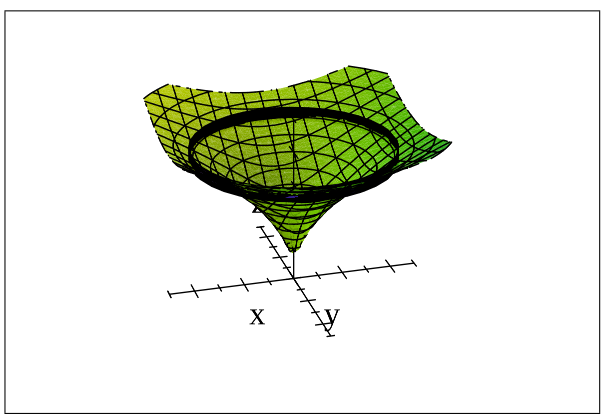
   b) Como un sólido de revolución

Solución: En la siguiente gráfica observamos la región R



a) Como en este caso se realiza la rotación alrededor del eje OY, tendremos que utilizar la fórmula del Volumen por secciones planas usando una función de y, es decir:

$$V = \int A(y)\, dy$$



Viendo la gráfica de la función está claro que $0 \leq y \leq \sqrt{5}$, luego estos son los extremos de la integral. En cada valor de y la sección plana (corte) de la gráfica en 3D es una circunferencia de centro el punto correspondiente en el eje OY y radio dado por el valor de la x, es decir $x = y^2$. El área de un círculo de radio $x = y^2$ es

$$A(x) = \pi x^2$$

es decir

$$A(y) = \pi \left(y^2\right)^2 = \pi y^4$$

y el volumen obtenido mediante este método es

$$V=\int_0^{\sqrt{5}}\pi y^4 dy=\left[\pi\frac{y^5}{5}\right]_0^{\sqrt{5}}=\pi\frac{\sqrt{5}^5}{5}=\pi 5^{3/2}$$

b) La fórmula que nos da el volumen de un sólido de revolución al girar el área bajo la curva alrededor del eje OY es

$$V_{OY}=2\pi\int xf(x)\,dx$$

Sin embargo lo que queremos calcular es el volumen del sólido que engendra el área sobre la curva alrededor del eje OY, luego no podemos usar la fórmula directamente. Sin embargo el volumen buscado se puede obtener al restar al cilindro engendrado por la curva $y=\sqrt{5}$ alrededor del eje OY, el volumen engendrado por el área bajo la curva, es decir

$$V=V_{CIL}-V_{OY}$$

siendo V_{CIL} el volumen del cilindro de radio $r=5$ (la x) y altura $h=\sqrt{5}$ (la y)

$$V_{CIL}=\pi r^2 h=\pi 5^2\sqrt{5}=\pi 5^{5/2}$$

y el volumen del sólido engendrado por el área bajo la curva $x=y^2$ será

$$V_{OY}=2\pi\int_0^5 xydx=2\pi\int_0^5 x\sqrt{x}dx=2\pi\int_0^5 x^{3/2}dx=\left[2\pi\frac{x^{5/2}}{5/2}\right]_0^5=4\pi\frac{5^{5/2}}{5}$$

y el volumen buscado es

$$V=V_{CIL}-V_{OY}=\pi 5^{5/2}-4\pi\frac{5^{5/2}}{5}=\pi 5^{5/2}\left(1-\frac{4}{5}\right)=\pi 5^{5/2}\frac{1}{5}=\pi 5^{3/2}$$

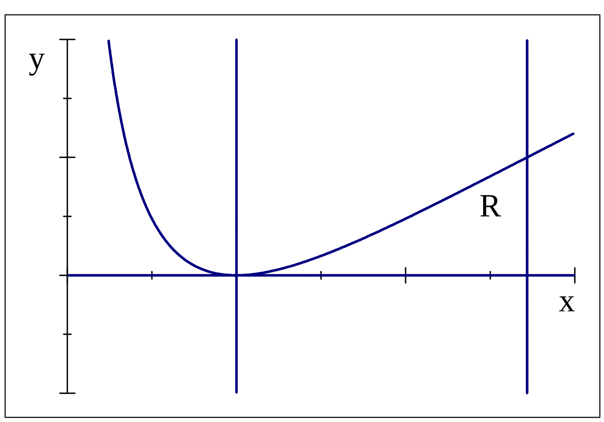
como en el apartado anterior.

12. Sea R la región plana delimitada por la gráfica de la función $f(x)=(\ln x)^2$, el eje X y las rectas verticales $x=1, x=e$. Se pide:

a) Calcula el área de R.

b) Calcula el volumen del sólido obtenido al girar R alrededor del eje Y.

Solución: La región R está representada en la siguiente gráfica:



a) El área de R es el área bajo la curva $f(x)$ entre los valores 1 y e

$$A = \int_1^e (\ln x)^2 \, dx$$

Podemos encontrar una primitiva del integrando, haciendo el cambio de variable

$$\begin{aligned} \ln(x) &= t \Rightarrow x = e^t \\ \frac{1}{x} dx &= dt \Rightarrow dx = x dt = e^t dt \end{aligned}$$

Los extremos de integración son

$$\begin{aligned} x &= 1 \Rightarrow \ln(1) = t \Rightarrow t = 0 \\ x &= e \Rightarrow \ln(e) = t \Rightarrow t = 1 \end{aligned}$$

por tanto

$$\int_1^e (\ln x)^2 \, dx = \int_0^1 t^2 e^t dt$$

que resolvemos usando integración por partes dos veces. Tomamos primero $u = t^2$ y $v' = e^t$, por lo que $u' = 2t$ y $v = e^t$

$$\int t^2 e^t dt = t^2 e^t - \int_0^1 2te^t dt$$

y en segundo lugar $u = 2t$ y $v' = e^t$, de ahí que $u' = 2$ y $v = e^t$

$$\begin{aligned} \int t^2 e^t du &= t^2 e^t - \int 2te^t dt = t^2 e^t - \left(2te^t - \int 2e^t dt\right) \\ &= t^2 e^t - 2te^t + 2e^t = e^t \left(t^2 - 2t + 2\right) \end{aligned}$$

y usando Barrow

$$\begin{aligned} \int_0^1 t^2 e^t du &= \left[e^t \left(t^2 - 2t - 2\right)\right]_0^1 = \left[e \left(1^2 - 2 + 2\right)\right] - \left[e^0 \left(0^2 - 2 \cdot 0 + 2\right)\right] \\ &= e - 2 \end{aligned}$$

b) El volumen del sólido que se obtiene al girar el área bajo la curva alrededor de OY, viene dado por

$$V_{OY} = 2\pi \int_1^e x f(x) \, dx = 2\pi \int_1^e x \left(\ln(x)^2\right) dx$$

integral que se calcula, primero haciendo el mismo cambio que el apartado anterior para obtener

$$V_{OY} = \int_0^1 t^2 e^{2t} dt$$

y si ahora cambiamos $2t = s$ con $dt = \frac{1}{2}ds$ y com extremos de integración 0 y 2 respectivamente

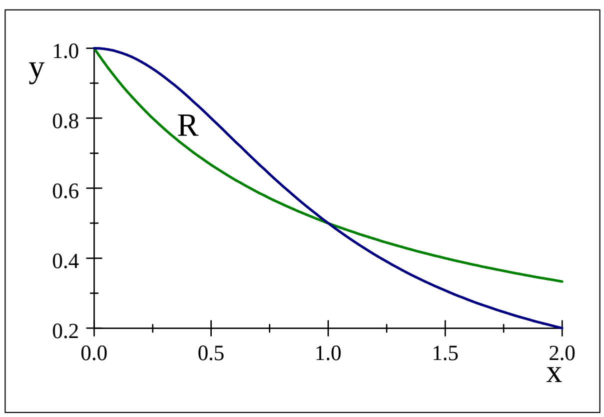
$$\int_0^2 \left(\frac{s}{2}\right)^2 e^s \frac{1}{2} ds = \frac{1}{8}\int_0^2 s^2 e^s ds$$

La función del integrando es la del apartado anterior después del cambio, sólo cambian los extremos,

$$\begin{aligned} \frac{1}{8}\int_0^2 s^2 e^s ds &= \frac{1}{8}\left[s^2 e^s - 2se^s + 2e^s\right]_0^2 \\ &= \frac{1}{8}\left(\left[4e^2 - 4e^2 + 2e^2\right] - [2]\right) \\ &= \frac{e^2}{4} - \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

13. Calcula, en el primer cuadrante, el área comprendiada entre las gráficas de las funciones

$$f(x) = \frac{1}{1+x} \text{ y } g(x) = \frac{1}{1+x^2}$$



Solución: Veamos los puntos de corte

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow \frac{1}{1+x} = \frac{1}{1+x^2} \Leftrightarrow 1 + x = 1 + x^2 \Leftrightarrow x = x^2 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \end{cases}$$

Luego el área buscada es

$$A = \int_0^1 |f(x) - g(x)|\, dx$$

Tenemos

$$x \in [0,1] \Rightarrow 0 \le x \le 1 \Rightarrow 0 \le x^2 \le x \Rightarrow 1 \le 1 + x^2 \le 1 + x$$

y tomando inversos

$$\frac{1}{1+x^2} \ge \frac{1}{1+x}$$

luego en $[0,1]$ ocurre

$$g(x) \geq f(x)$$

y el área sería

$$\begin{aligned} A &= \int_0^1 g(x) - f(x)\, dx = \int_0^1 \left(\frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+x} \right) dx = [\arctan x - \ln(1+x)]_0^1 \\ &= [\arctan 1 - \ln(2)] - [\arctan 0 - \ln 1] = \frac{\pi}{4} - \ln(2). \end{aligned}$$

14. Calcula el área de los dos recintos en que la región limitada por la elipse

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1,$$

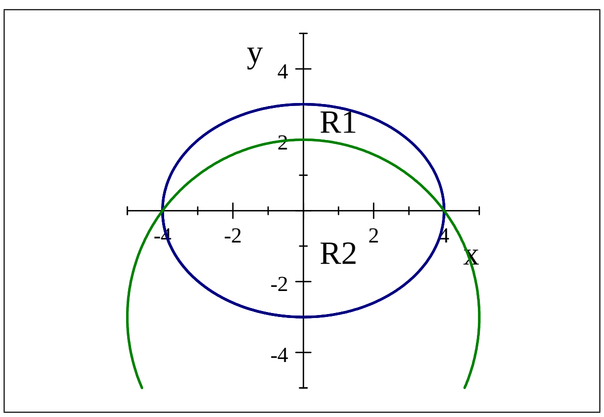
queda dividida mediante la circunferencia de centro $(0,-3)$ y radio 5.

Solución: La ecuación de la circunferencia es

$$x^2 + (y+3)^2 = 5^2,$$

y en la siguiente gráfica podemos ver las dos regiones en estudio

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$$



Queremos conocer el área de las regiones $R1$ y $R2$ y para ello utilizaremos los puntos de corte de ambas cónicas como extremos de integración. Estos puntos de cortes se obtienen resolviendo el sistema no lineal

$$\left\{ \begin{array}{c} \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1 \\ \\ x^2 + (y+3)^2 = 25 \end{array} \right.$$

Despejando x^2 de la segunda ecuación y sustituyendo en la primera

$$x^2 = 25 - (y+3)^2 \Rightarrow \frac{25 - (y+3)^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$$

Quitando denominadores y agrupando términos obtenemos

$$7y^2 - 54y = 0 \Rightarrow y\,(7y - 54) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ y = \frac{54}{7} \end{cases}$$

Y los valores para x serán

$$y = 0 \Rightarrow x^2 = 25 - 3^2 = 16 \Rightarrow x = \pm 4$$

$$y = \frac{54}{7} \Rightarrow x^2 = 25 - \left(\frac{54}{7} + 3\right)^2 = -\frac{4400}{49} \Rightarrow x \text{ no es real, así que no sirve}$$

Los puntos de corte son $(-4, 0)$ y $(4, 0)$. Despejamos la variable y en ambas cónicas. Para la elipse

$$y = \pm 3\sqrt{1 - \frac{x^2}{16}}$$

y para la circunferencia

$$y = -3 \pm \sqrt{25 - x^2}$$

Para el área de $R1$ vemos que la elipse está por encima de la circunferencia y ambas en el semiplano positivo $(y > 0)$ luego

$$A_{R1} = \int_{-4}^{4} \left(3\sqrt{1 - \frac{x^2}{16}}\right) - \left(-3 + \sqrt{25 - x^2}\right) dx$$

Para el área de $R2$ vemos que la elipse está por debajo de la circunferencia y además en el semiplano negativo, luego

$$A_{R2} = \int_{-4}^{4} \left(-3 + \sqrt{25 - x^2}\right) - \left(-3\sqrt{1 - \frac{x^2}{16}}\right) dx$$

Ambas integrales son del tipo

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}dx$$

que se resuelven mediante el cambio de variable

$$\begin{aligned} x^2 &= a^2 \operatorname{sen}^2 t \Rightarrow x = a \operatorname{sen} t \\ t &= \operatorname{arcsen} \frac{x}{a} \\ dx &= a \cos t dt \end{aligned}$$

y

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}dx = \int \sqrt{a^2 - a^2 \operatorname{sen}^2 t} a \cos t dt = \int a^2 \cos^2 t dt = a^2 \int \frac{1 + \cos 2t}{2} dt = a^2 \left(\frac{1}{2}t + \frac{\operatorname{sen} 2t}{4}\right)$$

y deshaciendo el cambio de variable

$$\begin{aligned}\int \sqrt{a^2-x^2}dx &= \frac{a^2}{2}\operatorname{arcsen}\frac{x}{a}+\frac{a^2}{4}2\operatorname{sen}t\sqrt{1-\operatorname{sen}^2 t}\\ &= \frac{a^2}{2}\operatorname{arcsen}\frac{x}{a}+\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}\end{aligned}$$

Podemos usarla para las dos integrales. La correspondiente a la circunferencia con $a=5$

$$\begin{aligned}\int_{-4}^{4}\sqrt{25-x^2}dx &= \left[\frac{25}{2}\operatorname{arcsen}\frac{x}{5}+\frac{x}{2}\sqrt{25-x^2}\right]_{-4}^{4}\\ &= \left[\frac{25}{2}\operatorname{arcsen}\frac{4}{5}+\frac{12}{2}\right]-\left[\frac{25}{2}\operatorname{arcsen}\frac{-4}{5}-\frac{12}{2}\right]\\ &= 25\operatorname{arcsen}\frac{4}{5}+12\end{aligned}$$

Mientras que para la integral que lleva la ecuación de la elipse el valor de $a=4$

$$\begin{aligned}\int_{-4}^{4}\sqrt{1-\frac{x^2}{16}}dx &= \frac{1}{4}\int_{-4}^{4}\sqrt{16-x^2}dx=\frac{1}{4}\left[8\operatorname{arcsen}\frac{x}{4}+\frac{x}{2}\sqrt{16-x^2}\right]_{-4}^{4}\\ &= \frac{1}{4}\left[8\operatorname{arcsen}1\right]-\frac{1}{4}\left[8\operatorname{arcsen}-1\right]\\ &= 2\pi\end{aligned}$$

y ya podemos calcular las dos regiones

$$\begin{aligned}A_{R1} &= \int_{-4}^{4}\left(3\sqrt{1-\frac{x^2}{16}}\right)-\left(-3+\sqrt{25-x^2}\right)dx\\ &= 3\int_{-4}^{4}\sqrt{1-\frac{x^2}{16}}dx+\int_{-4}^{4}3dx-\int_{-4}^{4}\sqrt{25-x^2}dx\\ &= 3\cdot 2\pi+24-\left(25\operatorname{arcsen}\frac{4}{5}+12\right)\\ &= 6\pi+12-25\operatorname{arcsen}\frac{4}{5}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_{R2} &= \int_{-4}^{4}\left(-3+\sqrt{25-x^2}\right)-\left(-3\sqrt{1-\frac{x^2}{16}}\right)dx \\
&= -\int_{-4}^{4}3dx+\int_{-4}^{4}\sqrt{25-x^2}dx+3\int_{-4}^{4}\sqrt{1-\frac{x^2}{16}}dx \\
&= -24+\left(25\,\mathrm{arcsen}\,\frac{4}{5}+12\right)+3\cdot 2\pi \\
&= 6\pi+25\,\mathrm{arcsen}\,\frac{4}{5}-12
\end{aligned}$$

También podíamos calcular el área A_{R2} a partir del área de una elipse de semiejes a y b, que es πab y restarle el área encontrada para A_{R1}, es decir $A_{R1}+A_{R2}=\pi ab$, lo comprobamos a continuación

$$\begin{aligned}
A_{R1}+A_{R2} &= \left(6\pi+12-25\,\mathrm{arcsen}\,\frac{4}{5}\right)+\left(6\pi+25\,\mathrm{arcsen}\,\frac{4}{5}-12\right) \\
&= 12\pi=\pi\cdot 4\cdot 3
\end{aligned}$$

15. Sea $a>0$. Calcula las siguientes integrales impropias:

(a) $\int_0^\infty e^{-ax}\cos x\,dx$ (b) $\int_0^\infty e^{-ar}r^n\,dr$ (c) $\int_{-\infty}^{+\infty} xe^{-x^2}\,dx$

(d) $\int_e^\infty \dfrac{dx}{x\log x}$ (e) $\int_e^\infty \dfrac{dx}{x\log^2 x}$ (f) $\int_0^\infty x^2e^{-2x}\,dx$

Solución: Buscaremos en cada caso una primitiva de la función y después se calcularán los límites correspondientes.

a) Recordemos que
$$\int_0^\infty e^{-ax}\cos x\,dx=\lim_{T\to\infty}\int_0^T e^{-ax}\cos x\,dx.$$
Para calcular la integral usamos integración por partes
$$\int_0^T e^{-ax}\cos x\,dx=\left.\frac{e^{-ax}\left(\mathrm{sen}\,(x)-a\cos(x)\right)}{a^2+1}\right|=\frac{e^{-aT}\left(\mathrm{sen}\,(T)-a\cos(T)\right)}{a^2+1}+\frac{a}{a^2+1}$$
y tomando límites cuando $T\to\infty$
$$\int_0^\infty e^{-ax}\cos x\,dx=\lim_{T\to\infty}\left(\frac{e^{-aT}\left(\mathrm{sen}\,(T)-a\cos(T)\right)}{a^2+1}+\frac{a}{a^2+1}\right)=\frac{a}{a^2+1}$$
donde se ha tenido en cuenta que $a>0$ y por tanto $e^{-aT}=\frac{1}{e^{aT}}\to 0$ y la función $(\mathrm{sen}\,(T)-a\cos(T))$ está acotada por $1+a$
$$|\mathrm{sen}\,(T)-a\cos(T)|\le|\mathrm{sen}\,(T)|+|a\cos(T)|=|\mathrm{sen}\,(T)|+a\,|\cos(T)|\le 1+a.$$

b)

$$\int_0^\infty e^{-ar} r^n \, dr = \lim_{T\to\infty} \int_0^T e^{-ar} r^n \, dr.$$

Calcularemos la integral de forma recursiva. Para $n \in \mathbb{N}$, consideremos la función

$$I_n(a,T) = \int_0^T e^{-ar} r^n \, dr,$$

y definimos

$$I_n(a) = \lim_{T\to\infty} I_n(a,T).$$

Suponiendo $n > 0$, integramos por partes tomando $u = r^n$ y $dv = e^{-ar} dr$, por tanto $du = nr^{n-1}$ y $v = -\frac{1}{a} e^{-ar}$

$$I_n(a,T) = -\frac{1}{a} r^n e^{-ar} \Big|_{r=0}^{r=T} + \frac{n}{a} \int_0^T e^{-ar} r^{n-1} dr = -\frac{T^n}{a} e^{-aT} + \frac{n}{a} \int_0^T e^{-ar} r^{n-1} dr,$$

y hemos comprobado que

$$I_n(a,T) = \frac{n}{a} I_{n-1}(a,T) - \frac{1}{a} T^n e^{-aT}.$$

Si ahora tomamos límites cuando $T \to \infty$

$$I_n(a) = \lim_{T\to\infty} \left(\frac{n}{a} I_{n-1}(a,T) - \frac{1}{a} T^n e^{-aT} \right) = \frac{n}{a} I_{n-1}(a)$$

puesto que, usando L'Hôpital n veces, podemos comprobar que

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{a} T^n e^{-aT} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{a} \frac{T^n}{e^{aT}} = 0$$

Si repetimos el proceso para $n-1, n-2, \ldots 1$ tendremos

$$\begin{aligned}
I_{n-1}(a) &= \frac{(n-1)}{a} I_{n-2}(a), \\
I_{n-2}(a) &= \frac{(n-2)}{a} I_{n-3}(a), \\
&\vdots \\
I_2(a) &= \frac{2}{a} I_1(a) \\
I_1(a) &= \frac{1}{a} I_0(a).
\end{aligned}$$

donde

$$I_0(a) = \int_0^\infty e^{-ar} dr = \lim_{T\to\infty} \int_0^T e^{-ar} dr = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{a} \left(1 - e^{-aT}\right) = \frac{1}{a}$$

Y podemos calcular el resto de integrales de forma recursiva

$$\begin{aligned}
I_1(a) &= \frac{1}{a} I_0(a) = \frac{1}{a^2} \\
I_2(a) &= \frac{2}{a} I_1(a) = \frac{2}{a^3} \\
I_3(a) &= \frac{3}{a} I_2(a) = \frac{3 \cdot 2}{a^4} \\
&\vdots \\
I_n(a) &= \frac{n}{a} I_{n-1}(a) = \frac{n!}{a^{n+1}}
\end{aligned}$$

luego

$$I_n(a) = \int_0^\infty e^{-ar} r^n \, dr = \frac{n!}{a^{n+1}}$$

c) Usando integración por partes

$$\int_{-\infty}^0 xe^{-x^2} dx = \lim_{T \to -\infty} \int_T^0 xe^{-x^2 dx} = \lim_{T \to -\infty} -\frac{1}{2} e^{-x^2} \Big|_{x=T}^{x=0} = \lim_{T \to -\infty} \left(-1 + \frac{1}{2} e^{-T^2} \right) = -1,$$

$$\int_0^\infty xe^{-x^2} dx = \lim_{T \to \infty} \int_0^T xe^{-x^2 dx} = \lim_{T \to \infty} -\frac{1}{2} e^{-x^2} \Big|_{x=0}^{x=T} = \lim_{T \to -\infty} \left(-\frac{1}{2} e^{-T^2} + 1 \right) = 1,$$

luego

$$\int_{-\infty}^\infty xe^{-x^2} dx = (-1) + (1) = 0.$$

d) Calculamos

$$\begin{aligned}
\int_e^\infty \frac{1}{x \log x} dx &= \lim_{T \to \infty} \int_e^T \frac{1}{x \log x} dx = \lim_{T \to \infty} \int_e^T \frac{\frac{1}{x}}{\log x} dx = \lim_{T \to \infty} \log(\log(x))\Big|_{x=e}^{x=T} \\
&= \lim_{T \to \infty} \log(\log(T)) - \log(\log(e)) = \lim_{T \to \infty} \log(\log(T)) = \infty
\end{aligned}$$

e) Calculamos

$$\begin{aligned}
\int_e^\infty \frac{1}{x \log^2 x} dx &= \lim_{T \to \infty} \int_e^T \frac{1}{x \log^2 x} dx = \lim_{T \to \infty} \int_e^T (\log x)^{-2} \frac{1}{x} dx \\
&= \lim_{T \to \infty} -\frac{1}{\log(x)} \Big|_{x=e}^{x=T} = \lim_{T \to \infty} -\frac{1}{\log(T)} + 1 = 1
\end{aligned}$$

f) Notar que esta integral es la del apartado b tomando $a = 2$ y como variable de integración x, luego como $I_n(a) = \frac{n!}{a^{n+1}}$

$$\int_0^\infty x^2 e^{-2x} \, dx = I_2(2) = \frac{2!}{2^3} = \frac{1}{4}$$

16. **Derivación paramétrica de integrales**. Calcula las siguientes derivadas:

(a) $\frac{d}{dx}\int_{2x}^{x^3}\cos t\,dt$ (b) $\frac{d}{dx}\int_{2x}^{3x}\frac{1}{t}\,dt$ (c) $\frac{d}{d\alpha}\int_0^{\infty}e^{-\alpha x}\,dx$

(d) $\frac{d}{dx}\int_0^2 t^n\,dt$ (e) $\frac{d}{dx}\int_0^2 x^n\,dt$ (f) $\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\int_0^x v(t)\,dt\right)$

(g) $\frac{d}{dx}\int_0^x\left(\int_0^t v(s)\,ds\right)\,dt$ (h) $\frac{d}{dx}\left(\int_0^x v(t)\,dt+\int_x^1 v(t)\,dt\right)$ (i) $\frac{d}{dx}\int_x^{x+1}v(t)\,dt$

Solución: Usamos derivada de la función compuesta:

$$\frac{d}{dx}\left(\int_{g_1(x)}^{g_2(x)}f(t)\,dt\right)=f(g_2(x))\,g_2'(x)-f(g_1(x))\,g_1'(x)\,.$$

a)

$$\frac{d}{dx}\int_{2x}^{x^3}\cos t\,dt=3x^2\cos\left(x^3\right)-2\cos(2x)\,.$$

b)

$$\frac{d}{dx}\int_{2x}^{3x}\frac{1}{t}\,dt=\frac{1}{3x}3-\frac{1}{2x}2=\frac{1}{x}-\frac{1}{x}=0.$$

c) En este caso los extremos no depende de α y podemos intercambiar (aunque formalmente habría que comprobar primero que la integral es convergente) la integral y la derivada:

$$\frac{d}{d\alpha}\int_0^{\infty}e^{-\alpha x}\,dx=\int_0^{\infty}\frac{d}{d\alpha}e^{-\alpha x}\,dx=\int_0^{\infty}-xe^{-\alpha x}\,dx$$

$$\begin{aligned}\int_0^{\infty}-xe^{-\alpha x}\,dx &= -\lim_{T\to\infty}\int_0^T xe^{-\alpha x}=-\lim_{T\to\infty}\left.-\frac{x}{\alpha}e^{-\alpha x}\right|_{x=0}^{x=T}+\frac{1}{\alpha}\int_0^T e^{-\alpha x}dx=\\ &= -\left(\lim_{T\to\infty}\left.-\frac{x}{\alpha}e^{-\alpha x}-\frac{1}{\alpha^2}e^{-\alpha x}\right|_{x=0}^{x=T}\right)\\ &= -\left(\lim_{T\to\infty}\left(-\frac{T}{\alpha}e^{-\alpha T}-\frac{1}{\alpha^2}e^{-\alpha T}\right)-\left(-\frac{1}{\alpha^2}\right)\right)\\ &= -\left(\lim_{T\to\infty}\left(-\frac{T}{\alpha}e^{-\alpha T}-\frac{1}{\alpha^2}e^{-\alpha T}\right)+\frac{1}{\alpha^2}\right)\\ &= -\frac{1}{\alpha^2}.\end{aligned}$$

Si integramos directamente

$$\int_0^{\infty}e^{-\alpha x}\,dx=\lim_{T\to\infty}\int_0^T e^{-\alpha x}=\lim_{T\to\infty}\quad\left.-\frac{e^{-\alpha x}}{\alpha}\right|_{x=0}^{x=T}=\lim_{T\to\infty}\quad\frac{1}{\alpha}-\frac{e^{-\alpha T}}{\alpha}=\frac{1}{\alpha},$$

y ahora derivamos respecto de α

$$\frac{d}{d\alpha}\left(\frac{1}{\alpha}\right)=-\frac{1}{\alpha^2},$$

obtenemos el mismo resultado.

d)
$$\frac{d}{dx}\int_0^2 t^n\,dt=0,\text{ puesto que no depende de }x.$$

e) La función x^n no depende de t, por tanto puede salir de la integral

$$\frac{d}{dx}\int_0^2 x^n\,dt=\frac{d}{dx}x^n\int_0^2 dt=\frac{d}{dx}\left(2x^n\right)=2nx^{n-1}.$$

f) Usando la derivada de un producto

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\int_0^x v(t)\,dt\right) &= -\frac{1}{x^2}\int_0^x v(t)\,dt+\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\left(\int_0^x v(t)\,dt\right)\\ &= -\frac{1}{x^2}\int_0^x v(t)\,dt+\frac{v\left(x\right)}{x}.\end{aligned}$$

g) Usamos la regla de la cadena

$$\frac{d}{dx}\int_0^x\left(\int_0^t v(s)\,ds\right)\,dt=\int_0^x v(s)\,ds.$$

h) Usando la propiedad de aditividad de la integral

$$\frac{d}{dx}\left(\int_0^x v(t)\,dt+\int_x^1 v(t)\,dt\right)=\frac{d}{dx}\left(\int_0^1 v(t)\,dt\right)=0,\text{ porque no depende de }x.$$

i) Usando la regla de la cadena

$$\frac{d}{dx}\int_x^{x+1} v(t)\,dt=v\left(x+1\right)-v\left(x\right).$$

17. **Derivación en el sentido de las distribuciones y la distribución delta de Dirac**. Se define la función escalón (también llamada función de Heaviside) como

$$H(x)=\begin{cases}1 & \text{si} \quad x\geq 1\\ \\ 0 & \text{si} \quad x<0.\end{cases}$$

Se llama masa de Dirac centrada en 0, denotada $\delta_0(x)$, a la derivada de $H(x)$ respecto a x. Como es bien sabido, toda función derivable es necesariamente continua. Por tanto, como $H(x)$ no es continua en $x=0$, no puede ser derivable en dicho punto, al menos en el sentido de derivación introducido por Newton. Veamos qué sentido tiene pues la afirmación anterior.

a) Sea $v : [-1,1] \to R$ una función continua, con derivada continua, y de modo que $v(-1) = v(1) = 0$. Utiliza la fórmula de integración por partes para comprobar que

$$\int_{-1}^{1} H'(x)v(x)\,dx = v(0).$$

b) En el contexto de la Física Cuántica, Paul Dirac (Premio Nobel de Física en 1933 junto a Erwin Schrödinger) introdujo la distribución delta $\delta_0(x)$ atribuyéndole las dos siguientes propiedades:

$$\delta_0(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \neq 0 \\ \\ +\infty & \text{si} \quad x = 0, \end{cases} \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} \delta_0(x)v(x)\,dx = v(0),$$

donde v es como en el apartado anterior.

Estas dos propiedades no encajaban con las Matemáticas conocidas en 1933 pues la integral de Riemann no está definida para "funciones"que toman el valor $+\infty$. El sentido en que deben entenderse las propiedades anteriores es el siguiente: para cada $\varepsilon > 0$ consideremos la función

$$f_\varepsilon(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\varepsilon} & \text{si} \quad -\varepsilon \leq x \leq \varepsilon \\ \\ 0 & \text{si} \quad |x| > \varepsilon \end{cases}$$

Utiliza el Teorema de la media del Cálculo Integral para comprobar que

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{-\infty}^{\infty} f_\varepsilon(x)v(x)\,dx = v(0),$$

donde v es una función como en el apartado anterior.

Teniendo en cuenta los resultados de los dos apartados anteriores, es decir,

$$\int_{-1}^{1} H'(x)v(x)\,dx = v(0) \quad \text{y} \quad \int_{-1}^{1} \delta_0(x)v(x)\,dx = v(0) \quad \forall v,$$

podemos concluir que $H'(x) = \delta_0(x)$. Esta forma de entender las derivadas es lo que se conoce con el nombre de derivación en el sentido de las distribuciones.

Solución: Problema excluido de la relación inicial.

18. **Algunas Aplicaciones del Cálculo Integral**. Son muchas y muy variadas las aplicaciones del Cálculo Integral en Física e Ingeniería. Se presentan a continuación algunas de ellas.

a) Las líneas de forma en espectroscopia de resonancia magnética se describen a menudo a través de la función de Lorentz

$$g(\omega) = \frac{1}{\pi} \frac{T}{1 + T^2 (\omega - \omega_0)^2},$$

donde T y ω_0 son constantes. Calcula $\int_{\omega_0}^{\infty} g(\omega)\,d\omega$.

b) La probabilidad de que una molécula de masa m en un gas a temperatura T se mueva a velocidad v está dada por la distribución de Maxwell-Boltzmann

$$f(v) = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} v^2 e^{-mv^2/(2kT)}.$$

Calcula la velocidad media $\overline{v} = \int_0^\infty v f(v)\, dv$.

c) La fuerza que actúa entre dos cargas eléctricas q_1 y q_2 separadas una distancia x en el vacío está dada por (ley de Coulomb)

$$F(x) = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 x^2},$$

donde ϵ_0 es la permeatividad del vacío. Calcula el trabajo ejercido por dicha fuerza para el caso de dos cargas iguales (por ejemplo dos electrones) que se repelen, es decir, calcula $W = -\int_{-\infty}^{x} F(t)\, dt$.

d) Consideremos una barra de longitud L con densidad de masa $\rho(x) = L - x$, $0 \leq x \leq L$. Calcula la posición del centro de masas, es decir,

$$X = \frac{\int_0^L x\rho(x)\, dx}{\int_0^L \rho(x)\, dx}$$

y también el momento de inercia respecto al punto x_0, el cual se define como

$$I = \int_0^L \rho(x) \left(x - x_0\right)^2\, dx.$$

Solución:

a)

$$\begin{aligned}
\int_{\omega_0}^{\infty} g(\omega)\, d\omega &= \int_{\omega_0}^{\infty} \frac{1}{\pi} \frac{T}{1 + T^2 \left(\omega - \omega_0\right)^2} d\omega = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\pi} \int_{\omega_0}^{x} \frac{T}{1 + T^2 \left(\omega - \omega_0\right)^2} d\omega = \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\pi} \int_{\omega_0}^{x} \frac{T}{1 + \left(T\left(\omega - \omega_0\right)\right)^2} d\omega = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\pi} \arctan T\left(\omega - \omega_0\right)\Big|_{\omega=\omega_0}^{\omega=x} = \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\pi} \left(\arctan T\left(x - \omega_0\right) - \arctan 0\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\pi} \arctan T\left(x - \omega_0\right) = \frac{1}{\pi}\frac{\pi}{2} = \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

b)

$$\overline{v} = \int_0^\infty v f(v)\, dv = \int_0^\infty v \cdot 4\pi \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} v^2 e^{-mv^2/(2kT)} dv = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} \int_0^\infty v^3 e^{-mv^2/(2kT)} dv$$

Para simplificar cálculos tomamos

$$\frac{m}{2kT} = \alpha$$

de esta forma

$$\overline{v} = 4\pi\alpha^{3/2}\int_0^{\infty} v^3 e^{-\alpha v^2} dv = \lim_{x\to\infty} 4\pi\alpha^{3/2}\int_0^{x} v^3 e^{-\alpha v^2} dv$$

Para el cálculo de la integral $\int_0^x v^3 e^{-\alpha v^2} dv$, hacemos el cambio $v^2 = t \Rightarrow 2vdv = dt$

$$\begin{aligned} \int_0^x v^3 e^{-\alpha v^2} dv &= \int_0^x v^2 e^{-av^2} v dv = \frac{1}{2}\int_0^x v^2 e^{-av^2}(2vdv) = \frac{1}{2}\int_0^x te^{-\alpha t} dt \\ dv &= ve^{-\left(\frac{m}{2kT}\right)v^2} \end{aligned}$$

y realizamos esa última integral por partes, tomando $u = t$ y $dv = e^{-\alpha t}dt$ y por tanto $du = dt$ y $v = -\frac{1}{\alpha}e^{-\alpha t}$

$$\frac{1}{2}\int te^{-\alpha t}dt = -\frac{t}{2\alpha}e^{-\alpha t} + \frac{1}{2\alpha}\int_0^x e^{-\alpha t}dt = -\frac{t}{2\alpha}e^{-\alpha t} - \frac{1}{2\alpha^2}e^{-\alpha t} = -\left(\frac{t}{2\alpha} + \frac{1}{2\alpha^2}\right)e^{-\alpha t}$$

y deshaciendo el cambio

$$\int v^3 e^{-\alpha v^2} dv = -\left(\frac{v^2}{2\alpha} + \frac{1}{2\alpha^2}\right)e^{-\alpha v^2}$$

Si ahora calculamos la integral definida entre 0 y x

$$\int_0^x v^3 e^{-\alpha v^2} dv = -\left(\frac{v^2}{2\alpha} + \frac{1}{2\alpha^2}\right)e^{-\alpha v^2}\Big|_{v=0}^{v=x} = \frac{1}{2\alpha^2} - \left(\frac{x^2}{2\alpha} + \frac{1}{2\alpha^2}\right)e^{-\alpha x^2}$$

y tomando límites

$$\lim_{x\to\infty} 4\pi\alpha^{3/2}\int_0^x v^3 e^{-\alpha v^2} dv = \lim_{x\to\infty} 4\pi\alpha^{3/2}\left[\frac{1}{2\alpha^2} - \left(\frac{x^2}{2\alpha} + \frac{1}{2\alpha^2}\right)e^{-\alpha x^2}\right] = \frac{4\pi\alpha^{3/2}}{2\pi^{3/2}\alpha^2} = \frac{2}{\pi^{1/2}\alpha^{1/2}},$$

y sustituyendo el valor de α

$$\overline{v} = \frac{2}{\pi^{1/2}\alpha^{1/2}} = \frac{2}{\pi^{1/2}\left(\frac{m}{2kT}\right)^{1/2}} = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}}.$$

$c)$

$$\begin{aligned} W &= -\int_{-\infty}^{x} \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 t^2}dt = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0}\lim_{s\to-\infty}\int_s^x -\frac{1}{t^2}dt \\ &= \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0}\lim_{s\to-\infty}\frac{1}{t}\Big|_{t=s}^{t=x} \\ &= \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0}\lim_{s\to-\infty}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{s}\right) \\ &= \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 x} \end{aligned}$$

d)

$$
\begin{aligned}
X &= \frac{\int_0^L x\rho(x)\,dx}{\int_0^L \rho(x)\,dx} = \frac{\int_0^L x\,(L-x)\,dx}{\int_0^L (L-x)\,dx} \\
&= \frac{\int_0^L xL - x^2dx}{\int_0^L (L-x)\,dx} = \frac{\frac{x^2}{2}L - \frac{x^3}{3}\Big|_{x=0}^{x=L}}{xL - \frac{x^2}{2}\Big|_{x=0}^{x=L}} = \frac{\frac{L^3}{2} - \frac{L^3}{3}}{L^2 - \frac{L^2}{2}} = \frac{\frac{1}{6}L^3}{\frac{1}{2}L^2} = \frac{1}{3}L
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
I &= \int_0^L \rho(x)\,(x-x_0)^2\;dx = \int_0^L (L-x)\,(x-x_0)^2\,dx = \int_0^L (L-x)\left(x^2 - 2xx_0 + x_0^2\right)dx = \\
&= \int_0^L \left(-x^3 + x^2\,(L+2x_0) - x\left(x_0^2 + 2x_0L\right) + x_0^2L\right)dL = \\
&= -\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3}\,(L+2x_0) - \frac{x^2}{2}\left(x_0^2 + 2x_0L\right) + xx_0^2L\Big|_{x=0}^{x=L} \\
&= -\frac{L^4}{4} + \frac{L^3}{3}\,(L+2x_0) - \frac{L^2}{2}\left(x_0^2 + 2x_0L\right) + x_0^2L^2 \\
&= \frac{L^4 - 4L^3x_0 + 6L^2x_0^2}{12}
\end{aligned}
$$