

1. Calcula el interior, la clausura, la frontera y el derivado de los siguientes conjuntos:

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 9\}$$

$$B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = 0\}.$$

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > x^2\}.$$

$$D = \{(0, 0), (1, 0)\}$$

$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 < 1\}$$

$$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + z^2 < 4\}$$

$$G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0; y < 0\}$$

$$H = [2, 3[\times]-1, 3[$$

$$I = ([2, 3] \times [0, 1]) \cup \{(0, 1)\}$$

$$J = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$$

$$K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 < x^2 + y^2 \leq 4\}$$

$$L = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 < 4; 0 \leq z < 3\} \cup \{(-3, 0, 0); (2, 0, 0)\}$$

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 < 4\} \cup \{(2, 0, 0); (4, 0, 0)\}$$

$$N = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq 9\} \cup \{(4, 3, 1)\}$$

2. Calcula el dominio donde se podrían definir las siguientes funciones

$$\text{a) } f_1(x, y) = \frac{x + y}{x^2 + y^2}$$

$$\text{b) } f_2(x, y) = \frac{2}{\sqrt{x^2 + y^2 - 4}}$$

$$\text{c) } f_3(x, y) = \ln(x^2 + y^2 - 9)$$

$$\text{d) } f_4(x, y) = \frac{x + y}{xy^2}$$

$$\text{e) } f_5(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2 - 1}$$

$$\text{f) } f_6(x, y) = \left(\frac{2}{\sqrt{x^2 + y^2 - 1}}, \frac{3}{\sqrt{4 - (x^2 + y^2)}} \right)$$

3. Analiza la existencia de límite en $(0, 0)$ para las siguientes funciones:

a) $f_1 : \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\} \longrightarrow \mathbb{R}$ con $f_1(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$

b) $f_2 : \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\} \longrightarrow \mathbb{R}$ con $f_2(x, y) = \frac{x + 2y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}}$

c) $f_3 : \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\} \longrightarrow \mathbb{R}$ con $f_3(x, y) = \frac{x^4 + y^4}{x^2 + y^2}$

d) $f_4 : \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\} \longrightarrow \mathbb{R}$ con $f_4(x, y) = \frac{xy^2}{x^2 + y^2}$

e) $f_5 : \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\} \longrightarrow \mathbb{R}$ con $f_5(x, y) = \frac{xy + y^2}{x^2 + y^2}$

f) $f_6 : \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\} \longrightarrow \mathbb{R}$ con $f_6(x, y) = \frac{x^2y}{x^4 + y^2}$

g) $f_7 : \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\} \longrightarrow \mathbb{R}$ con $f_7(x, y) = \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2 + x^4}$

h) $f_8 : \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ con $f_8(x, y) = \left(\frac{y^2}{x^2 + y^2}, x + y \right)$

i) $f_9 : \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ con $f_9(x, y) = \left(\frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2}, \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} \operatorname{sen} \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right)$

j) $f_{10} : \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\} \longrightarrow \mathbb{R}$ con $f_{10}(x, y) = \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2 + x^2y^2}$

4. Analiza la continuidad de las siguientes funciones

$$\begin{aligned}
 \text{a) } f_1 : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} & f_1(x, y) &= \begin{cases} \frac{x|y|}{\sqrt{x^2 + y^2}} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases} \\
 \text{b) } f_2 : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} & f_2(x, y) &= \begin{cases} (x^2 + y^2) \operatorname{sen} \frac{1}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases} \\
 \text{c) } f_3 : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} & f_3(x, y) &= \begin{cases} \frac{x^2}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases} \\
 \text{d) } f_4 : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} & f_4(x, y) &= \begin{cases} \frac{x^2y}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{e) } f_5 : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} & f_5(x, y) &= \begin{cases} \frac{x}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases} \\
\text{f) } f_6 : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} & f_6(x, y) &= \begin{cases} \frac{y^2(x - y)}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases} \\
\text{g) } f_7 : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} & f_7(x, y) &= \begin{cases} \frac{\text{sen}(xy)}{x} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases} \\
\text{h) } f_7 : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} & f_7(x, y) &= \begin{cases} \frac{4x^3}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}
\end{aligned}$$

5. Analiza la continuidad en el origen de las siguientes funciones

$$\begin{aligned}
\text{a) } f_1(x, y) &= \begin{cases} \frac{x^2 y}{\sqrt{x^2 + y^2}} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases} \\
\text{b) } f_2(x, y) &= \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases} \\
\text{c) } f_3(x, y) &= \begin{cases} \frac{xy^3}{x^2 + y^6} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases} \\
\text{d) } f_4(x, y) &= \begin{cases} \frac{x^4 + y^4}{\sqrt{x^2 + y^2}} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{e) } f_5(x, y) &= \begin{cases} \frac{y^2(x-y)}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases} \\
\text{f) } f_6(x, y) &= \begin{cases} \frac{y^3}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases} \\
\text{g) } f_7(x, y) &= \begin{cases} \frac{x+y}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases} \\
\text{h) } f_8(x, y) &= \begin{cases} \frac{x^6}{(x^2-y)^2+x^6} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}
\end{aligned}$$

6. Sea $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{\text{sen}(xy)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ g(y) & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

¿Es posible determinar $g(y)$ para que la función $f(x, y)$, sea continua en todos los puntos de la forma $(0, y)$.

7. Sea $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 + |y|^\alpha}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Estudiar para qué valores de α , la función $f(x, y)$ es continua en $(0, 0)$.