Curso 2019/2020
Grado en Ingeniería Química Industrial
Matemáticas I - Problemas Temas 15
Cálculo en varias variables
Aplicaciones del cálculo diferencial de funciones de varias variables

1. Calcula la ecuación del plano tangente de las siguientes funciones en los puntos indicados

   a) $f(x,y) = x^2y^2 + 2x + 2y$ en $(1,0)$

   b) $g(x,y) = \operatorname{sen} x \cos y + \cos x \operatorname{sen} y$ en $(0,\pi/2)$

   c) $h(x,y) = \dfrac{x^4+y^2}{x^2+y^2}$ en $(-1,-1)$

2. Demuestra que la ecuación de la elipse
$$x^2 + 3y^2 = 12,$$
define a y como función implícita de x en el punto $(3,1)$. Calcula el polinomio de Taylor de orden 3 de $y(x)$, en $x_0 = 3$.

3. Demuestra que la ecuación
$$x^3 + y^3 - 3xy - 1 = 0,$$
define a y, como función implícita de x en un entorno de $(0,1)$. Halla el polinomio de Taylor de orden 2 de y, en $x_0 = 0$.

4. Sea $z = f(x,y)$ la función definida a partir de la expresión
$$3y^3z^2 + e^{x+z} - 3y = e,$$
Halla $\frac{\partial f}{\partial x}(1,0)$ y $\frac{\partial f}{\partial y}(1,0)$, y determina la ecuación del plano tangente a la superficie $z = f(x,y)$ en el punto $(1,0)$.

5. Comprueba que las ecuaciones
$$\begin{cases} x + y + z^2 = 2 \\ xy + yz + zx = 1 \end{cases}$$
definen a las variables y y z como funciones implícitas de x, tales que $y(0) = 1$ y $z(0) = 1$. Calcula el desarrollo de Taylor en 0 de orden 2 de ambas funciones.

6. Comprueba que las ecuaciones
$$\begin{cases} x + 2y - z^2 = 0 \\ xy + z - y = 0 \end{cases}$$
definen a las variables x e y como funciones implícitas de z, tales que $x(2) = 0$ e $y(2) = 2$. Calcula una aproximación de dichas funciones mediante el polinomio de Taylor de orden 2 de ambas funciones.

7. Comprueba si la ecuación
$$x^3 + 2y^3 + z^3 - 3xyz - 2y + 1 = 0,$$
determina una función $z = f(x, y)$ en un entorno del punto $(0, 1)$. En caso afirmativo, calcula $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 1)$ y $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 1)$, y la ecuación del plano tangente a la superficie en el punto $(0, 1, f(0, 1))$.

8. De una función $f : R^3 \to R$, sabemos que
$$f(0,0,0) = 2; \quad \nabla f(0,0,0) = (1, 2, -1); \quad Hf(0,0,0) = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 4 \\ 2 & 4 & -2 \end{pmatrix}$$

   a) A partir de estos datos, obtén una expresión aproximada para $f(x, y, z)$ en un entorno del punto $(0, 0, 0)$.
   b) Encuentra una aproximación para el valor de $f\left(\frac{1}{10}, \frac{1}{10}, \frac{1}{10}\right)$.

9. Se considera la función $z = f(x, y)$ que, en un entorno del punto $(1, 1, 1)$, está definida implícitamente por
$$z^3 + 3x^2y - y^3z + y^2 - 3x - 1 = 0,$$
Obtén el polinomio de Taylor de grado 2 de tal función en $(1, 1)$.

10. Comprueba que la ecuación
$$z + e^z + 2x + 2y - x^2 - y^2 - 3 = 0,$$
determina a z como función de x e y en un entorno del punto $(x, y, z) = (1, 1 + \sqrt{e}, 1)$. Calcula la ecuación del plano tangente a la superficie $z = f(x, y)$ en el punto $(1, 1 + \sqrt{e}, 1)$.

11. Comprueba que las circunferencias de ecuaciones $(x-2)^2 + y^2 = 2$ y $x^2 + (y-2)^2 = 2$ son tangentes en el punto $(1, 1)$.

12. Halla el desarrollo de Taylor de grado tres para la función $f(x, y) = x^y$ en un entorno del punto $(a, b) = (1, 1)$. Usa este desarrollo para calcular de forma aproximada el valor de $1{,}1^{1{,}02}$.

13. Estudia los puntos críticos y clasifícalos para las siguientes funciones:

   (a) $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - xy + x - 2z$.
   (b) $g(x, y) = -4x^2 - 5y^2$
   (c) $h(x, y) = 4x^2 + 5y^2$
   (d) $k(x, y) = x^2 + xy$
   (e) $l(x, y) = x^3 + y^3$
   (f) $m(x, y) = x^2y^2$
   (g) $n(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy + 4$
   (h) $o(x, y) = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$
   (i) $p(x, y) = 6 - 4x - 3y - z\left(x^2 + y^2 - 1\right)$
   (j) $q(x, y) = 6 - 4x - 3y - \frac{2}{5}\left(x^2 + y^2 - 1\right)$
   (k) $r(x, y) = 2x^2 - 4xy + y^4 - 1$

14. Calcula la mínima distancia de $P = (1, 2)$ a $\Omega = \left\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + (x_2 + 2)^2 = 1\right\}$.

15. **Ajuste por mínimos cuadrados**. El ajuste por mínimos cuadrados de los cuatro puntos $(-1,4)$, $(0,1)$, $(1,1)$, $(1,-1)$ a una parábola de ecuación $y = ax^2 + bx + c$ requiere resolver el problema siguiente de programación no lineal: Minimizar $f(a,b,c)$, donde

$$f(a,b,c) = (4-(a-b+c))^2 + (1-c)^2 + (1-(a+b+c))^2 + (1+(a+b+c))^2$$

16. Calcula las dimensiones del cubo de volumen máximo que se puede incluir en una esfera de radio 1.

17. Calcula las dimensiones del rectángulo de área máxima que está contenido en la elipse de ecuación

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = R^2.$$

18. Se dispone de una cantidad fija de material para fabricar una caja rectangular. Calcula las dimensiones de la caja para que su volumen sea el máximo posible.

19. Halla los extremos absolutos de $f(x,y) = x + y^2$, sobre el conjunto $x^2 + y^2 = 25$.

20. Halla los extremos absolutos de $f(x,y) = x^2y + y^3 - 2xy$, sobre el conjunto compacto $K = \{(x,y) \in \mathbb{R} \mid \ x^2 + y^2 - 2x \leq 0\}$.

21. Una placa con forma circular $x^2 + y^2 \leq 1$,se calienta de manera que en cada punto (x,y), la temperatura viene dada por $T(x,y) = x^2 + 2y^2 - x$. Obtén los puntos de la placa donde se alcanza la mayor y menor temperatura.

22. Resuelve los siguientes apartados:

    a) Calcula y clasifica los puntos críticos de $f(x,y) = x^3 + y^3 - xy^2 - x + 16$.

    b) Calcula los extremos absolutos de $f(x,y)$ sobre el conjunto compacto

$$K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 2; y \geq 0\}$$

23. Se considera el conjunto de triángulos isósceles incritos en la elipse $x^2 + 3y^2 = 12$, con vértice fijo en $(0,-2)$ y base paralela al eje OX. Hallar los triángulos de área máxima y mínima.

24. Halla los extremos absolutos de $f(x,y) = x^2+y^2$ en el recinto $K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - 2x + y^2 - 3 \leq 0\}$.

25. Halla los extremos absolutos de $f(x,y) = x^2-xy+y^2$ en el recinto $K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 2\}$.

26. Halla los extremos absolutos de $f(x,y) = x^2+y^2$ con la condición $3x^2+y^2+6z^2 = 1$ y $-y+z = 0$.

27. Halla los extremos absolutos de $f(x,y) = x^2+xy-x+y^2$ en el recinto $K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 2y^2 \leq 1, y \geq 0\}$.

28. Halla los extremos absolutos de $f(x,y,z) = x + z$ en la esfera de ecuación $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

29. Halla los extremos absolutos de $f(x,y,z) = z$ en el recinto

$$K = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z + e^z + 2x + 2y - x^2 - y^2 - 3 = 0\}.$$

    Nota: La única solución de la ecuación $t + e^t = 1$ es $t = 0$.

30. Halla los extremos absolutos de la función $f(x,y) = x+y+z$ condicionados por $x^2+2y^2+3z^2 = 1$.

31. Dada la función
$$F(x,y)=\int_0^{x^2+y^2} e^{t^2dt}$$
Estudia su continuidad y diferenciabilidad. Calcula sus extremos relativos.

32. Se considera la función
$$f(x,y)=\ln\left(1+x^2+y^2\right)-\int_0^x \frac{t^2}{\left(1+t^2\right)^2}dt$$
Estudia su continuidad y diferenciabilidad y en su caso calcula $df(x,y)$. Calcula y clasifica sus extremos relativos.

33. Se considera la función
$$f(x,y)=\ln\left(1+x^2+y^2\right)-\int_0^x \frac{2t}{1+t^4}dt$$
Prueba que el punto $(1,0)$ es crítico y clasifícalo. Halla el polinomio de Taylor de grado 2 de $f(x,y)$ en el punto $(1,0)$.

34. Consideremos una placa circular que ocupa la región bidimensional $\Omega=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2\leq 1\right\}$.Supongamos que la distribución de temperaturas de la placa está dada por la función $T(x,y)=\frac{1-(x^2+y^2)}{4}$.¿Cuál es el punto de la placa que está más caliente ? ¿Y el más frío?

35. Resuelve el siguiente problema de programación no lineal:
$$\begin{cases} \text{Minimizar} & \|x\|^2=x_1^2+x_2^2+\cdots x_n^2 \\ \text{sujeto a} & \overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{x}=c \end{cases}$$
donde $\overrightarrow{a}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$ es un vector no nulo de n componentes, c es una constante y $\overrightarrow{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$.

36. Utiliza la derivación implícita para calcular la ecuación de la recta tangente a la circunferencia de ecuación $x^2+y^2=1$ en un punto genérico (x_0,y_0) con $y_0\neq 0$.

37. La ecuación
$$x^2+y^2+z^2-z=51$$
define a la variable z como función implícita de x e y en un entorno del punto $(6,-3)$ en el cual $z=z(x,y)$ puede tomar los valores $z=3$ y $z=-2$. Para $z=-2$, calcula la ecuación del plano tangente a la gráfica de la función $z(x,y)$ en el punto $(3,-2)$. Calcula también el polinomio de Taylor de orden 2 de $z(x,y)$ en el punto $(3,-2)$.

38. Calcula el polinomio de Taylor de grado dos de las funciones que se indican a continuación:

(a) $f(x,y)=\operatorname{sen}(x)\cos(y)$ en el punto $(0,0)$

(b) $f(x,y)=(x^2-3x)e^{y^2}$ en el punto $(0,0)$

(c) $f(x,y,z)=\frac{x}{y}-ze^x$ en el punto $(1,1,0)$