Curso 2019/2020
Grado en Ingeniería Química Industrial
Matemáticas I - Problemas Temas 18
Ecuaciones diferenciales
Ecuaciones Diferenciales Ordinarias Lineales de Orden Superior

1. Resuelve los siguientes problemas de valor inicial:

(a) $\begin{cases} x'' + x' - 2x = 0 \\ x(0) = 1 \\ x'(0) = 0 \end{cases}$ (b) $\begin{cases} x'' + 6x' + 9x = 0 \\ x(1) = 0 \\ x'(1) = 1 \end{cases}$ (c) $\begin{cases} x'' + 9x = 0 \\ x\left(\frac{\pi}{3}\right) = 0 \\ x'\left(\frac{\pi}{3}\right) = -1 \end{cases}$

(d) $\begin{cases} x'' - 2x' + 2x = 0 \\ x(0) = 1 \\ x'(0) = 0 \end{cases}$ (e) $\begin{cases} x'' + x' - 6x = 0 \\ x(0) = 1 \\ x'(0) = 0 \end{cases}$ (f) $\begin{cases} 2x'' - 4x' + 8x = 0 \\ x(0) = 1 \\ x'(0) = 0 \end{cases}$

2. Resuelve los siguientes problemas de valor frontera:

$$(a) \begin{cases} y'' + y' - 2y = 0 \\ y(0) = 2 \\ \lim_{x\to\infty} y(x) = 0 \end{cases} \qquad (b) \begin{cases} y'' + 9y = 0 \\ y(0) = 0 \\ y(\pi) = 0 \end{cases}$$

3. Encuentra la solución general de las siguientes ecuaciones:

(a) $y'' - y' - 6y = 2 + 3x$ (b) $y'' - 8y' + 16y = 1 - 4x^3$ (c) $y'' - y' - 6y = 2e^{-3x}$

(d) $y'' - y' - 2y = 3e^{-x}$ (e) $y'' - 8y' + 16y = e^{4x}$ (f) $y'' - y' - 6y = 2\cos(3x)$

(g) $y'' + 4y = 3\sin(2x)$ (h) $y'' + y = 2\cos x$ (i) $y'' - 2y' = 12x - 10$

4. Consideremos la siguiente ecuación diferencial para el oscilador armónico sin rozamiento y bajo la acción de una fuerza externa de tipo periódico

$$x'' + \omega_0^2 x = A\cos(\omega t)$$

donde $\omega_0 = \sqrt{k/m}$. La cantidad $\nu_0 = \omega_0/2\pi$ se llama frecuencia natural del oscilador. Comprueba que si la frecuencia ω de la fuerza externa se aproxima a ω_0, entonces la amplitud de las oscilaciones tiende a infinito, es decir, demuestra que

$$\lim_{\omega\to\omega_0} x(t) = \infty, \quad t > 0.$$

Este fenómeno se conoce con el nombre de resonancia y obviamente, debido a la analogía entre el oscilador armónico y el circuito RLC, también se da en este tipo de circuitos eléctricos.

5. Consideremos un circuito RLC con $R = 110$, $L = 1$, $C = 1/1000$, con unidades en el Sistema Internacional, y donde la fuerza electromotriz está dada por

$$E(t) = \begin{cases} 90, & 0 \leq t < 1 \\ 0, & t > 1. \end{cases}$$

Calcula la intensidad de corriente $I(t)$ que circula por el circuito, es decir, resuelve el problema

$$\begin{cases} \dfrac{d^2I}{dt^2} + 110\dfrac{dI}{dt} + 1000I = \dfrac{dE}{dt} \\ I(0) = 0 \\ I'(0) = 90 \end{cases}$$

6. Consideremos el problema de la Mecánica Cuántica que consiste en estudiar el movimiento de una partícula que se mueve libremente a lo largo del segmento $(0, L)$. Este problema se modeliza matemáticamente por medio del problema de contorno

$$\begin{cases} -\dfrac{\hbar^2}{2m}\dfrac{d^2\psi}{dx^2} = E\psi(x), \quad 0 < x < L \\ \psi(0) = \psi(L) = 0, \end{cases}$$

donde $\hbar = h/2\pi$, con h la constante de Planck, m es la masa de la partícula, E es su energía, y $\psi = \psi(x)$ es la función de onda. Comprueba que los únicos valores de energía para los que el problema anterior tiene una solución no nula son

$$E_n = \frac{n^2h^2}{8mL^2}, \quad n \geq 1.$$

Este fenómeno se conoce en Mecánica Cuántica como cuantización de la energía. Calcula $\psi_n(x)$ teniendo en cuenta que ψ_n son funciones de onda y por tanto $\int_0^L \psi_n^2(x)\, dx = 1$.

7. Calcula los autovalores y autofunciones de los siguientes problemas de contorno, es decir, los valores de $\lambda \in R$ para los que los siguientes problemas tienen solución no nula:

$$(a) \begin{cases} y'' + \lambda y = 0 \\ y(0) = y(1) = 0 \end{cases} \qquad (b) \begin{cases} y'' + \lambda y = 0 \\ y'(0) = y'(1) = 0 \end{cases} \qquad (c) \begin{cases} y'' + \lambda y = 0 \\ y(-\pi) = y(\pi) \\ y'(-\pi) = y'(\pi) \end{cases}$$
