



1. Dados los números complejos $z_1 = 1 - i$ y $z_2 = 4 + 4\sqrt{3}i$, realiza las siguientes operaciones:

- a) Halla sus módulos y argumentos
 b) Calcula

(i) $\overline{z_1} + 6z_2$ (ii) $3z_1\overline{z_2}$ (iii) $z_1|z_2|i$ (iv) z_1^3 (v) $\frac{2z_2}{-z_1}$

Solución:

a)

$$|z_1| = |1 - i| = \sqrt{(1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2},$$

$$\theta_{z_1} = \arctan\left(-\frac{1}{1}\right) = \arctan -1 = -\frac{\pi}{4} \implies \arg(z_1) = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi.$$

$$|z_2| = |4 + 4\sqrt{3}i| = \sqrt{(4)^2 + (4\sqrt{3})^2} = \sqrt{16 + 48} = \sqrt{64} = 8,$$

$$\theta_{z_2} = \arctan\left(\frac{4\sqrt{3}}{4}\right) = \arctan \sqrt{3} = \frac{\pi}{3} \implies \arg(z_2) = \frac{\pi}{3} + 2k\pi.$$

b)

(i) $\overline{z_1} + 6z_2 = \overline{(1 - i)} + 6(4 + 4\sqrt{3}i) = 25 + (1 + 24\sqrt{3})i.$

(ii) $3z_1\overline{z_2} = 3(1 - i)\overline{(4 + 4\sqrt{3}i)} = 3(1 - i)(4 - 4\sqrt{3}i) = 12(1 - \sqrt{3}) - 12(1 + \sqrt{3})i.$

(iii) $z_1|z_2|i = (1 - i)|4 + 4\sqrt{3}i|i = 8 + 8i.$

(iv) $z_1^3 = (1 - i)^3 = -2 - 2i.$

(v) $\frac{2z_2}{-z_1} = \frac{2(4 + 4\sqrt{3}i)}{-(1 - i)} = 4(\sqrt{3} - 1) - 4(\sqrt{3} + 1)i.$

2. Dados los números complejos $z_1 = 2 + i$ y $z_2 = 3 - 2i$, calcula:

a) $z_1 + z_2$ b) $3z_1 - 2z_2$ c) z_1z_2 d) $(z_2)^{-1}$ e) $\frac{z_1}{z_2}$

Solución:

a) $z_1 + z_2 = (2 + i) + (3 - 2i) = 5 - i.$ b) $3z_1 - 2z_2 = 3(2 + i) - 2(3 - 2i) = 7i.$

c) $z_1z_2 = (2 + i)(3 - 2i) = 8 - i.$ d) $(z_2)^{-1} = \frac{1}{3 - 2i} = \frac{1}{(3 - 2i)} = \frac{(3 + 2i)}{(3 - 2i)(3 + 2i)} = \frac{3}{13} + \frac{2}{13}i.$

e) $\frac{z_1}{z_2} = \frac{2 + i}{3 - 2i} = \frac{(2 + i)(3 + 2i)}{(3 - 2i)(3 + 2i)} = \frac{4}{13} + \frac{7}{13}i.$

3. Determina los valores de x e y para que se cumpla la igualdad $(1+i)(x+iy) = i$.

Solución: Hacemos el producto

$$(1+i)(x+iy) = (x-y) + i(x+y) = i,$$

Igualando partes reales e imaginarias se obtiene un sistema lineal

$$\left. \begin{array}{l} x - y = 0 \\ x + y = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow x = y = \frac{1}{2} \Rightarrow \text{Solución: } \boxed{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i}.$$

4. Calcula el módulo de los números complejos:

a) $3 + 4i$ b) $\frac{1+i}{1-i}$ c) $i^7 + i^{10}$ d) $1 + i + i^2$

Solución:

a) $|3 + 4i| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5.$

b) $\left| \frac{1+i}{1-i} \right| = \frac{|1+i|}{|1-i|} = \frac{\sqrt{1^2 + 1^2}}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 1.$

c) $i^7 + i^{10} = i^7(1 + i^3) = i^7(1 - i) \Rightarrow |i^7(1 - i)| = |i^7| \cdot |(1 - i)| = |i|^7 \cdot |(1 - i)| = 1 \cdot \sqrt{2} = \sqrt{2}.$

d) $1 + i + i^2 = i \Rightarrow |i| = 1.$

5. Expresa en forma polar o exponencial los siguientes números complejos:

a) $2i$ b) $-3i$ c) -1 d) 3 e) $\frac{1+i}{\sqrt{2}}$
 f) $-3 + i\sqrt{3}$ g) $\frac{1+i}{1-i}$ h) $i^7 + i^{10}$ i) $3 + 3i$ j) $1 + i + i^2$

Solución:

a)

$$\left. \begin{array}{l} |2i| = \sqrt{(0)^2 + (2)^2} = 2 \\ \theta = \arctan\left(\frac{2}{0}\right) = \arctan \infty = \frac{\pi}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow 2i = 2e^{i\pi/2}.$$

b)

$$\left. \begin{array}{l} |-3i| = \sqrt{(0)^2 + (-3)^2} = 3 \\ \theta = \arctan\left(\frac{-3}{0}\right) = \arctan -\infty = -\frac{\pi}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow -3i = 3e^{-i\pi/2}.$$

c)

$$\left. \begin{array}{l} |-1| = \sqrt{(-1)^2 + (0)^2} = 1 \\ \theta = \arctan\left(-\frac{0}{1}\right) = \arctan 0 = \pi \end{array} \right\} \Rightarrow -1 = e^{i\pi}$$

d)

$$\left. \begin{array}{l} |3| = \sqrt{(3)^2 + (0)^2} = 3 \\ \theta = \arctan\left(\frac{0}{3}\right) = \arctan 0 = 2\pi \end{array} \right\} \Rightarrow 3 = 3e^{i2\pi}.$$

e)

$$\left. \begin{array}{l} \left|\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right| = \sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} = 1 \\ \theta = \arctan\left(\frac{1/\sqrt{2}}{1/\sqrt{2}}\right) = \arctan 1 = \frac{\pi}{4} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{1+i}{\sqrt{2}} = e^{i\pi/4}.$$

f)

$$\left. \begin{array}{l} |-3 + i\sqrt{3}| = \sqrt{(-3)^2 + (\sqrt{3})^2} = 2\sqrt{3} \\ \theta = \arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{-3}\right) = \arctan -\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{5\pi}{6} \end{array} \right\} \Rightarrow -3 + i\sqrt{3} = 2\sqrt{3}e^{i5\pi/6}.$$

g)

$$\left. \begin{array}{l} \left|\frac{1+i}{1-i}\right| = \frac{|1+i|}{|1-i|} = \frac{\sqrt{(1)^2+(1)^2}}{\sqrt{(1)^2+(-1)^2}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 1 \\ \theta = \theta_1 - \theta_2 = \arctan 1 - \arctan(-1) = \frac{\pi}{4} - \left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{1+i}{1-i} = e^{i\pi/2}.$$

h)

$$\left. \begin{array}{l} |i^7 + i^{10}| = |-1 - i| = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{2} \\ \theta = \arctan\left(\frac{-1}{-1}\right) = \arctan 1 = \frac{5\pi}{4} \end{array} \right\} \Rightarrow i^7 + i^{10} = -1 - i = \sqrt{2}e^{i5\pi/4}.$$

i)

$$\left. \begin{array}{l} |3 + 3i| = \sqrt{(3)^2 + (3)^2} = 3\sqrt{2} \\ \theta = \arctan\left(\frac{3}{3}\right) = \arctan 1 = \frac{\pi}{4} \end{array} \right\} \Rightarrow 3 + 3i = 3\sqrt{2}e^{i\pi/4}.$$

j)

$$\left. \begin{array}{l} |1 + i + i^2| = |i| = \sqrt{(0)^2 + (2)^2} = 2 \\ \theta = \arctan\left(\frac{2}{0}\right) = \arctan \infty = \frac{\pi}{2} \implies \arg(z_1) = -\frac{\pi}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow 2i = 2e^{i\pi/2}.$$

6. Expresa los siguientes números complejos en forma binómica:

a) $(1+i)^3$ b) $\frac{2+3i}{3-4i}$ c) $i^5 + i^{16}$ d) $1+i+i^2+i^3$ e) $\frac{1}{i}$

f) $(1+i\sqrt{3})^3$ g) $2_{\pi/2}$ h) $1_{\pi/4}$ i) $\left(\frac{1-i}{1+i}\right)$ j) $(2+2i)^2$

k) $(2-2i)^2$ l) $(2+2i)(2-2i)$ m) $e^{-i\pi/2}$ n) $2e^{-i\pi}$ ñ) $3e^{-i\pi/2}$

o) $2e^{-i\pi/4}$ p) $i+3e^{i2\pi}$ q) $e^{i\pi/4} - 2e^{-i\pi/4}$ r) $\frac{1}{e^{-i\pi/4}}$ s) $\sqrt{2}e^{i\pi/3}$

Solución:

a) $-2+2i$ b) $-\frac{6}{25} + \frac{17}{25}i$ c) $1+i$ d) 0 e) $-i$

f) -8 g) $2i$ h) $\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}$ i) $-i$ j) $8i$

k) $-8i$ l) 8 m) $-i$ n) -2 ñ) $-3i$

o) $\sqrt{2} - i\sqrt{2}$ p) $3+i$ q) $-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$ r) $\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$ s) $\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}i$

7. Representa gráficamente los conjuntos dados por las expresiones siguientes:

a) $|z| \leq 1$ b) $z + \bar{z} \geq |z|^2$ c) $z + \bar{z} \leq 1$ d) $z - \bar{z} = i$

e) $\text{Im}(z) < 0$ f) $|\text{Re}(z)| < 1$ g) $\text{Re}(z) + \text{Im}(z) = z\bar{z}$ h) $|z|^{-1} \leq 1, (z \neq 0)$

i) $|z - 5i| = 8$ j) $\text{Im}(z^2) > 2$ k) $\text{Re}\left(\frac{1}{z}\right) = 1$ l) $\text{Re}(z^2 - z) = 0$

m) $|z - 1| = |1 - 2\bar{z}|$ n) $2 < |z| < 3$ ñ) $\left|\frac{z-1}{z+1}\right| \leq 1$ o) $\text{Re}\left(\frac{1}{z}\right) = 1$

Solución: Usaremos el hecho de que

$$z = x + iy; \quad \bar{z} = x - iy; \quad |z| = \sqrt{x^2 + y^2}; \quad \text{Re}(z) = x; \quad \text{Im}(z) = y$$

a)

$$|z| \leq 1 \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + y^2} \leq 1 \Leftrightarrow x^2 + y^2 \leq 1$$

Ecuación del círculo de centro $(0,0)$ y radio 1.

b)

$$z + \bar{z} \geq |z|^2 \Leftrightarrow (x + iy) + (x - iy) \geq x^2 + y^2 \Leftrightarrow (x - 1)^2 + y^2 \leq 1$$

Ecuación del círculo de centro $(1,0)$ y radio 1.

c)

$$z + \bar{z} \leq 1 \Leftrightarrow (x + iy) + (x - iy) \leq 1 \Leftrightarrow x \leq \frac{1}{2}$$

Semiplano a la izquierda de abcisa $\frac{1}{2}$.

d)

$$z - \bar{z} = i \Leftrightarrow (x + iy) - (x - iy) = i \Leftrightarrow y = \frac{1}{2}$$

Recta horizontal $(x, \frac{1}{2})$.

e)

$$\text{Im}(z) < 0 \Leftrightarrow y < 0$$

Semiplano abierto de ordenadas negativas.

f)

$$|\text{Re}(z)| < 1 \Leftrightarrow |x| < 1 \Leftrightarrow -1 < x < 1$$

Banda vertical simétrica de anchura 2.

g)

$$\text{Re}(z) + \text{Im}(z) = z\bar{z} \Leftrightarrow x + y = x^2 + y^2 \Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}$$

Ecuación de la circunferencia de centro $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ y radio $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

h) Suponiendo $z \neq 0$

$$|z|^{-1} \leq 1 \Leftrightarrow \frac{1}{|z|} \leq 1 \Leftrightarrow |z| \geq 1 \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + y^2} \geq 1 \Leftrightarrow x^2 + y^2 \geq 1$$

Exterior del círculo de centro $(0, 0)$ y radio 1.

i)

$$|z - 5i| = 8 \Leftrightarrow |x + (y - 5)i| = 8 \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + (y - 5)^2} = 8 \Leftrightarrow x^2 + (y - 5)^2 = 64$$

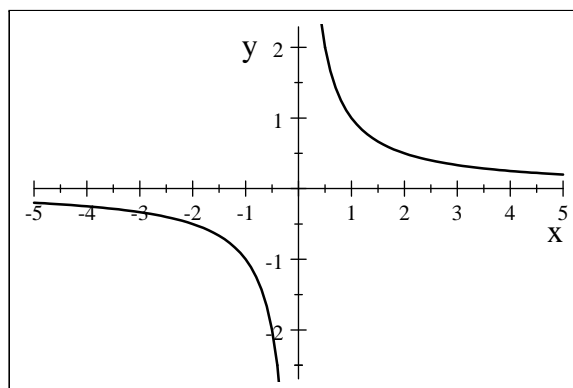
Ecuación de la circunferencia de centro $(0, 5)$ y radio 8.

j)

$$\text{Im}(z^2) > 2 \Leftrightarrow \text{Im}((x^2 - y^2) + i2xy) > 2 \Leftrightarrow xy > 1$$

La frontera del conjunto es la hipérbola de ecuación $y = \frac{1}{x}$

$$y > \frac{1}{x}$$



k)

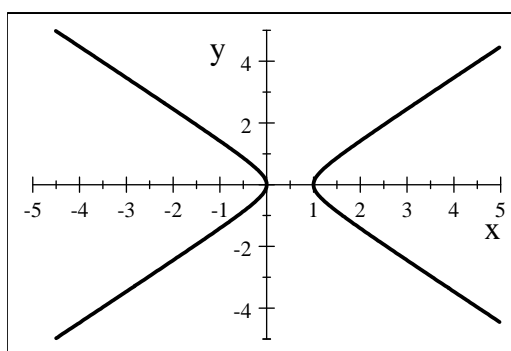
$$\operatorname{Re}\left(\overline{z^{-1}}\right) = 1 \Leftrightarrow \frac{x}{x^2 + y^2} = 1 \Leftrightarrow x = x^2 + y^2 \Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{1}{4}$$

Ecuación de la circunferencia de centro $(\frac{1}{2}, 0)$ y radio $\frac{1}{2}$.

l)

$$\operatorname{Re}(z^2 - z) = 0 \Leftrightarrow x^2 - y^2 - x = 0 \Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - y^2 = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \frac{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2}{1/4} - \frac{y^2}{1/4} = 1$$

Ecuación de la hipérbola centrada en $(\frac{1}{2}, 0)$ y semiejes $\frac{1}{2}$ y $\frac{1}{2}$.



m)

$$|z - 1| = |1 - 2\bar{z}| \Leftrightarrow |(x - 1) + iy| = |(1 - 2x) + i2y|$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(x - 1)^2 + y^2} = \sqrt{(1 - 2x)^2 + (2y)^2}$$

$$\Leftrightarrow (x - 1)^2 + y^2 = (1 - 2x)^2 + (2y)^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 + y^2 = 1 + 4x^2 - 4x + 4y^2$$

$$\Leftrightarrow 0 = 3x^2 - 2x + 3y^2$$

$$\Leftrightarrow 0 = 3\left(x^2 - 2\frac{1}{3}x + y^2\right)$$

$$\Leftrightarrow 0 = \left(x^2 - 2\frac{1}{3}x + y^2\right)$$

$$\Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{3}\right)^2 + y^2 = \frac{1}{9}$$

Circunferencia de centro $(\frac{1}{3}, 0)$ y radio $\frac{1}{3}$.

n)

$$2 < |z| < 3 \Leftrightarrow 4 < x^2 + y^2 < 9$$

Anillo (o corona circular) de centro $(0, 0)$ y radios 2 y 3.

\tilde{n}) Notar que en este caso $z \neq -1$

$$\left| \frac{z-1}{z+1} \right| \leq 1 \Leftrightarrow |z-1| \leq |z+1| \Leftrightarrow |z-1|^2 \leq |z+1|^2 \Leftrightarrow (x-1)^2 + y^2 \leq (x+1)^2 + y^2 \Leftrightarrow x \geq 0$$

Semiplano a la derecha de la abscisa $x = 0$.

o)

$$\operatorname{Re} \left(\frac{1}{z} \right) = 1 \Leftrightarrow \frac{x}{x^2 + y^2} = 1 \Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{2} \right)^2 + y^2 = \frac{1}{4}$$

Circunferencia de centro $(\frac{1}{2}, 0)$ y radio $\frac{1}{2}$, menos el punto $(0, 0)$, ya que no tiene inverso.

8. Calcula las siguientes potencias de números complejos:

$$\text{a) } (1+i)^{100} \quad \text{b) } (-1 + \sqrt{3}i)^{30} \quad \text{c) } (\sqrt{1-i})^{10} \quad \text{d) } \frac{1}{(1-i)^5}$$

Solución:

$$\text{a) } -2^{50} = 1125\,899\,906\,842\,624 \quad \text{b) } 2^{30} = 1073741824 \quad \text{c) } -4 + 4i \quad \text{d) } -\frac{1}{8} - \frac{1}{8}i$$

9. Deduce una fórmula para calcular cualquier potencia de i^n con $n \in \mathbb{N}$.

Solución: Para las 5 primeras potencias tenemos

n	i^n
0	$i^0 = 1$
1	$i^1 = i$
2	$i^2 = -1$
3	$i^3 = i^2 i = -i$
4	$i^4 = i^2 i^2 = (-1)(-1) = 1$

y comprobamos que los resultados se repiten cada 4 unidades imaginarias. Por tanto si hacemos la división eculídea de la potencia n entre 4

$$n = 4c + r$$

donde el r , el resto, es un número que está en $\{0, 1, 2, 3\}$, luego

$$i^n = i^{4c+r} = (i^4)^c i^r = 1^c i^r = i^r$$

es decir, i^n tiene el mismo valor que i^r con r el resto de la división por 4 de n . Por ejemplo

$$i^{741} = i^{185 \cdot 4 + 1} = i^1 = i$$

$$i^{48546} = i^{12136 \cdot 4 + 2} = i^2 = -1$$

10. Calcula las siguientes raíces:

a) $\sqrt[3]{1}$ b) $\sqrt[3]{i}$ c) $\sqrt[6]{-8}$ d) $\sqrt[4]{-1}$ e) $\sqrt[8]{1}$ f) $\sqrt[4]{-81}$ g) $\sqrt{1-i}$

h) $\sqrt{3+3i}$ i) $\sqrt[3]{-2+2i}$ j) $\sqrt[3]{-1+i}$ k) $\sqrt[4]{-8(1-\sqrt{3}i)}$ l) $\sqrt[4]{1}$ m) $\sqrt[6]{1}$ n) $\sqrt[4]{-1+\sqrt{3}i}$

Solución:

$$\begin{aligned}
 \text{a) } \sqrt[3]{1} &\Rightarrow \begin{cases} |z| = 1 \\ \theta = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} w_0 = 1 & = 1 \\ w_1 = e^{i2\pi/3} & = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \\ w_2 = e^{i4\pi/3} & = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \end{cases} \\
 \text{b) } \sqrt[3]{i} &\Rightarrow \begin{cases} |z| = 1 \\ \theta = \frac{\pi}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} w_0 = e^{i\pi/6} & = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \\ w_1 = e^{i5\pi/6} & = \frac{1}{2}i - \frac{\sqrt{3}}{2} \\ w_2 = e^{i9\pi/6} & = -i \end{cases} \\
 \text{c) } \sqrt[6]{-8} &\Rightarrow \begin{cases} |z| = 8 \\ \theta = \pi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} w_0 = \sqrt{2}e^{i\pi/6} & = \frac{\sqrt{2}\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i \\ w_1 = \sqrt{2}e^{i\pi/2} & = \sqrt{2}i \\ w_2 = \sqrt{2}e^{i5\pi/6} & = -\frac{\sqrt{2}\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i \\ w_3 = \sqrt{2}e^{i7\pi/6} & = -\frac{\sqrt{2}\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i \\ w_4 = \sqrt{2}e^{i3\pi/2} & = -\sqrt{2}i \\ w_5 = \sqrt{2}e^{i11\pi/6} & = \frac{\sqrt{2}\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i \end{cases} \\
 \text{d) } \sqrt[4]{-1} &\Rightarrow \begin{cases} |z| = 1 \\ \theta = \pi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} w_0 = e^{i\pi/4} & = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i \\ w_1 = e^{i3\pi/4} & = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i \\ w_2 = e^{i5\pi/4} & = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i \\ w_3 = e^{i7\pi/4} & = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i \end{cases}
 \end{aligned}$$

$$e) \sqrt[8]{1} \Rightarrow \begin{cases} |z| = 1 \\ \theta = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} w_0 = 1 & = 1 \\ w_1 = e^{i\pi/4} & = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i \\ w_2 = e^{i\pi/2} & = i \\ w_3 = e^{i3\pi/4} & = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i \\ w_4 = e^{i\pi} & = -1 \\ w_5 = e^{i5\pi/4} & = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i \\ w_6 = e^{i3\pi/2} & = -i \\ w_7 = e^{i7\pi/4} & = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i \end{cases}$$

$$f) \sqrt[4]{-81} \Rightarrow \begin{cases} |z| = 81 \\ \theta = \pi \end{cases} \Rightarrow \Rightarrow \begin{cases} w_0 = 3e^{i\pi/4} & = \frac{3\sqrt{2}}{2} + \frac{3\sqrt{2}}{2}i \\ w_1 = 3e^{i3\pi/4} & = -\frac{3\sqrt{2}}{2} + \frac{3\sqrt{2}}{2}i \\ w_2 = 3e^{i5\pi/4} & = -\frac{3\sqrt{2}}{2} - \frac{3\sqrt{2}}{2}i \\ w_3 = 3e^{i7\pi/4} & = \frac{3\sqrt{2}}{2} - \frac{3\sqrt{2}}{2}i \end{cases}$$

$$g) \sqrt{1-i} \Rightarrow \begin{cases} |z| = \sqrt{2} \\ \theta = -\frac{\pi}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} w_0 = \sqrt[4]{2}e^{-i\pi/8} & = \sqrt[4]{2} \left(\frac{\sqrt{\sqrt{2}+2}}{2} - \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}i \right) \\ w_1 = \sqrt[4]{2}e^{i7\pi/8} & = \sqrt[4]{2} \left(-\frac{\sqrt{\sqrt{2}+2}}{2} + \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}i \right) \end{cases}$$

$$h) \sqrt{3+3i} \Rightarrow \begin{cases} |z| = 3\sqrt{2} \\ \theta = \frac{\pi}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} w_0 = \sqrt{3}\sqrt[4]{2}e^{i\pi/8} & = \sqrt{3}\sqrt[4]{2} \left(\frac{\sqrt{\sqrt{2}+2}}{2} + \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}i \right) \\ w_1 = \sqrt{3}\sqrt[4]{2}e^{i9\pi/8} & = -\sqrt{3}\sqrt[4]{2} \left(\frac{\sqrt{\sqrt{2}+2}}{2} + \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}i \right) \end{cases}$$

$$i) \sqrt[3]{-2+2i} \Rightarrow \begin{cases} |z| = 2\sqrt{2} \\ \theta = \frac{3\pi}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} w_0 = \sqrt{2}e^{i\pi/4} & = 1 + i \\ w_1 = \sqrt{2}e^{i11\pi/12} & = -\frac{\sqrt{3}+1}{2} + \frac{\sqrt{3}-1}{2}i \\ w_2 = \sqrt{2}e^{i19\pi/12} & = \frac{\sqrt{3}-1}{2} - \frac{\sqrt{3}+1}{2}i \end{cases}$$

$$\text{j) } \sqrt[3]{-1+i} \Rightarrow \begin{cases} |z| = \sqrt{2} \\ \theta = \frac{3\pi}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} w_0 = \sqrt[6]{2}e^{i\pi/4} = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}\sqrt{2}e^{i\pi/4} = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}(1+i) \\ w_1 = \sqrt[6]{2}e^{i11\pi/12} = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}\sqrt{2}e^{i11\pi/12} = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}\left(-\frac{\sqrt{3}+1}{2} + \frac{\sqrt{3}-1}{2}i\right) \\ w_2 = \sqrt[6]{2}e^{i19\pi/12} = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}\sqrt{2}e^{i19\pi/12} = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2} - \frac{\sqrt{3}+1}{2}i\right) \end{cases}$$

$$\text{k) } \sqrt[4]{-8(1-\sqrt{3}i)} \Rightarrow \begin{cases} |z| = 16 \\ \theta = \frac{2\pi}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} w_0 = 2e^{i\pi/6} = \sqrt{3} + i \\ w_1 = 2e^{i2\pi/3} = -1 + i\sqrt{3} \\ w_2 = 2e^{i7\pi/6} = -\sqrt{3} - i \\ w_3 = 2e^{i5\pi/3} = 1 - i\sqrt{3} \end{cases}$$

$$\text{l) } \sqrt[4]{1} \Rightarrow \begin{cases} |z| = 1 \\ \theta = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} w_0 = 1 = 1 \\ w_1 = e^{i\pi/2} = i \\ w_2 = e^{i\pi} = -1 \\ w_3 = e^{i3\pi/2} = -i \end{cases}$$

$$\text{m) } \sqrt[6]{1} \Rightarrow \begin{cases} |z| = 1 \\ \theta = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} w_0 = 1 = 1 \\ w_1 = e^{i\pi/3} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \\ w_2 = e^{i2\pi/3} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \\ w_3 = e^{i\pi} = -1 \\ w_4 = e^{i4\pi/3} = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \\ w_5 = e^{i5\pi/3} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \end{cases}$$

$$n) \sqrt[4]{-1 + \sqrt{3}i} \Rightarrow \begin{cases} |z| = \sqrt{2} \\ \theta = \frac{2\pi}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} w_0 = \sqrt[4]{2}e^{i\pi/6} = \sqrt[4]{2} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \right) \\ w_1 = \sqrt[4]{2}e^{i2\pi/3} = \sqrt[4]{2} \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \right) \\ w_2 = \sqrt[4]{2}e^{i7\pi/6} = \sqrt[4]{2} \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i \right) \\ w_3 = \sqrt[4]{2}e^{i5\pi/3} = \sqrt[4]{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) \end{cases}$$

Para calcular las razones trigonométricas de $\frac{\pi}{8}$ y $\frac{\pi}{12}$ se utilizan las fórmulas del ángulo mitad

$$\cos \frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1 + \cos \theta}{2}} \quad \text{sen} \frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos \theta}{2}};$$

luego

$$\begin{aligned} \cos \frac{\pi}{8} &= \sqrt{\frac{1 + \cos \pi/4}{2}} = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2} & \text{sen} \frac{\pi}{8} &= \sqrt{\frac{1 - \cos \pi/4}{2}} = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2}; \\ \cos \frac{\pi}{12} &= \sqrt{\frac{1 + \cos \pi/6}{2}} = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{3}}}{2} & \text{sen} \frac{\pi}{12} &= \sqrt{\frac{1 - \cos \pi/6}{2}} = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2} \end{aligned}$$

11. Resuelve en \mathbb{C} las siguientes ecuaciones con coeficientes en \mathbb{R} :

a) $z^2 + 1 = 0$ b) $z^3 + 2 = 0$ c) $z^5 + 64 = 0$ d) $(z^2 + 4)(z - 1)^2 = 0$

Solución:

$$a) z^2 + 1 = 0 \iff z = \sqrt{-1} \iff \begin{cases} z_1 = i \\ z_2 = -i \end{cases}$$

$$b) z^3 + 2 = 0 \iff z = \sqrt[3]{-2} \iff \begin{cases} w_0 = \sqrt[3]{2}e^{i\pi/3} = \sqrt[3]{2} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\sqrt{3} \right) \\ w_1 = \sqrt[3]{2}e^{i\pi} = -\sqrt[3]{2} \\ w_2 = \sqrt[3]{2}e^{i5\pi/3} = -\sqrt[3]{2} \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\sqrt{3} \right) \end{cases}$$

$$c) z^5 + 64 = 0 \iff z = \sqrt[5]{-64} \iff \begin{cases} w_0 = 2\sqrt[5]{2}e^{i\pi/5} \\ w_1 = 2\sqrt[5]{2}e^{i3\pi/5} \\ w_2 = 2\sqrt[5]{2}e^{i\pi} \\ w_3 = 2\sqrt[5]{2}e^{i7\pi/5} \\ w_4 = 2\sqrt[5]{2}e^{i9\pi/5} \end{cases}$$

$$d) (z^2 + 4)(z - 1)^2 = 0 \iff \begin{cases} z = \sqrt{-4} \\ z = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} z_1 = 2i \\ z_2 = -2i \\ z_3 = 1 \\ z_4 = 1 \end{cases}$$

:

12. Resuelve en \mathbb{C} las siguientes ecuaciones con coeficientes en \mathbb{C} :

$$a) z^2 - (2 + i)z + (9 + i) = 0 \quad b) z^2 - 2(2 - i)z + 3(1 - 2i) = 0 \quad c) z^4 + 64 = 0$$

Solución:

$$a) z^2 - (2 + i)z + (9 + i) = 0 \iff \begin{cases} w_0 = 1 + i \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{33} \right) \\ w_1 = 1 + i \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{33} \right) \end{cases}$$

$$b) z^2 - 2(2 - i)z + 3(1 - 2i) = 0 \iff z = \begin{cases} w_0 = 3 \\ w_1 = 1 - 2i \end{cases}$$

$$c) z^4 + 64 = 0 \iff z = \sqrt[4]{-64} \iff \begin{cases} w_0 = 2\sqrt{2}e^{i\pi/4} = 2 + 2i \\ w_1 = 2\sqrt{2}e^{i3\pi/4} = -2 + 2i \\ w_2 = 2\sqrt{2}e^{i5\pi/4} = -2 - 2i \\ w_3 = 2\sqrt{2}e^{i7\pi/4} = 2 - 2i \end{cases}$$

13. Expresa en forma binómica los siguientes números complejos:

$$a) (1 + i)^{2/3} \quad b) (1 + \sqrt{3}i)^{3/4}$$

Solución:

$$a) (1 + i)^{2/3} = \sqrt[3]{(1 + i)^2} = \sqrt[3]{2i} \Rightarrow \begin{cases} w_0 = \sqrt[3]{2}e^{i\pi/6} : \sqrt[3]{2} \left(\frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{1}{2}i \right) = \sqrt[3]{2} \left(\frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{1}{2}i \right) \\ w_1 = \sqrt[3]{2}e^{i5\pi/6} = \sqrt[3]{2} \left(\frac{1}{2}i - \frac{1}{2}\sqrt{3} \right) \\ w_2 = \sqrt[3]{2}e^{i3\pi/2} = -i\sqrt[3]{2} \end{cases}$$

$$b) (1 + \sqrt{3}i)^{3/4} = \sqrt[4]{(1 + \sqrt{3}i)^3} = \sqrt[4]{-8} = \sqrt[4]{8}\sqrt[4]{-1} \Rightarrow \begin{cases} w_0 = \sqrt[4]{8}e^{i\pi/4} = \sqrt[4]{8} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i \right) \\ w_1 = \sqrt[4]{8}e^{i3\pi/4} = \sqrt[4]{8} \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i \right) \\ w_2 = \sqrt[4]{8}e^{i5\pi/4} = \sqrt[4]{8} \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i \right) \\ w_3 = \sqrt[4]{8}e^{i7\pi/4} = \sqrt[4]{8} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i \right) \end{cases}$$

14. Utiliza la fórmula de Moivre para obtener $\cos(3x)$ y $\sin(3x)$ en función de $\cos(x)$ y $\sin(x)$. ¿Cuál será la relación para $\cos(4x)$ y $\sin(4x)$?

Solución: La fórmula de Moivre es

$$\forall x \in \mathbb{R} \implies (\cos x + i \operatorname{sen} x)^n = \cos nx + i \operatorname{sen} nx$$

Para $n = 3$

$$(\cos x + i \operatorname{sen} x)^3 = \cos 3x + i \operatorname{sen} 3x$$

$$\cos^3 x + 3 \cos^2 x (i \operatorname{sen} x) + 3 \cos x (i \operatorname{sen} x)^2 + (i \operatorname{sen} x)^3 = \cos 3x + i \operatorname{sen} 3x$$

$$(\cos^3 x - 3 \cos x \operatorname{sen}^2 x) + i (3 \cos^2 x \operatorname{sen} x - \operatorname{sen}^3 x) = \cos 3x + i \operatorname{sen} 3x$$

De donde

$$\cos(3x) = \cos^3 x - 3 \cos x \operatorname{sen}^2 x$$

$$\operatorname{sen}(3x) = 3 \cos^2 x \operatorname{sen} x - \operatorname{sen}^3 x$$

Para $n = 4$

$$(\cos x + i \operatorname{sen} x)^4 = \cos 4x + i \operatorname{sen} 4x$$

$$\cos^4 x + 4 \cos^3 x (i \operatorname{sen} x) + 6 \cos^2 x (i \operatorname{sen} x)^2 + 4 \cos x (i \operatorname{sen} x)^3 + (i \operatorname{sen} x)^4 = \cos 4x + i \operatorname{sen} 4x$$

$$(\cos^4 x - 6 \cos^2 x \operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen}^4 x) + i (4 \cos^3 x \operatorname{sen} x - 4 \cos x \operatorname{sen}^3 x) = \cos 4x + i \operatorname{sen} 4x$$

De donde

$$\cos(4x) = \cos^4 x - 6 \cos^2 x \operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen}^4 x$$

$$\operatorname{sen}(4x) = 4 \cos^3 x \operatorname{sen} x - 4 \cos x \operatorname{sen}^3 x$$

15. Resuelve: $\bar{z} = z^{n-1}$, siendo $n \in \mathbb{N} - \{2\}$.

Solución: Si $z = 0$, entonces se cumple la igualdad para cualquier valor de $n \geq 1$, ya que

$$\bar{0} = 0^{n-1}$$

Buscamos soluciones no nulas, es decir, suponemos $z \neq 0$ y por tanto se puede expresar en forma exponencial como

$$z = |z| e^{i\theta}$$

con $\theta \in \arg(z)$. Sabemos que en ese caso

$$\bar{z} = |z| e^{-i\theta}$$

$$z^{n-1} = |z|^{n-1} e^{i(n-1)\theta}$$

y la ecuación queda como

$$|z| e^{-i\theta} = |z|^{n-1} e^{-i(n-1)\theta}$$

Como es una igualdad de complejos en forma polar, los módulos deben coincidir

$$|z| = |z|^{n-1},$$

y dividiendo por $|z|$

$$1 = |z|^{n-2}.$$

Como $n \neq 2 \Rightarrow n - 2 \neq 0$, debe ocurrir

$$|z| = 1.$$

Para los argumentos debe ocurrir que estén en el mismo conjunto de argumentos, es decir, $-\theta$ y $(n-1)\theta$ deben diferir en un múltiplo entero de 2π

$$(n-1)\theta = -\theta + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

de donde obtenemos

$$n\theta = 2k\pi$$

y despejando θ

$$\theta = \frac{2k\pi}{n},$$

y las soluciones para cada $n \neq 2$ son las raíces n -ésimas de la unidad

$$w_k = e^{i2k\pi/n}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Sólo es necesario considerar n valores consecutivos de k , por ejemplo, $k = 0, 1, \dots, n-1$, ya que, en este caso para el siguiente valor, que sería n , tenemos

$$w_n = e^{i2n\pi/n} = e^{i2\pi} = e^{i0} = w_0.$$

Veamos ahora el caso $n = 2$.

$$\bar{z} = z^{2-1} \Leftrightarrow \bar{z} = z \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$$