Curso 2019/2020
Grado en Ingeniería Química Industrial
Matemáticas I - Problemas tema 4 - Soluciones comentadas
Espacios Vectoriales
Sistemas de vectores. Bases

1. Supongamos que una molécula de metano, en estado de equilibrio, tiene sus cuatro hidrógenos en las posiciones $r_1 = (a, a, a)$, $r_2 = (a, -a, -a)$, $r_3 = (-a, a, -a)$, $r_4 = (-a, -a, a)$, con el carbono en el centro. El momento dipolar de cada enlace viene dado por $\mu_i = \kappa r_i$, $1 \leq i \leq 4$, con κ una constante. Calcula el momento dipolar total $\mu = \sum_{i=1}^{4} \mu_i$.

   Solución: Usando directamente la suma de vectores

$$\begin{aligned}
\mu &= \sum_{i=1}^{n} \mu_i = \sum_{i=1}^{n} \kappa r_i = \kappa \sum_{i=1}^{n} r_i = \kappa \left(r_1 + r_2 + r_3 + r_4\right) \\
&= \kappa \left((a, a, a) + (a, -a, -a) + (-a, a, -a) + (-a, -a, a)\right) \\
&= \kappa \left(a + a - a - a, a - a + a - a, a - a - a + a\right) = \kappa \left(0, 0, 0, 0\right) = \left(0, 0, 0, 0\right).
\end{aligned}$$

2. Comprueba si los siguientes sistemas de vectores son LI, SG y/o base de los espacios vectoriales correspondientes, hallando en cada caso el rango del sistema:

   a) $S_1 = \{(1, 1, 1)\,; (1, 2, 1)\,; (1, 3, 2)\}$ de $\mathbb{R}^3$ sobre $\mathbb{R}$.
   b) $S_2 = \{(1, 2, 3, 0)\,; (4, 3, 4, -16)\,; (7, 3, 4, 5)\}$ de $\mathbb{R}^4$ sobre $\mathbb{R}$.
   c) $S_3 = \{(1, 0, 0, -1)\,; (2, 1, 1, -2)\,; (0, 1, 1, 0)\,; (1, 1, 1, -1)\}$ de $\mathbb{R}^4$ sobre $\mathbb{R}$.
   d) $S_4 = \{(4, -5, 7)\,; (3, 3, 4)\,; (1, 1, -2)\,; (2, -1, 1)\}$ de $\mathbb{R}^3$ sobre $\mathbb{R}$.
   e) $S_5 = \{(1, i, 2)\,; (0, 1, -2i)\,; (3, 1, 5)\}$ de $\mathbb{C}^3$ sobre $\mathbb{R}$.
   f) $S_6 = \{(1, 0, -1); (i, 2, 0); (1, -2i, 0)\}; (0, 2i, -1)\}$ de $\mathbb{C}^3$ sobre $\mathbb{R}$.
   g) $S_7 = \left\{1 + x; x + x^2; 1 + x^2\right\}$ de $\mathbb{P}_2[\mathbb{R}] = \{$polinomios de grado menor o igual que $2\}$ sobre $\mathbb{R}$.
   h) $S_8 = \{(2, 0, 0)\,; (3, 2, 0)\,; (4, 3, x)\}$ (con $x \in \mathbb{R}$) de $\mathbb{R}^3$ sobre $\mathbb{R}$.

   Solución: En cada ejercicio los vectores se pueden poner por filas o columnas, para realizar las comprobaciones correspondientes:

   a) Calculamos el determinante de la matriz formada por los vectores de S_1:

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = 1 \neq 0 \Rightarrow r\left(S_1\right) = 3$$

   Los vectores son linealmente independientes, como el número de vectores coincide con la dimensión del espacio vectorial, el sistema S_1 es una base de $\mathbb{R}^3$.

b) Calculamos el rango de la matriz formada por los vectores de S_2 por escalonamiento

$$S_2 \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 3 & 3 \\ 3 & 4 & 4 \\ 0 & -16 & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} F_2' = F_2 - 2F_1 \\ F_3' = F_3 - 3F_1 \end{array} \right\}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 0 & -5 & -11 \\ 0 & -8 & -17 \\ 0 & -16 & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} F_3'' = F_3' - \frac{8}{5}F_2' \\ F_4'' = F_4' - \frac{16}{5}F_2' \end{array} \right\}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 0 & -5 & -11 \\ 0 & 0 & \frac{3}{5} \\ 0 & 0 & \frac{201}{5} \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ F_4''' = F_4'' - \frac{201}{3}F_3'' \right\}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 0 & -5 & -11 \\ 0 & 0 & \frac{3}{5} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow r\left(S_2\right) = 3$$

Hay 3 vectores no nulos, luego el rango es 3 que coincide con el número de vectores, luego S_2 es un sistema linealmente independiente, pero como el número de vectores es menor que la dimensión del espacio no es ni base, ni sistema generador de $\mathbb{R}^4$.

c) Calculamos el rango de la matriz formada por los vectores de S_3 por escalonamiento

$$S_3 \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \{F_3 = F_2\}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{F_3' = F_3 + F_1\right\}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow r\left(S_3\right) = 2.$$

Hay 2 vectores no nulos, luego el rango es 2, como el número de vectores es 4, S_3 es un sistema linealmente dependiente y por tanto no puede ser una base, además como el número de vectores linealmente independientes (hay 2 no nulos) es menor que la dimensión tampoco es sistema generador.

d) Calculamos el rango de la matriz formada por los vectores de S_4 por escalonamiento

$$S_4 \Rightarrow \begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 & 2 \\ -5 & 3 & 1 & -1 \\ 7 & 4 & -2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} F_2' = F_2 + \frac{5}{4}F_1 \\ F_3' = F_3 - \frac{7}{4}F_1 \end{array} \right\}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{27}{4} & \frac{9}{4} & \frac{3}{2} \\ 0 & -\frac{5}{4} & -\frac{15}{4} & -\frac{5}{2} \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ F_3'' = F_3' + \frac{5}{27}F_2' \right\}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{27}{4} & \frac{9}{4} & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{10}{3} & -\frac{20}{9} \end{pmatrix} \Rightarrow r\,(S_4) = 3.$$

Hay 3 vectores no nulos, luego el rango es 3, que coincide con la dimensión del espacio, luego S_3 es un sistema generador, pero como el número de vectores de S_4 es 4, es un sistema linealmente dependiente y por lo tanto no es una base de $\mathbb{R}^3$.

e) Calculamos el determinante de la matriz formada por los vectores de S_5:

$$S_5 \Rightarrow \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ i & 1 & 1 \\ 2 & -2i & 25 \end{pmatrix} = 13 - 2i \neq 0$$

por tanto los vectores son linealmente independientes. El espacio $\mathbb{C}^3$ es un espacio de dimensión 6, puesto que $\mathbb{C}$ es equivalente a $\mathbb{R}^2$. Como lo estamos considerando como $\mathbb{R}$-espacio vectorial (escalares reales), entonces el conjunto de vectores S_5 no es un sistema generador, ya que sólo tenemos 3 vectores y necesitamos 6. Podemos comprobar este hecho viendo que es imposible obtener el vector $(i, 0, 0)$ usando una combinación lineal de los vectores de S_5, usando reales como escalares

$$\begin{aligned} \alpha\,(1, i, 2) + \beta\,(0, 1, -2i) + \gamma\,(3, 1, 25) &= (i, 0, 0) \Leftrightarrow \\ (\alpha + 3\gamma, \beta + \gamma + \alpha i, 25\gamma + 2\alpha - i2\beta) &= (i, 0, 0) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} \alpha + 3\gamma = i \\ \beta + \gamma + i\alpha = 0 \\ 25\gamma + 2\alpha - i2\beta \end{array} \right. \end{aligned}$$

lo que es imposible ya que $\alpha + 3\gamma \in \mathbb{R}$, mientras que $i \in \mathbb{C}$.
El conjunto $\mathbb{C}^3$ es equivalente (isomorfo) a $\mathbb{R}^6$, ya que dado $v = (z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{C}^3$, como $z_k = x_k + iy_k$, tendremos

$$v = (z_1, z_2, z_3) = (x_1 + iy_1, x_2 + iy_2, x_2 + iy_2) = (x_1, x_2, x_3) + i\,(y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3 + i\mathbb{R}^3$$

y lo podemos simplificar como

$$(x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^6$$

de modo que el sistema S_5 es equivalente a

$$\begin{aligned} S_5 &= \{(1, 0, 2) + i\,(0, 1, 0)\,; (0, 1, 0) + i\,(0, 0, -2)\,; (3, 1, 25) + i\,(0, 0, 0)\} \\ &= \{(1, 0, 2, 0, 1, 0)\,; (0, 1, 0, 0, 0, -2)\,; (3, 1, 25, 0, 0, 0)\} \end{aligned}$$

Calculamos su rango por escalonamiento

$$
\begin{aligned}
S_5 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 25 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Eliminamos la 4 fila que es nula} \\
&\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 25 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} F_1' = F_4 \\ F_2' = -\frac{1}{2} F_5 \\ F_3' = F_3 \\ F_4' = F_1 \\ F_5' = F_5 \end{array} \right\} \\
&\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 25 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} F_3' = F_3 - 2F_1 \\ F_4' = F_4 - F_1 \end{array} \right\} \\
&\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 25 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} F_4'' = F_4 - \frac{3}{25} F_3 \\ F_5'' = F_5' - F_2' \end{array} \right\} \\
&\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 25 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} \text{Eliminamos la 4 fila} \\ F_5''' = F_5' - \frac{1}{25} F_3' \end{array} \right\} \\
&\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 25 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow r\left(S_5\right) = 3
\end{aligned}
$$

luego el sistema es como se ha comprobado usando determinantes, linealmente independiente. No es un sistema generador puesto que tenemos 3 vectores en un espacio de dimensión 6, como se ha comentado antes.

f) Si planteamos la combinación lineal

$$
\begin{aligned}
\alpha\,(1,0,-1) + \beta\,(i,2,0) + \gamma\,(1,-2i,0) + \delta\,(0,2i,-1) &= (0,0,0) \\
(\alpha + i\beta + \gamma, 2\beta - 2i\gamma + 2i\delta, -\alpha - \delta) &= (0,0,0)
\end{aligned}
$$

entonces

$$
\begin{aligned}
(\alpha+\gamma)+i\beta &= 0 \Rightarrow \begin{cases} \alpha+\gamma=0 & \Rightarrow \alpha=-\gamma \\ \\ \beta=0 & \Rightarrow \beta=0 \end{cases} \\
2\beta+2i\,(\delta-\gamma) &= 0 \Rightarrow \begin{cases} 2\beta=0 & \Rightarrow \beta=0 \\ \\ 2\,(\delta-\gamma)=0 & \Rightarrow \delta=\gamma \end{cases} \\
-\alpha-\delta &= 0 \Rightarrow \left\{ -\alpha-\delta=0 \Rightarrow \alpha=-\delta \right.
\end{aligned}
$$

de donde

$$
\begin{aligned}
\delta &= \gamma=-\alpha \\
\beta &= 0
\end{aligned}
$$

y hemos encontrado soluciones no nulas

$$(-\gamma,0,\gamma,\gamma)=\gamma\,(-1,0,1,1)\,,$$

se deduce que S_6 es un sistema linelamente dependiente.
Podemos usar la equivalencia entre $\mathbb{C}^3$ y $\mathbb{R}^6$ descrita en el apartado anterior.Si usamos la información del apartado anterior, podemos poner el sistema S_6 como un conjunto de vectores de $\mathbb{R}^6$ como

$$
S_6=\left\{ \begin{array}{l} (1,0,-1)=(1,0,-1)+i\,(0,0,0) \\ \\ (i,2,0)=(0,2,0)+i\,(1,0,0) \\ \\ (1,-2i,0)=(1,0,0)+i\,(0,-2,0) \\ \\ (0,2i,-1)=(0,0,-1)+i\,(0,2,0) \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} (1,0,-1,0,0,0) \\ \\ (0,2,0,1,0,0) \\ \\ (1,0,0,0,-2,0) \\ \\ (0,0,-1,0,2,0) \end{array} \right\}
$$

$$
S_6=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
$$

y buscamos su rango usando escalonamiento

$$S_6 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Eliminamos la 6 fila que es nula}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} F_1' = F_1 \\ F_2' = F_4 \\ F_3' = F_3 + F_1 \\ F_4' = F_2 - 2F_4 \\ F_5' = F_5 \end{array} \right\}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \{\text{Eliminamos la 4 fila que es nula}\}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ F_4'' = F_4' + 2F_3' \right\}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow R(S_6) = 3$$

Luego el rango es menor que el número de vectores, lo que indica que es un sistema linealmente dependiente. Tampoco es un sistema generador, puesto que el número de vectores linealmente independientes (3) es inferior a la dimensión del espacio (6)).

$g)$ Planteamos la combinación lineal correspondiente

$$\alpha(1+x) + \beta\left(x + x^2\right) + \gamma\left(1 + x^2\right) = 0,$$

de donde

$$(\alpha + \gamma) + (\alpha + \beta)x + (\beta + \gamma)x^2 = 0,$$

e igualando coeficientes:

$$\begin{aligned} \alpha + \gamma &= 0 \\ \alpha + \beta &= 0 \\ \beta + \gamma &= 0 \end{aligned}$$

sistema que tiene como única solución

$$\alpha = \beta = \gamma = 0$$

luego S_7 es un sistema linealmente independiente. Como hay 3 vectores y el espacio es de dimensión 3, S_3 es una base de $\mathbb{P}_2[\mathbb{R}]$.
Notar que este conjunto es equivalente (isomorfo) a $\mathbb{R}^3$, así que si utilizamos las coordenadas de los vectores de S_3 en la base canónica de $\mathbb{P}_2[\mathbb{R}]$, que es $C = \left\{1, x, x^2\right\}$, obtenemos

$$S_3 = \{(1,1,0)\,;(0,1,1)\,;(1,0,1)\}$$

cuya matriz asociada es:

$$S_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

con determinante

$$|S_3| = 2 \neq 0,$$

luego el rango es 3, los vectores son linealmente independientes y por tanto una base.

h) La matriz asociada es

$$S_3 = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & x \end{pmatrix}$$

cuyo determinante es

$$|S_3| = 4x \neq 0$$

de donde

$$|S_3| = 0 \Leftrightarrow 4x = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

Luego si $x \neq 0$, la matriz tiene determinante no nulo y el sistema es una base de $\mathbb{R}^3$, mientras que si $x = 0$, el sistema es linealmente dependiente y por tanto no es base.

3. ¿Cuáles de los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}^3$ son subespacios vectoriales del espacio vectorial $\mathbb{R}^3$?

   (a) $S_1 = \left\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 = x_2\right\}$.
   (b) $S_2 = \left\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 = 1\right\}$.
   (c) $S_3 = \left\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 x_2 x_3 = 0\right\}$.
   (d) $S_4 = \left\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 + x_2 + x_3 = 0\right\}$.

Solución:

a) Tomamos $u, v \in S_1$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Tomamos la combinación lineal correspondiente

$$\alpha u + \beta v = \alpha\,(x_1, x_2, x_3) + \beta\,(y_1, y_2, y_3) = (\alpha x_1 + \beta y_1, \alpha x_2 + \beta y_2, \alpha x_3 + \beta y_3)$$

pero como

$$\begin{aligned} u &= (x_1, x_2, x_3) \in S_1 \Rightarrow x_1 = x_2 \Rightarrow \alpha x_1 = a x_2 \\ v &= (y_1, y_2, y_3) \in S_1 \Rightarrow y_1 = y_2 \Rightarrow \beta y_1 = \beta y_2 \end{aligned}$$

por tanto

$$a x_1 + \beta y_1 = \alpha x_2 + \beta y_2$$

luego

$$\alpha u + \beta v \in S_1$$

El sistema S_1 es un subespacio vectorial.

b) Como $0 = (0,0,0) \notin S_2$, entonces no es un subespacio vectorial.

c) Aunque en este caso $(0,0,0) \in S_3$, si tomamos $u = (1,0,0)$ y $v = (0,1,1)$, es fácil comprobar que $u, v \in S_3$, pero
$$u + v = (1,0,0) + (0,1,1) = (1,1,1) \notin S_3,$$
luego S_3 no es un subespacio vectorial.

d) Tomamos $u, v \in S_4$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Tomamos la combinación lineal correspondiente
$$\alpha u + \beta v = \alpha (x_1, x_2, x_3) + \beta (y_1, y_2, y_3) = (\alpha x_1 + \beta y_1, \alpha x_2 + \beta y_2, \alpha x_3 + \beta y_3)$$
pero como
$$u = (x_1, x_2, x_3) \in S_1 \Rightarrow x_1 + x_2 + x_3 = 0$$
$$v = (y_1, y_2, y_3) \in S_1 \Rightarrow y_1 + y_2 + y_3 = 0$$
por tanto
$$\alpha (x_1 + x_2 + x_3) = 0 \Rightarrow \alpha x_1 + \alpha x_2 + \alpha x_3 = 0$$
$$\beta (y_1 + y_2 + y_3) = 0 \Rightarrow \beta y_1 + \beta y_2 + \beta y_3 = 0$$
luego
$$(\alpha x_1 + \alpha x_2 + \alpha x_3) + (\beta y_1 + \beta y_2 + \beta y_3) = 0$$
o reagrupando
$$(\alpha x_1 + \beta y_1) + (\alpha x_2 + \beta y_2) + (\alpha x_3 + \beta y_3) = 0,$$
es decir
$$\alpha u + \beta v \in S_4.$$
El conjunto S_4 es un subespacio vectorial.

4. Consideremos la base $B = \{(1,-1),(2,0)\}$ de $\mathbb{R}^2$. Se pide:

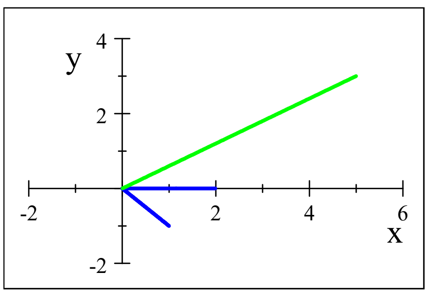
   (a) Representa gráficamente la base B en $\mathbb{R}^2$.

   (b) Encuentra la expresión del vector $v = (5,3)$ en la base B.

   (c) Si C es la base canónica de $\mathbb{R}^2$ halla las matrices cambio de base $M_{B \to C}$ y $M_{C \to B}$.

Solución:

a)
$$x + y = 0$$



Bases B (azul) y vector v (verde) del ejercicio 4.

b) Hay que expresar el vector $(5,3)$ como una combinación lineal de los elementos de la base B :

$$(5,3) = \alpha\,(1,-1) + \beta\,(2,0) = (\alpha + 2\beta, -\alpha)$$

de donde

$$\begin{aligned} 5 &= \alpha + 2\beta \\ 3 &= -\alpha \end{aligned}$$

sistema con solución

$$\begin{aligned} \alpha &= -3 \\ \beta &= 4 \end{aligned}$$

y tendremos

$$(5,3) = (-3,4)_B\,.$$

c) Dado (x,y) en la base canónica, buscamos sus coordenadas (α,β) en la base B, es decir

$$(x,y) = \alpha\,(1,-1) + \beta\,(2,0) = (\alpha + 2\beta, -\alpha)$$

de donde

$$\begin{aligned} x &= \alpha + 2\beta \\ \\ y &= -\alpha \end{aligned}$$

notar que

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$

de donde

$$M_{B\to C} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Para obtener $M_{C\to B}$, hay que despejar α y β en función de x

$$\left.\begin{array}{r} \alpha = -y \\ \\ \beta = \frac{x}{2} + \frac{y}{2} \end{array}\right\} \Longrightarrow \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

donde

$$M_{C\to B} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Notar que

$$M_{C\to B} = M_{B\to C}^{-1}$$

5. Consideremos las siguientes bases de R^2: $B = \{(0,2)\,,(1,3)\}$ y $B' = \{(1,1)\,,(1,-1)\}$. Se pide:

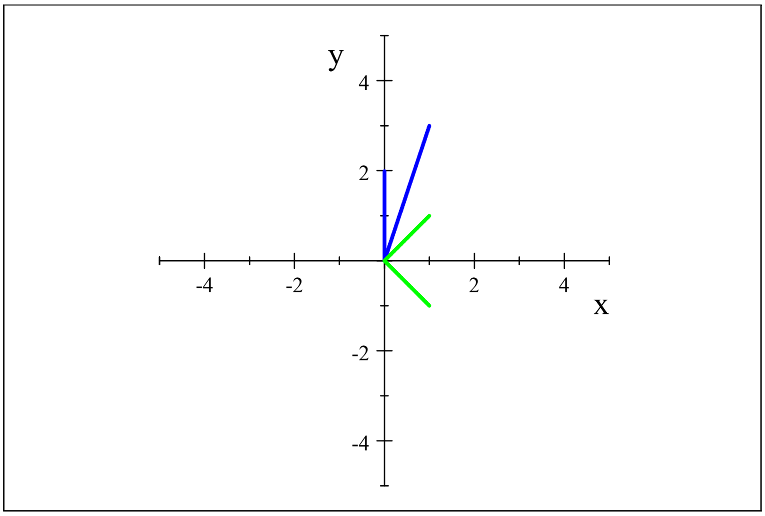
   (a) Dibuja las bases B y B'.

   (b) Halla las matrices cambio de base de B a B' y de B' a B, así como las ecuaciones del cambio de base de B a B' y de B' a B.

(c) Si u y v son vectores de $\mathbb{R}^2$ tales que $u_B = (-3, 5)$ y $v_{B'} = (0, 2)$, halla $u_{B'}$ y v_B.

Solución:

a)



Bases B (azul) y B' (verde) del ejercicio 5.

b) Podemos calcular las matrices directamente planteando las correspondientes ecuaciones

$$\left.\begin{array}{r} (0,2) = \alpha_{11}\,(1,1) + \alpha_{21}\,(1,-1) \\ \\ (1,3) = \alpha_{12}\,(1,1) + \alpha_{22}\,(1,-1) \end{array}\right\} \Rightarrow M_{B\to B'} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix}$$

y para el cambio de B' a B

$$\left.\begin{array}{r} (1,1) = \beta_{11}\,(0,2) + \beta_{21}\,(1,3) \\ \\ (1,-1) = \beta_{12}\,(0,2) + \beta_{22}\,(1,3) \end{array}\right\} \Rightarrow M_{B\to B'} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix}$$

Las soluciones son

$$\left.\begin{array}{c} \alpha_{11} = 1 \\ \alpha_{21} = -1 \\ \alpha_{12} = 2 \\ \alpha_{22} = -1 \end{array}\right\} \Rightarrow M_{B\to B'} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

para el primer sistema y

$$\left.\begin{array}{c} \beta_{11} = -1 \\ \beta_{21} = 1 \\ \beta_{12} = -2 \\ \beta_{22} = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow M_{B\to B'} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Notar que

$$M_{B\to B'} = \left(M_{B'\to B}\right)^{-1}$$

También es posible resolver este apartado utilizando la base canónica como transición entre las dos bases, de este modo

$$\begin{aligned}
M_{B\to B'} &= M_{C_2\to B'} \cdot M_{B\to C_2} = (M_{B'\to C_2})^{-1} M_{B\to C_2} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
M_{B'\to B} &= M_{C_2\to B} \cdot M_{B'\to C_2} = (M_{B\to C_2})^{-1} M_{B'\to C_2} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Las ecuaciones del cambio de base se obtienen fácilmente usando las matrices anteriores

$$(x,y)_B \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+2y \\ -x-y \end{pmatrix} \Rightarrow (x+2y, -x-y)_{B'}$$

$$(x,y)_{B'} \Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x-2y \\ x+y \end{pmatrix} \Rightarrow (-x-2y, x+y)_{B'}$$

c)

$$\begin{aligned}
(-3,5)_B &= (-3+10, 3-5)_{B'} = (7,-2)_{B'} \\
(0,2)_{B'} &= (-0-2*2, 0+2)_B = (-4,2)_{B'}
\end{aligned}$$

6. Encuentra una base, ecuaciones paramétricas y ecuaciones implícitas de cada uno de los siguientes subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^4$:

   a) $W_1 = \langle\{(2,-1,0,1)\,;(-2,1,-3,2)\}\rangle$.
   b) $W_2 = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 : x-y+z+t=0, y-z=0\}$.
   c) $W_3 = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 : x-2y+z=0\}$.
   d) W_4: $\begin{cases} x = \lambda+\alpha+\beta \\ y = \lambda-\alpha+3\beta \\ z = \lambda+2\alpha \\ t = 2\lambda+3\alpha+\beta \end{cases}$
   e) $W_5 = \langle\{(1,-1,0,1)\,;(2,-1,0,2)\,;(-1,2,0,-1)\}\rangle$.

Solución:

a) Tenemos la base de W_1, puesto que son dos vectores no nulos que no tienen las coordenadas proporcionales

$$B_{W_1} = \{(2,-1,0,1)\,;(-2,1,-3,2)\}$$

Las ecuaciones parámetricas son

$$(x,y,z,t) = \alpha\,(2,-1,0,1) + \beta\,(-2,1,-3,2) = (2\alpha-2\beta, \beta-\alpha, -3\beta, \alpha+2\beta)$$

es decir

$$\begin{aligned} x &= 2\alpha - 2\beta \\ y &= \beta - \alpha \\ z &= -3\beta \\ t &= \alpha + 2\beta \end{aligned}$$

Las ecuaciones implícitas se resuelven eliminando los parámetros. Sumando la primera y la cuarta ecuación obtenemos

$$x + t = 3\alpha \Rightarrow \alpha = \frac{1}{3}(x+t)$$

De la tercera

$$\beta = -\frac{1}{3}z$$

y sustituimos α y β en la segunda y cuarta para obtener

$$y = \beta - \alpha = -\frac{1}{3}z - \frac{1}{3}(x+t) \Rightarrow 3y = -z - x - t \Rightarrow x + 3y + z + t = 0$$

$$t = \alpha + 2\beta = \frac{1}{3}(x+t) + 2\left(-\frac{1}{3}z\right) \Rightarrow 3t = x + t - 2z \Rightarrow x - 2z - 2t = 0$$

También podemos escalonar la matriz

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & x \\ -1 & 1 & y \\ 0 & -3 & z \\ 1 & 2 & t \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & t \\ -1 & 1 & y \\ 0 & -3 & z \\ 2 & -2 & x \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & t \\ 0 & 3 & t+y \\ 0 & -3 & z \\ 0 & -6 & x-2t \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & t \\ 0 & 3 & t+y \\ 0 & 0 & t+y+z \\ 0 & 0 & 2y+x \end{pmatrix}$$

que nos proporciona las ecuaciones

$$\begin{aligned} y + z + t &= 0 \\ \\ x + 2y &= 0 \end{aligned}$$

Aunque no sean iguales, recordemos que las ecuaciones no son únicas. Notar que si despejamos de la primera ecuación $y = -z - t$, y sustituimos en la segunda, obtenemos $x + 2(-z - t) = 0 \Rightarrow x - 2x - 2t = 0$, que es una de las ecuaciones obtenidas en el apartado anterior. Mientras que si sumamos las dos ecuaciones, obtendremos $(y + z + t) + (x + 2y) = 0 \Rightarrow x + 3y + z + t = 0$, que es la primera de las ecuaciones obtenidas antes.

b) En este apartado tenemos las ecuaciones implícitas de W_2 y a partir de ellas podemos obtener las paramétricas tomando $x = \alpha$ e $y = \beta$, de la segunda ecuación

$$y - z = 0 \Rightarrow z = y = \beta$$

y usando la primera ecuación

$$x - y + z + t = 0 \Rightarrow t = y - x - z = \beta - \alpha - \beta = -\alpha$$

Por tanto las ecuaciones son

$$\begin{aligned} x &= \alpha \\ y &= \beta \\ z &= \beta \\ t &= -\alpha \end{aligned}$$

Los puntos son de la forma

$$(\alpha, \beta, \beta, -\alpha) = \alpha\,(1, 0, 0, -1) + \beta\,(0, 1, 1, 0)$$

y como las coordenadas de los vectores no son proporcionales, tendremos una base de W_2

$$W_2 = \langle\{(1, 0, 0, -1)\,; (0, 1, 1, 0)\}\rangle$$

c) Tenemos las ecuaciones implícitas de W_3 y a partir de ellas podemos obtener las paramétricas tomando $x = \alpha$, $y = \beta$, $t = \gamma$, de la ecuación

$$x - 2y + z = 0 \Rightarrow z = 2y - x = 2\beta - \alpha$$

Por tanto las ecuaciones son

$$\begin{aligned} x &= \alpha \\ y &= \beta \\ z &= 2\beta - \alpha \\ t &= \gamma \end{aligned}$$

Los puntos son de la forma

$$(\alpha, \beta, 2\beta - \alpha, \gamma) = \alpha\,(1, 0, -1, 0) + \beta\,(0, 1, 2, 0) + \gamma\,(0, 0, 0, 1)$$

y tendremos una base de W_3

$$W_2 = \langle\{(1, 0, -1, 0)\,; (0, 1, 2, 0)\,; (0, 0, 0, 1)\}\rangle\,.$$

d) En este caso tenemos las ecuaciones paramétricas del subespacio y tendremos

$$(x, y, z, t) = (\lambda + \alpha + \beta, \lambda - \alpha + 3\beta, \lambda + 2\alpha, 2\lambda + 3\alpha + \beta) = \alpha\,(1, -1, 2, 3) + \beta\,(1, 3, 0, 1) + \lambda\,(1, 1, 1, 2)$$

de modo que

$$W_4 = \langle\{(1, -1, 2, 3)\,; (1, 3, 0, 1)\,; (1, 1, 1, 2)\}\rangle$$

Notar que uno de los vectores es combinación lineal de los otros

$$(1, -1, 2, 3) + (1, 3, 0, 1) = (2, 2, 2, 4) = 2\,(1, 1, 1, 2)$$

luego

$$W_4 = \langle\{(1, -1, 2, 3)\,; (1, 3, 0, 1)\}\rangle\,.$$

Para encontrar las ecuaciones implícitas podemos escalonar la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & x \\ -1 & 3 & y \\ 2 & 0 & z \\ 3 & 1 & t \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & x \\ 0 & 4 & x + y \\ 0 & -2 & z - 2x \\ 0 & -2 & t - 3x \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & x \\ 0 & 2 & 3x - t \\ 0 & -2 & z - 2x \\ 0 & 4 & x + y \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & x \\ 0 & 2 & 2x - z \\ 0 & 0 & x + z - t \\ 0 & 0 & x + y - 6x + 2z \end{pmatrix}$$

de donde obtenemos las ecuaciones implícitas

$$\begin{aligned} x+z-t &= 0, \\ -5x+y+2z &= 0. \end{aligned}$$

e) Primero comprobamos si los vectores que generan W_5 son linealmente independientes. Para ello, construímos la matriz y escalonamos

$$\{(1,-1,0,1)\,;(2,-1,0,2)\,;(-1,2,0,-1)\}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow r(S) = 2$$

el rango es 2 y podemos prescindir de uno de los vectores que generan W_5, tomando dos cuyas componentes no sean proporcionales, de este modo

$$W_5 = \langle \{(1,-1,0,1)\,;(2,-1,0,2)\} \rangle\,.$$

A partir de aquí es como el ejercicio del apartado *a*. Las ecuaciones parámetricas son

$$(x,y,z,t) = \alpha\,(1,-1,0,1) + \beta\,(2,-1,0,2) = (\alpha+2\beta, -\alpha-\beta, 0, \alpha+2\beta)$$

es decir

$$\begin{aligned} x &= \alpha+2\beta \\ y &= -\alpha-\beta \\ z &= 0 \\ t &= \alpha+2\beta \end{aligned}$$

Directamente obtenemos $t = x$ y $z = 0$.

7. Determina unas ecuaciones implícitas de los siguientes subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^4$

$$U = \left\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 : x+y+z-t=0; x+2y-z=0\right\} \text{ y } W = \langle \{(1,-1,0,3)\,;(2,1,-1,2)\} \rangle\,,$$

así como también de $U \cap W$ y de $U + W$. Concluye si la suma es directa o no.

Solución: Para definir $U \cap W$, necesitamos las ecuaciones implícitas de ambos subespacios. Los vectores que engendran W son linealmente independientes por no ser proporcionales, por tanto podemos obtener las ecuaciones implícitas de W, escalonando la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & x \\ -1 & 1 & y \\ 0 & -1 & z \\ 3 & 2 & t \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & x \\ 0 & 3 & x+y \\ 0 & -1 & z \\ 0 & -4 & t-3x \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & x \\ 0 & 1 & -z \\ 0 & 0 & x+y+3z \\ 0 & 0 & t-3x-4z \end{pmatrix}$$

de modo que

$$W = \left\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 : x+y+3z=0; 3x-t+4z=0\right\}$$

y el subespacio $U \cap W$ sería

$$U \cap W = \left\{ (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 : \begin{array}{r} x+y+3z=0 \\ 3x-t+4z=0 \\ x+y+z-t=0 \\ x+2y-z=0 \end{array} \right\}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 4 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & -3 & -5 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & -4 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & -3 & -5 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -17 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{15}{2} \end{pmatrix}$$

como el rango es máximo, el sistema tiene como única solución 0, por tanto

$$U \cap W = \{0\}$$

Para construir $U + W$ necesitamos una base de cada subespacio. Para encontrar una base de U

$$\left. \begin{array}{r} x+y+z-t=0 \\ \\ x+2y-z=0 \end{array} \right\}$$

Tomando $x = \alpha$ y $y = \beta$

$$\begin{aligned} z &= x+2y = \alpha + 2\beta \\ \\ t &= x+y+z = \alpha+\beta+(\alpha+2\beta) = 2\alpha+3\beta \end{aligned}$$

Los vectores de U son

$$(\alpha, \beta, \alpha+2\beta, 2\alpha+3\beta) = \alpha\,(1,0,1,2) + \beta\,(0,1,2,3)\,,$$

y

$$U = \langle \{(1,0,1,2)\,;(0,1,2,3)\} \rangle$$

Y usando la base de W

$$U + W = \langle \{(1,-1,0,3)\,;(2,1,-1,2)\,;(1,0,1,2)\,;(0,1,2,3)\} \rangle$$

No obstante usando la ecuación de dimensiones, tendremos

$$\begin{aligned} \dim(U+W) &= \dim(U) + \dim(W) - \dim(U \cap W) \\ \\ &= 2+2-0 = 4 \end{aligned}$$

Luego

$$U + W = \mathbb{R}^4$$

y la suma es directa, puesto que en la intersección sólo está el elemento neutro.