1. Se consideran en $\mathbb{R}^3$, junto con el producto escalar euclídeo, los siguientes subespacios:

$$U \equiv \left\{ \begin{array}{l} x - y - z = 0 \\ x - z = 0 \end{array} \right. \quad \text{y } W = \langle \{(2, 0, -1) ; (0, -4, 1)\} \rangle$$

   a) Encuentra una base ortonormal de cada uno de los subespacios.

   b) Encuentra una base de $U^\perp$ y otra de $W^\perp$.

   c) Calcula la proyección ortogonal del vector $\overrightarrow{v} = (3, 2, 1)$ sobre U y también sobre W.

2. Considera $\mathbb{R}^3$ junto con el producto escalar

$$\langle (x, y, z) ; (x', y', z') \rangle_P = 2xx' + 4yy' + zz'$$

   a) Encuentra mediante el método de Gram-Schmidt una base ortonormal del subespacio

$$U = \langle \{(1, -1, 2) ; (0, 3, -2)\} \rangle$$

   b) Calcular mediante el método de Gram-Schmidt una base ortonormal del subespacio

$$W = \{(x, y, z) : x - 2y + z = 0, 3x - 2y - z = 0\}$$

3. En el espacio vectorial $\mathbb{P}_2[\mathbb{R}]$ de los polinomios reales de grado menor o igual que 2 se considera el siguiente producto escalar

$$\langle p_1(x), p_2(x) \rangle = \int_0^1 p_1(x) \, p_2(x) \, dx$$

   Calcular una base ortonormal del subespacio de $\mathbb{P}_2[\mathbb{R}]$

$$S = \langle x, 2 + 5x - 4x^2 \rangle$$

4. **Matrices ortogonales**. Una matriz cuyas columnas son vectores ortonormales dos a dos se dice matriz ortogonal. Se pide:

   a) Sea A una matriz ortogonal. Comprueba que $A^T \cdot A = I$ y por tanto $A^T = A^{-1}$.

   b) Comprueba que la matriz de rotación en el plano

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

   es ortogonal (respecto al producto escalar usual de $\mathbb{R}^2$) y encuentra su inversa. Analiza geométricamente el efecto que se produce al multiplicar A sobre el vector $\overrightarrow{i} = (1, 0)$ y sobre $\overrightarrow{j} = (0, 1)$.

   c) Comprueba que la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

   al actuar sobre un vector $\overrightarrow{v} = (x, y)$ permuta el orden de las coordenadas x e y. Analiza si se trata de una matriz ortogonal (respecto al producto escalar usual de $\mathbb{R}^2$) y encuentra su inversa.

5. Supongamos que una partícula se desplaza desde la posición $\overrightarrow{r}_1 = (x_1, y_1, z_1)$ a $\overrightarrow{r}_2 = (x_2, y_2, z_2)$ por acción de una fuerza $\overrightarrow{F} = (F_1, F_2, F_3)$. Se define el trabajo ejercido por $\overrightarrow{F}$ produciendo un desplazamiento $\overrightarrow{d} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$ como

$$W = \left\langle \overrightarrow{F}; \overrightarrow{d} \right\rangle = \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{d}.$$

Supongamos que $\overrightarrow{F} = 3\overrightarrow{i} + 2\overrightarrow{j}$ y que $\overrightarrow{d} = 2\overrightarrow{i} - \overrightarrow{j}$. Se pide:

   a) Calcula el trabajo W.

   b) Calcula la proyección de $\overrightarrow{F}$ sobre el subespacio generado por $\overrightarrow{d}$, es decir, la componente de la fuerza en dirección del desplazamiento.

   c) Calcula la componente normal de $\overrightarrow{F}$, es decir, la proyección de $\overrightarrow{F}$ sobre el subespacio ortogonal a $\overrightarrow{d}$.

6. Se considera el espacio de funciones

$$\mathcal{L}^2\left([-\pi, \pi]; \mathbb{R}\right) = \left\{ f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R} : \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\, dx < \infty \right\}.$$

Se pide:

   a) Comprueba que el sistema de vectores

$$\{1, \cos x, \operatorname{sen} x, \cos(2x), \operatorname{sen}(2x), \cdots, \cos(nx), \operatorname{sen}(nx), \cdots\}. \tag{1}$$

   es un sistema ortogonal respecto al producto escalar

$$\langle f; g \rangle_{\mathcal{L}^2} = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, g(x)\, dx, \quad f, g \in \mathcal{L}^2\left([-\pi, \pi]; \mathbb{R}\right).$$

   Indicación: Usar las fórmulas trigonométricas siguientes:

$$\operatorname{sen}\alpha \cos\beta = \frac{1}{2}\operatorname{sen}(\alpha+\beta) + \frac{1}{2}\operatorname{sen}(\alpha-\beta)$$

$$\operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\beta = \frac{1}{2}\cos(\alpha-\beta) - \frac{1}{2}\cos(\alpha+\beta)$$

$$\cos\alpha \cos\beta = \frac{1}{2}\cos(\alpha+\beta) + \frac{1}{2}\cos(\alpha-\beta)$$

   b) Dada $f \in \mathcal{L}^2\left([-\pi, \pi]; \mathbb{R}\right)$, las coordenadas de f en el sistema (1) son los coeficientes de Fourier, es decir,

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos(nx) + b_n \operatorname{sen}(nx)\right).$$

   El término de la derecha en la igualdad anterior se llama serie de Fourier de f. Notar que la suma tiene infinitos términos. Comprueba que los coeficientes de Fourier a_n y b_n están dados por las fórmulas

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx)\, dx, \quad n \geq 0$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \operatorname{sen}(nx)\, dx, \quad n \geq 1$$

   c) Calcula los coeficientes de Fourier en $\mathcal{L}^2\left([-\pi, \pi]; \mathbb{R}\right)$ de las funciones $f(x) = x$ y $g(x) = |x|$.
