1. Se consideran en $\mathbb{R}^3$, junto con el producto escalar euclídeo, los siguientes subespacios:

$$U \equiv \begin{cases} x - y - z = 0 \\ \\ x - z = 0 \end{cases} \quad \text{y } W = \langle \{(2,0,-1)\,;(0,-4,1)\} \rangle$$

   a) Encuentra una base ortonormal de cada uno de los subespacios.
   b) Encuentra una base de $U^\perp$ y otra de $W^\perp$.
   c) Calcula la proyección ortogonal del vector $\overrightarrow{v} = (3,2,1)$ sobre $U$ y también sobre $W$.

**Solución:**

a) Buscamos una base de $U$

$$\left.\begin{array}{r} x-y-z=0 \\ \\ x-z=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x-y-z=0 \\ \\ x=z \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} y=x-z \\ \\ x=z \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} y=0 \\ \\ x=z \end{array}\right\}$$

Tomando $z = \alpha$, obtenemos las ecuaciones paramétricas de $U$

$$\left.\begin{array}{r} x=\alpha \\ y=0 \\ z=\alpha \end{array}\right\} \Rightarrow (\alpha, 0, \alpha)\,,$$

y como base de $U$

$$B_U = \{u_1 = (1,0,1)\}\,.$$

Como $B_U$ está formada por un sólo vector, es una base ortogonal. Para encontrar una base ortonormal, dividiremos este vector por su norma

$$\|u_1\| = \|(1,0,1)\| = \sqrt{1^2+0^2+1^2} = \sqrt{2}.$$

La base ortonormal es

$$B'_U = \left\{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right\}$$

.

Los vectores $w_1 = (2,0,-1)$ y $w_2 = (0,-4,1)$, son linealmente independientes puesto que sus coordenadas no son proporcionales, por tanto tendremos una base de $W$

$$B_W = \{w_1 = (2,0,-1), w_2 = (0,-4,1)\}\,.$$

Para encontrar una base ortornomal $B'_W = \{w'_1, w'_2\}$ de $W$, usamos el método de Gram-Schmidt. Con este método

$$w'_1 = w_1 = (2,0,-1)\,,$$

mientras que $w'_2$ se obtiene como

$$w'_2 = w_2 + \alpha_{21} w'_1 = (0,-4,1) + \alpha_{21}\,(2,0,-1)\,,$$

eligiendo el valor de $\alpha_{21} \in \mathbb{R}$ para que $w_2' \perp w_1'$, es decir

$$0 = \langle w_1', w_2' \rangle \Rightarrow 0 = \langle w_1', w_2 + \alpha_{21} w_1' \rangle$$

y por bilinealidad

$$0 = \langle w_1', w_2 + \alpha_{21} w_1' \rangle = \langle w_1', w_2 \rangle + \alpha_{21} \langle w_1', w_1' \rangle ,$$

de donde se obtiene

$$\alpha_{21} = -\frac{\langle w_1', w_2 \rangle}{\langle w_1', w_1' \rangle} = -\frac{\langle (2,0,-1), (0,-4,1) \rangle}{\langle (2,0,-1), (2,0,-1) \rangle} = \frac{1}{5} \Rightarrow w_2' = \left( \frac{2}{5}, -4, \frac{4}{5} \right).$$

Tomaremos como base ortogonal

$$B_W' = \{(2,0,-1), (2,-20,4)\}$$

tomando como vector de la base el vector $5w_2'$.
Para encontrar la base ortonormal $B'' = \{w_1'', w_2''\}$ se dividirá cada vector por su norma correspondiente

$$\|w_1'\| = \|(2,0,-1)\| = \sqrt{5} \Rightarrow w_1'' = \left( \frac{2}{\sqrt{5}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{5}} \right)$$

$$\|w_2'\| = \|(2,-20,4)\| = \sqrt{420} = 2\sqrt{105} \Rightarrow w_2'' = \left( \frac{2}{2\sqrt{105}}, -\frac{20}{2\sqrt{105}}, \frac{4}{2\sqrt{105}} \right) = \left( \frac{1}{\sqrt{105}}, -\frac{10}{\sqrt{105}}, \frac{2}{\sqrt{105}} \right)$$

*b*) Para obtener un base de $U^\perp$, utilizaremos que $U$ está definido mediante ecuaciones implíticas

$$U = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x - y - z = 0;\ x - z = 0 \right\}$$

y usando el producto escalar

$$U = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \langle (1,-1,-1), (x,y,z) \rangle = 0;\ \ \langle (1,0,-1), (x,y,z) \rangle = 0 \right\}$$

y obtenemos una base de $U^\perp$

$$B_{U^\perp} = \{ u_2 = (1,-1,-1)\,; u_3 = (1,0,-1) \}$$

Para obtener una base de $W^\perp$, usamos la base de $\cancel{W}$, para obtener las ecuaciones implícitas de $W^\perp$

$$\begin{aligned} W^\perp &= \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \langle (2,0,-1), (x,y,z) \rangle = 0;\ \ \langle (0,-4,1), (x,y,z) \rangle = 0 \right\} \\ &= \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 2x - z = 0;\ \ -4y + z = 0 \right\} \end{aligned}$$

De donde, resolviendo el sistema, obtendremos las paramétricas

$$\left. \begin{array}{r} 2x - z = 0 \\ -4y + z = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{r} x = \dfrac{z}{2} \\ y = \dfrac{z}{4} \end{array} \right\}$$

Tomando $z = \alpha$, las ecuaciones paramétricas de $U$ serán

$$\left. \begin{array}{r} x = \dfrac{\alpha}{2} \\ y = \dfrac{\alpha}{4} \\ z = \alpha \end{array} \right\} \Rightarrow W^\perp = \left\langle \left( \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, 1 \right) \right\rangle = \langle (2,1,4) \rangle$$

con

$$w_3 = (2,1,4)\,.$$

*c*) Proyección ortogonal sobre $U$, teniendo en cuenta que $v = v_1 + v_2$; con $v_1 \in U$ y $v_2 \in U^{\perp}$, calculamos $\langle v, u_1 \rangle$

$$\langle v, u_1 \rangle = \langle v_1 + v_2, u_1 \rangle = \langle v_1, u_1 \rangle + \langle v_2, u_1 \rangle$$

como

$$\left.\begin{array}{r} v_2 \in U^{\perp} \\ \\ u_1 \in U \end{array}\right\} \Rightarrow \langle v_2, u_1 \rangle = 0,$$

de donde

$$\langle v, u_1 \rangle = \langle v_1, u_1 \rangle .$$

Como $v_1 \in U = \langle u_1 \rangle \Rightarrow v_1 = \alpha u_1$, por tanto

$$\langle v, u_1 \rangle = \langle \alpha u_1, u_1 \rangle = \alpha \langle u_1, u_1 \rangle$$

y despejando $\alpha$

$$\alpha = \frac{\langle v, u_1 \rangle}{\langle u_1, u_1 \rangle} = \frac{\langle (3,2,1), (1,0,1) \rangle}{\langle (1,0,1), (1,0,1) \rangle} = \frac{4}{2} = 2 \Rightarrow v_1 = 2u_1 = (2,0,2) .$$

Para calcular la proyección ortogonal sobre $W$, usando $v = v_1' + v_2'$; con $v_1' \in W$ y $v_2' \in W^{\perp}$. Como $\dim\left(W^{\perp}\right) = 1$, lo que haremos para simplificar los cálculos es encontrar el valor de $v_2'$, que es la proyección ortogonal de $v$ sobre $W^{\perp}$, para ello, calculamos $\langle v, w_3 \rangle$

$$\langle v, w_3 \rangle = \langle v_1' + v_2', w_3 \rangle = \langle v_1', w_3 \rangle + \langle v_2', w_3 \rangle$$

como $v_1' \in W$ y $w_3 \in W^{\perp}$, entonces $\langle v_1', w_3 \rangle = 0$, y como $v_2' \in W^{\perp}$ entonces $v_2' = \beta w_3$, obteniéndose

$$\langle v, w_3 \rangle = \langle \beta w_3, w_3 \rangle = \beta \langle w_3, w_3 \rangle$$

y despejando $\beta$

$$\beta = \frac{\langle v, w_3 \rangle}{\langle w_3, w_3 \rangle} = \frac{\langle (3,2,1), (2,1,4) \rangle}{\langle (2,1,4), (2,1,4) \rangle} = \frac{12}{21} = \frac{4}{7} \Rightarrow v_2' = \frac{4}{7} w_3 = \left( \frac{8}{7}, \frac{4}{7}, \frac{16}{7} \right)$$

El vector $v_2'$ es la proyección ortogonal sobre $W^{\perp}$, pero podemos encontrar $v_1'$ la proyección ortogonal sobre $W$, usando el hecho de que $v = v_1' + v_2'$

$$v = v_1' + v_2' \Leftrightarrow v_1' = v - v_2' = (3,2,1) - \left( \frac{8}{7}, \frac{4}{7}, \frac{16}{7} \right) = \left( \frac{13}{7}, \frac{10}{7}, -\frac{9}{7} \right).$$

2. Considera $\mathbb{R}^3$ junto con el producto escalar

$$\langle (x,y,z) ; (x',y',z') \rangle_P = 2xx' + 4yy' + zz'$$

*a*) Encentra mediante el método de Gram-Schmidt una base ortonormal del subespacio

$$U = \langle (1,-1,2), (0,3,-2) \rangle$$

*b*) Calcular mediante el método de Gram-Schmidt una base ortonormal del subespacio

$$W = \{(x,y,z) : x - 2y + z = 0, 3x - 2y - z = 0\}$$

**Solución**

a) El sistema $B = \{u_1 = (1,-1,2)\,; u_2 = (0,3,-2)\}$, es un sistema linealmente independiente, puesto que los coeficientes no son proporcionales y por tanto forman una base de $U$. Para obtener una base ortogonal de $U$, $B' = \{u_1', u_2'\}$, usamos el método de Gram-Schmidt. Definiremos $u_1'$ como

$$u_1' = u_1 = (1,-1,2)\,,$$

mientra que para $u_2'$ estará definido de la forma

$$u_2' = u_2 + \alpha_{21} u_1',$$

eligiendo $\alpha_{21}$ de forma que $u_2'$ sea ortogonal a $u_1'$, usando el producto escalar $\langle\rangle_P$, esto es

$$\langle u_1'; u_2'\rangle_P = 0 \Leftrightarrow \langle (1,-1,2)\,; u_2 + \alpha_{21}u_1'\rangle_P = 0 \Leftrightarrow \langle (1,-1,2)\,; u_2\rangle_P + \alpha_{21}\,\langle (1,-1,2)\,; u_1'\rangle_P = 0$$

de donde obtenemos el valor de $\alpha_{21}$

$$\alpha_{21} = -\frac{\langle (1,-1,2)\,; u_2\rangle_P}{\langle (1,-1,2)\,; u_1'\rangle_P} = -\frac{\langle (1,-1,2)\,; (0,3,-2)\rangle_P}{\langle (1,-1,2)\,; (1,-1,2)\rangle_P} = -\frac{2\cdot(1\cdot 0) + 4\cdot((-1)\cdot 3) + (2\cdot(-2))}{2\cdot(1\cdot 1) + 4\cdot((-1)\cdot(-1)) + (2\cdot 2)} = \frac{8}{5}.$$

Y $u_2'$

$$u_2' = u_2 + \alpha_{21}u_1' = (0,3,-2) + \frac{8}{5}(1,-1,2) = \left(\frac{8}{5},\frac{7}{5},\frac{6}{5}\right)$$

Por simplicidad multiplicamos este vector por 5 y una base ortogonal será

$$B' = \{(1,-1,2)\,; (8,7,6)\}\,.$$

Para encontrar una base ortornormal, necesitamos conocer la norma asociada a este producto escalar

$$\|(x,y,z)\|_P = \sqrt{\langle (x,y,z)\,; (x,y,z)\rangle_P} = \sqrt{2x^2 + 4y^2 + z^2},$$

por tanto

$$\begin{aligned}
\|u_1'\|_P &= \|(1,-1,2)\|_P = \sqrt{2\cdot(1)^2 + 4\cdot(-1)^2 + (2)^2} = \sqrt{10} \\
\|u_2'\|_P &= \|(8,7,6)\|_P = \sqrt{2\cdot(8)^2 + 4\cdot(7)^2 + (6)^2} = 6\sqrt{2}\sqrt{5}
\end{aligned}$$

y la base ortonormal será

$$B'' = \left\{\frac{u_1'}{\|u_1'\|_P}, \frac{u_2'}{\|u_1'\|_P}\right\} = \left\{\left(\frac{1}{\sqrt{10}}, \frac{-1}{\sqrt{10}}, \frac{2}{\sqrt{10}}\right); \left(\frac{8}{6\sqrt{2}\sqrt{5}}, \frac{7}{6\sqrt{2}\sqrt{5}}, \frac{6}{6\sqrt{2}\sqrt{5}}\right)\right\}.$$

b) Obtenemos una base de $W$ usando sus ecuaciones implícitas:

$$\left.\begin{array}{r} x-2y+z=0\ (1) \\ 3x-2y-z=0\ (2) \end{array}\right\}\ (1){+}(2) \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x-2y+z=0 \\ 4x-4y=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x-2x+z=0 \\ x=y \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x=z \\ x=y \end{array}\right\},$$

Tomando $z = \alpha$, obtenemos las ecuaciones paramétricas

$$\left.\begin{array}{r} x=\alpha \\ y=\alpha \\ z=\alpha \end{array}\right\} \Rightarrow (\alpha,\alpha,\alpha)$$

de forma que una base de $W$ es

$$B = \{(1,1,1)\}\,,$$

que como es un único vector también será ortogonal. Para encontrar una base ortornormal, tenemos que dividir por su norma, obtenida usando el producto escalar $\langle ; \rangle_P$

$$\|(1,1,1)\|_P = \sqrt{\langle (1,1,1)\,;(1,1,1)\rangle_P} = \sqrt{4\cdot 1^2 + 2\cdot 1^2 + 1^2} = \sqrt{7}.$$

Y la base ortonormal es

$$B'' = \left\{ \left( \frac{1}{\sqrt{7}}, \frac{1}{\sqrt{7}}, \frac{1}{\sqrt{7}} \right) \right\}.$$

Como ejercicio adicional, supongamos que queremos encontrar una base de $W^{\perp}$, para ello recurrimos a su definición

$$W^{\perp} = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \langle (x,y,z)\,; w\rangle_P = 0;\ \forall u \in W \right\}.$$

Sólo es necesario que sea ortogonal para los vectores de una base de $W$ (podríamos tomar $B, B'$ o $B''\}$ :

$$W^{\perp} = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \langle (x,y,z)\,;(1,1,1)\rangle_P = 0 \right\} = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 2x + 4y + z = 0 \right\}$$

Haciendo el cambio $x = \alpha$, $y = \beta$, obtenemos las ecuaciones paramétricas

$$\left. \begin{array}{r} x = \alpha \\ \\ y = \beta \\ \\ z = -2\alpha - 4\beta \end{array} \right\} \Leftrightarrow (\alpha, \beta, -2\alpha - 4\beta) = \alpha\,(1,0,-2) + \beta\,(0,1,-4)$$

de donde obtenemos la base de $W^{\perp}$

$$B_{W^{\perp}} = \{(1,0,-2)\,;(0,1,-4)\}.$$

También hubiera sido posible encontrar una base recurriendo a las ecuaciones implícitas de $W$

$$\left. \begin{array}{r} x - 2y + z = 0 \\ \\ 3x - 2y - z = 0 \end{array} \right\}$$

Podemos expresar estas ecuaciones como

$$\begin{aligned} x - 2y + z &= 0 \Leftrightarrow 2\left(x \cdot \frac{1}{2}\right) + 4\left(y \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)\right) + z \cdot 1 = 0 \\ 3x - 2y - z &= 0 \Leftrightarrow 2\left(x \cdot \frac{3}{2}\right) + 4\left(y \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)\right) + z \cdot (-1) = 0 \end{aligned}$$

O usando el producto escalar $\langle ; \rangle_P$

$$\begin{aligned} x - 2y + z &= 0 \Leftrightarrow \left\langle (x,y,z)\,; \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1\right) \right\rangle_P = 0 \\ 3x - 2y - z &= 0 \Leftrightarrow \left\langle (x,y,z)\,; \left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, -1\right) \right\rangle_P = 0 \end{aligned}$$

que nos proporciona la base de $W^{\perp}$

$$B_{W^{\perp}} = \{(1,-1,2)\,;(3,-1,-2)\}$$

que aunque no sea la misma que la obtenida con el proceso anterior, genera el mismo espacio vectorial ya que

$$\begin{aligned} (1,0,-2) &= -\frac{1}{2}(1,-1,2) + \frac{1}{2}(3,-1,-2)\,; \\ (0,1,-4) &= -\frac{3}{2}(1,-1,2) + \frac{1}{2}(3,-1,-2)\,. \end{aligned}$$

3. En el espacio vectorial $\mathbb{P}_2[\mathbb{R}]$ de los polinomios reales de grado menor o igual que 2 se considera el siguiente producto escalar

$$\langle p_1(x), p_2(x)\rangle = \int_0^1 p_1(x)\, p_2(x)\, dx$$

Calcular una base ortonormal del subespacio de $\mathbb{P}_2[\mathbb{R}]$

$$S = \left\langle x, 2+5x-4x^2 \right\rangle$$

**Solución:** En primer lugar vamos a comprobar que $B = \left\{x, 2+5x-4x^2\right\}$ es una base de $S$; para ello, tenemos que comprobar que son linealmente independientes, así que si suponemos que existen coeficientes $\alpha$ y $\beta$ de $\mathbb{R}$, que cumplen

$$\alpha x + \beta\left(2+5x-4x^2\right) = 0 \Leftrightarrow \beta 2 + (\alpha + 5\beta)\, x - 4\beta x^2 = 0,$$

e identificando coeficientes

$$\begin{aligned} \beta &= 0 \\ \alpha + 5\beta &= 0 \\ -4\beta &= 0 \end{aligned}$$

que tiene como única solución $\alpha = \beta = 0$; luego los dos polinomios son linealmente independientes. Vamos a construir la base ortogonal mediante Gram-Schmidt a partir de $B$. Si llamamos $u_1(x) = x$ y $u_2(x) = 2+5x-4x^2$, los elementos de la base ortorgonal $B' = \{v_1(x), v_2(x)\}$ se construyen de forma usual, tomando $v_1(x) = u_1(x)$

$$v_1(x) = x$$

y después construyendo $v_2(x)$ como

$$v_2(x) = u_2(x) + \alpha_{21} v_1(x),$$

siendo $\alpha_{21} \in \mathbb{R}$, de forma que $\langle v_1(x), v_2(x)\rangle = 0$

$$\langle v_1(x), v_2(x)\rangle = 0 \Leftrightarrow \langle x, u_2(x) + \alpha_{21} v_1(x)\rangle = 0 \Leftrightarrow \langle x, u_2(x)\rangle + \alpha_{21}\langle x, x\rangle = 0 \Leftrightarrow \alpha_{21} = -\frac{\langle x, u_2(x)\rangle}{\langle x, x\rangle}$$

y calculamos cada uno de los valores usando la definición de producto escalar dada en el enunciado

$$\langle x, u_2(x)\rangle = \int_0^1 x u_2(x)\, dx = \int_0^1 x\left(2+5x-4x^2\right) dx = \int_0^1 \left(2x+5x^2-4x^3\right) dx = x^2 + \frac{5x^3}{3} - x^4\Big|_{x=0}^{x=1} = \frac{5}{3}$$

$$\langle x, x\rangle = \int_0^1 (x\cdot x)\, dx = \int_0^1 x^2 dx = \frac{x^3}{3}\Big|_{x=0}^{x=1} = \frac{1}{3},$$

y

$$\alpha_{21} = -\frac{5/3}{1/3} = -5,$$

y por tanto

$$v_2(x) = u_2(x) + \alpha_{21} v_1(x) = \left(2+5x-4x^2\right) - 5(x) = 2-4x^2,$$

siendo

$$B' = \left\{x, 2-4x^2\right\}$$

la base ortogonal buscada. Para encontrar la base ortonormal, tenemos que calcular la norma de cada uno de los polinomios, siempre según el producto escalar asociado

$$\begin{aligned} \|v_1(x)\| &= \|x\| = \sqrt{\langle x; x\rangle} = \sqrt{\frac{1}{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \|u_2'(x)\| &= \left\|2-4x^2\right\| = \sqrt{\langle 2-4x^2; 2-4x^2\rangle} = \sqrt{\int_0^1 \left(2-4x^2\right)^2 dx} = \sqrt{\frac{28}{15}} \end{aligned}$$

De este modo la base ortornormal será

$$B'' = \left\{ \sqrt{3}x, \frac{\sqrt{15}}{2\sqrt{7}} \left(2 - 4x^2\right) \right\}.$$

4. **Matrices ortogonales**. Una matriz cuyas columnas son vectores ortonormales dos a dos se dice matriz ortogonal. Se pide:

   *a*) Sea $A$ una matriz ortogonal. Comprueba que $A^T \cdot A = I$. Por tanto, en las matrices ortogonales, traspuesta = inversa.

   *b*) Comprueba que la matriz de rotación en el plano

   $$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

   es ortogonal (respecto al producto escalar usual de $\mathbb{R}^2$) y encuentra su inversa. Analiza geométricamente el efecto que se produce al multiplicar $A$ sobre el vector $\overrightarrow{i} = (1,0)$ y sobre $\overrightarrow{j} = (0,1)$.

   *c*) Comprueba que la matriz

   $$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

   al actuar sobre un vector $\overrightarrow{v} = (x,y)$ permuta el orden de las coordenadas $x$ e $y$. Analiza si se trata de una matriz ortogonal (respecto al producto escalar usual de $\mathbb{R}^2$) y encuentra su inversa.

**Solución:**

*a*) Sea $A = (a_{ij})$ la matriz

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

con $\langle A_i, A_j \rangle = 0$, $\forall i \neq j$, donde $A_i = \begin{pmatrix} a_{i1} \\ \vdots \\ a_{in} \end{pmatrix}$ es la columna $j$. Su traspuesta es $A^T = (b_{ij})$ con $b_{ij} = a_{ji}$, es decir,

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{n1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

las filas de $A^T$ son las columnas de $A$, es decir, $\left(A^T\right)^i = A_i$

$$\begin{aligned}
A^T \cdot A &= \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{n1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \\
& \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^n a_{1k}a_{1k} & \cdots & \sum_{k=1}^n a_{1k}a_{nk} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{k=1}^n a_{nk}a_{1k} & \cdots & \sum_{k=1}^n a_{nk}a_{nk} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \left\langle \left(A^T\right)^1 ; A_1 \right\rangle & \cdots & \left\langle \left(A^T\right)^1 ; A_n \right\rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \left\langle \left(A^T\right)^n ; A_1 \right\rangle & \cdots & \left\langle \left(A^T\right)^n ; A_n \right\rangle \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \langle A_1 ; A_1 \rangle & \cdots & \langle A_1 ; A_n \rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle A_n ; A_1 \rangle & \cdots & \langle A_n ; A_n \rangle \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

que por ser las columnas de $A$ ortornormales entre sí

$$\langle A_i, A_j \rangle = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{Si } i = j \\ \\ 0 & \text{Si } i \neq j \end{cases}$$

como se quería demostrar.

*b*) Las columnas de la matriz $A$ son

$$\begin{aligned} A_1 &= (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta) \\ \\ A_2 &= (-\operatorname{sen}\theta, \cos\theta) \end{aligned}$$

de forma que

$$\begin{aligned} \langle A_1, A_1 \rangle &= \langle (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)\,;(\cos\theta, \operatorname{sen}\theta) \rangle = \cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta = 1 \\ \\ \langle A_1, A_2 \rangle &= \langle A_2, A_1 \rangle = \langle (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)\,;(-\operatorname{sen}\theta, \cos\theta) \rangle = -\cos\theta\operatorname{sen}\theta + \operatorname{sen}\theta\cos\theta = 0 \\ \\ \langle A_2, A_2 \rangle &= \langle (-\operatorname{sen}\theta, \cos\theta)\,;(-\operatorname{sen}\theta, \cos\theta) \rangle = (-\operatorname{sen}\theta)\,(-\operatorname{sen}\theta) + \cos^2\theta = \operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1 \end{aligned}$$

Luego son ortogonales dos a dos. De modo que

$$A^{-1} = A^T = \begin{pmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

Si multiplicamos $A$ por los vectores de la base canónica $\vec{i} = (1,0)$ y $\vec{j} = (0,1)$:

$$A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \operatorname{sen}\theta \end{pmatrix}$$

$$A \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\operatorname{sen}\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix}$$

se obtienen los vectores al girar $\theta$ grados en sentido directo el vector unitario.

*c*) Si $v = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

$$A \cdot v = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}$$

Se trata de una matriz ortogonal, puesto que si $A_1 = (0,1)$ y $A_2 = (1,0)$ son sus columnas, entonces

$$\begin{aligned} \langle A_1; A_1 \rangle &= \langle (0,1)\,;(0,1) \rangle = \sqrt{0^2 + 1^2} = 1 \\ \\ \langle A_1; A_2 \rangle &= \langle (0,1)\,;(1,0) \rangle = 0 \\ \\ \langle A_2; A_2 \rangle &= \langle (1,0)\,;(1,0) \rangle = \sqrt{1^2 + 0^2} = 1 \end{aligned}$$

y por tanto

$$A^{-1} = A^T = A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Se puede comprobar

$$A \cdot A^{-1} = A \cdot A^T = A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

5. *(Fuerza y Trabajo).* Supongamos que una partícula se desplaza desde la posición $\overrightarrow{r}_1 = (x_1, y_1, z_1)$ a $\overrightarrow{r}_2 = (x_2, y_2, z_2)$ por acción de una fuerza $\overrightarrow{F} = (F_1, F_2, F_3)$. Se define el trabajo ejercido por $\overrightarrow{F}$ produciendo un desplazamiento $\overrightarrow{d} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$ como

$$W = \left\langle \overrightarrow{F}; \overrightarrow{d} \right\rangle = \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{d}.$$

Supongamos que $\overrightarrow{F} = 3\overrightarrow{i} + 2\overrightarrow{j}$ y que $\overrightarrow{d} = 2\overrightarrow{i} - \overrightarrow{j}$. Se pide:

*a*) Calcula el trabajo $W$.

*b*) Calcula la proyección de la fuerza $\overrightarrow{F}$ sobre el subespacio generado por $\overrightarrow{d}$, es decir, la componente de la fuerza en dirección del desplazamiento.

*c*) Calcula la componente normal de la fuerza, es decir, la proyección de $\overrightarrow{F}$ sobre el subespacio ortogonal a $\overrightarrow{d}$.

Solución:

*a*)

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{F} = 3\vec{i} + 2\vec{j} = (3,2,0) \\ \vec{d} = 2\vec{i} - \vec{j} = (2,-1,0) \end{array}\right\} \Rightarrow W = \left\langle \overrightarrow{F};\ \overrightarrow{d} \right\rangle = \langle (3,2,0)\,;\ \ (2,-1,0) \rangle = 6 - 2 + 0 = 4.$$

*b*) Sea

$$V = \left\langle\ \overrightarrow{d}\ \right\rangle = \langle (2,-1,0) \rangle$$

de modo que

$$\mathbb{R}^3 = V \oplus V^{\perp}.$$

Como $\overrightarrow{F} = (3,2,0) \in \mathbb{R}^3$

$$\overrightarrow{F} = \overrightarrow{v}_1 + \overrightarrow{v}_2;\ \ \overrightarrow{v}_1 \in V;\ \ \overrightarrow{v}_2 \in V^{\perp}$$

además

$$\overrightarrow{v}_1 \in V \Rightarrow \overrightarrow{v}_1 = \lambda \overrightarrow{d} = \lambda\,(2,-1,0)\,; \alpha \in \mathbb{R}$$

De este modo

$$\left\langle \overrightarrow{F}; \overrightarrow{d} \right\rangle = \left\langle \overrightarrow{v}_1 + \overrightarrow{v}_2; \overrightarrow{d} \right\rangle = \left\langle \overrightarrow{v}_1;\ \ \overrightarrow{d} \right\rangle + \left\langle \overrightarrow{v}_2;\ \ \overrightarrow{d} \right\rangle = \lambda \left\langle \overrightarrow{d};\ \ \overrightarrow{d} \right\rangle$$

puesto que $\overrightarrow{v}_2 \in V^{\perp}$ y por tanto $\left\langle \overrightarrow{v}_2;\ \ \overrightarrow{d} \right\rangle = 0$. Sustituyendo los valores

$$\left\langle \overrightarrow{F}; \overrightarrow{d} \right\rangle = \lambda \left\langle \overrightarrow{d};\ \ \overrightarrow{d} \right\rangle \Leftrightarrow \langle (3,2,0)\,;(2,-1,0) \rangle = \lambda \left\langle (2,-1,0)\,;\ \ (2,-1,0) \right\rangle \Leftrightarrow 4 = \lambda 5 \Leftrightarrow \lambda = \frac{4}{5}$$

siendo

$$\overrightarrow{v}_1 = \frac{4}{5}\,(2,-1,0) = \left(\frac{8}{5}, -\frac{4}{5}, 0\right)$$

*c*) En este caso nos piden el valor de $\overrightarrow{v}_2$

$$\overrightarrow{v}_2 = \overrightarrow{F} - \overrightarrow{v}_1 = (3,2,0) - \left(\frac{8}{5}, -\frac{4}{5}, 0\right) = \left(\frac{7}{5}, \frac{14}{5}, 0\right).$$

También es posible realizar el cálculo directamente, buscando una base de $V^{\perp}$ cuyas ecuaciones implícitas podemos conocer fácilmente:

$$V^{\perp} = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \langle (x,y,z)\,; (2,-1,0) = 0 \rangle\right\} = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 2x - y = 0\right\}$$

o en forma paramétrica, tomando $x = \alpha$ y $z = \beta$,

$$(x, y, z) = (\alpha, 2\alpha, \beta) = \alpha\,(1,2,0) + \beta\,(0,0,1)$$

para finalmente obtener la base buscada

$$V^{\perp} = \langle \{\overrightarrow{u}_1 = (1,2,0)\,;\, \overrightarrow{u}_2 = (0,0,1)\} \rangle$$

y por tanto

$$\overrightarrow{v}_2 = \alpha\,(1,2,0) + \beta\,(0,0,1)$$

Encontraremos $\alpha$ y $\beta$ multiplicando escalarmente $\overrightarrow{F}$ por los vectores de la base

$$\begin{aligned} \left\langle \overrightarrow{F}; \overrightarrow{u}_1 \right\rangle &= \langle \overrightarrow{v}_1 + \overrightarrow{v}_2; \overrightarrow{u}_1 \rangle = \langle \overrightarrow{v}_1; \overrightarrow{u}_1 \rangle + \langle \overrightarrow{v}_2; \overrightarrow{u}_1 \rangle = \langle \overrightarrow{v}_2; \overrightarrow{u}_1 \rangle \\ \left\langle \overrightarrow{F}; \overrightarrow{u}_2 \right\rangle &= \langle \overrightarrow{v}_1 + \overrightarrow{v}_2; \overrightarrow{u}_2 \rangle = \langle \overrightarrow{v}_1; \overrightarrow{u}_2 \rangle + \langle \overrightarrow{v}_2; \overrightarrow{u}_2 \rangle = \langle \overrightarrow{v}_2; \overrightarrow{u}_2 \rangle \end{aligned}$$

donde se ha tenido en cuenta que $\langle \overrightarrow{v}_1; \overrightarrow{u}_1 \rangle = \langle \overrightarrow{v}_1; \overrightarrow{u}_2 \rangle = 0$, por estar los primeros vectores en $V$ y los segundos en $V^{\perp}$. Sustituyendo los valores de los vectores

$$\begin{aligned} \left\langle \overrightarrow{F}; \overrightarrow{u}_1 \right\rangle &= \langle \overrightarrow{v}_2; \overrightarrow{u}_1 \rangle \Longleftrightarrow \langle (3,2,0)\,;(1,2,0) \rangle = \langle \alpha\,(1,2,0) + \beta\,(0,0,1)\,;(1,2,0) \rangle \\ &\Longleftrightarrow 7 = \alpha \langle (1,2,0)\,;(1,2,0) \rangle + \beta \langle (0,0,1)\,;(1,2,0) \rangle \\ &\Longleftrightarrow 7 = 5\alpha \\ \left\langle \overrightarrow{F}; \overrightarrow{u}_2 \right\rangle &= \langle \overrightarrow{v}_2; \overrightarrow{u}_2 \rangle \Longleftrightarrow \langle (3,2,0)\,;(0,0,1) \rangle = \langle \alpha\,(1,2,0) + \beta\,(0,0,1)\,;(0,0,1) \rangle \\ &\Longleftrightarrow 0 = \alpha \langle (1,2,0)\,;(0,0,1) \rangle + \beta \langle (0,0,1)\,;(0,0,1) \rangle \\ &\Longleftrightarrow 0 = \beta \end{aligned}$$

de modo que $\alpha = \frac{7}{5}$ y $\beta = 0$

$$v_2 = \alpha\,(1,2,0) + \beta\,(0,0,1) = \frac{7}{5}\,(1,2,0) + 0\,(0,0,1) = \left(\frac{7}{5}, \frac{14}{5}, 0\right),$$

como era de esperar.

6. Se considera el espacio de funciones

$$\mathcal{L}^2\left([-\pi,\pi]\,;\mathbb{R}\right) = \left\{ f : [-\pi,\pi] \to \mathbb{R} : \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\;dx < \infty \right\}.$$

Se pide:

*a*) Comprueba que el sistema de vectores

$$\{1, \cos x, \operatorname{sen} x, \cos(2x), \operatorname{sen}(2x), \cdots, \cos(nx), \operatorname{sen}(nx), \cdots\}. \tag{1}$$

es un sistema ortogonal respecto al producto escalar

$$\langle f; g \rangle_{\mathcal{L}^2} = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,g(x)\;dx, \quad f, g \in \mathcal{L}^2\left([-\pi,\pi]\,;\mathbb{R}\right).$$

*Indicación: Usar las fórmulas trigonométricas siguientes:*

$$\operatorname{sen}\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\operatorname{sen}(\alpha+\beta) + \frac{1}{2}\operatorname{sen}(\alpha-\beta)$$

$$\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta = \frac{1}{2}\cos(\alpha-\beta) - \frac{1}{2}\cos(\alpha+\beta)$$

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\cos(\alpha+\beta) + \frac{1}{2}\cos(\alpha-\beta).$$

$b)$ Dada una función $f \in \mathcal{L}^2([-\pi,\pi];\mathbb{R})$, a las coordenadas de $f$ en el sistema (1) se les llama coeficientes de Fourier, es decir,

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos(nx) + b_n\operatorname{sen}(nx)).$$

El término de la derecha en la igualdad anterior se llama serie de Fourier de $f$. Hay una diferencia importante en la combinación lineal anterior: la suma tiene infinitos términos, pero este asunto será tratado Matemáticas II. Comprueba que los coeficientes de Fourier $a_n$ y $b_n$ están dados por las fórmulas

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\,dx, \quad n \geq 0$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\operatorname{sen}(nx)\,dx, \quad n \geq 1$$

$c)$ Calcula los coeficientes de Fourier en $\mathcal{L}^2([-\pi,\pi];\mathbb{R})$ de las funciones $f(x) = x$ y $g(x) = |x|$.

**Solución:**

$a)$ Hay que comprobar que si $f,g \in \{1, \cos x, \operatorname{sen} x, \cos(2x), \operatorname{sen}(2x), \cdots, \cos(nx), \operatorname{sen}(nx), \cdots\}$, entonces

$$\langle f, g\rangle = 0;\ \forall f \neq g.$$

Distinguimos los siguientes casos para $m, n \in \mathbb{N}$

| | $f(x)$ | $g(x)$ | |
|---|---|---|---|
| $i)$ | $1$ | $\cos mx$ | $m \neq 0$ |
| $ii)$ | $1$ | $\operatorname{sen} mx$ | $m \neq 0$ |
| $iii)$ | $\cos nx$ | $\cos mx$ | $m \neq n$ |
| $iv)$ | $\operatorname{sen} nx$ | $\operatorname{sen} mx$ | $m \neq n$ |
| $v)$ | $\cos nx$ | $\operatorname{sen} mx$ | |

Recordemos que para cada $m \in \mathbb{Z}$, se cumple

$$\begin{aligned}\cos m\pi &= (-1)^m \\ \operatorname{sen} m\pi &= 0\end{aligned}$$

$i)$ Caso $f(x) = 1$ y $g(x) = \cos mx$

$$\langle f;\ g\rangle = \langle 1;\ \cos mx\rangle = \int_{-\pi}^{\pi}\cos mx\,dx = \left.\frac{\operatorname{sen}(mx)}{m}\right|_{x=-\pi}^{x=\pi} = \left(\frac{\operatorname{sen}(m\pi)}{m} - \frac{\operatorname{sen}(-m\pi)}{m}\right) = \left(\frac{0}{m} - \frac{0}{m}\right) = 0.$$

$ii)$ Caso $f(x) = 1$ y $g(x) = \operatorname{sen} mx$

$$\begin{aligned}
\langle f;\ g\rangle &= \langle 1;\ \operatorname{sen} mx\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen} mx\, dx \\
&= -\frac{1}{m}\cos(mx)\Big|_{x=-\pi}^{x=\pi} = \left(\frac{\cos(-m\pi)}{m} - \frac{\cos(m\pi)}{m}\right) = \left(\frac{-1}{m} - \frac{(-1)}{m}\right) = 0.
\end{aligned}$$

$iii)$ Caso $f(x) = \cos nx$ y $g(x) = \cos mx$

$$\begin{aligned}
\langle f;\ g\rangle &= \langle \cos nx;\ \cos mx\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos mx\, dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} [\cos(m+n)x + \cos(m-n)x]\ dx \\
&= \frac{1}{2}\left\{ \frac{\operatorname{sen}(m+n)x}{(m+n)} + \frac{\operatorname{sen}(m-n)x}{(m-n)}\Big|_{x=-\pi}^{x=\pi} \right\} \\
&= \frac{1}{2}\left\{ \left(\frac{\operatorname{sen}(m+n)\pi}{(m+n)} + \frac{\operatorname{sen}(m-n)\pi}{(m-n)}\right) - \left(\frac{\operatorname{sen}(m+n)(-\pi)}{(m+n)} + \frac{\operatorname{sen}(m-n)(-\pi)}{(m-n)}\right) \right\} \\
&= \frac{1}{2}\left\{ \left(\frac{0}{(m+n)} + \frac{0}{(m-n)}\right) - \left(\frac{0}{(m+n)} + \frac{0}{(m-n)}\right) \right\} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

$iv)$ Caso $f(x) = \operatorname{sen} nx$ y $g(x) = \operatorname{sen} mx$

$$\begin{aligned}
\langle f;\ g\rangle &= \langle \operatorname{sen} nx;\ \operatorname{sen} mx\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen} nx \operatorname{sen} mx\, dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} [-\cos(m+n)x + \cos(m-n)x]\ dx \\
&= \frac{1}{2}\left\{ -\frac{\operatorname{sen}(m+n)x}{(m+n)} + \frac{\operatorname{sen}(m-n)x}{(m-n)}\Big|_{x=-\pi}^{x=\pi} \right\} \\
&= \frac{1}{2}\left\{ \left(-\frac{\operatorname{sen}(m+n)\pi}{(m+n)} + \frac{\operatorname{sen}(m-n)\pi}{(m-n)}\right) - \left(-\frac{\operatorname{sen}(m+n)(-\pi)}{(m+n)} + \frac{\operatorname{sen}(m-n)(-\pi)}{(m-n)}\right) \right\} \\
&= \frac{1}{2}\left\{ \left(-\frac{0}{(m+n)} + \frac{0}{(m-n)}\right) - \left(-\frac{0}{(m+n)} + \frac{0}{(m-n)}\right) \right\} \\
&= 0
\end{aligned}$$

$v)$ Caso $f(x) = \cos nx$ y $g(x) = \operatorname{sen} mx$

$$\langle f;\ g\rangle = \langle \cos nx;\ \operatorname{sen} mx\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \operatorname{sen} mx\, dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} [\operatorname{sen}(m+n)x + \operatorname{sen}(m-n)x]\ dx.$$

Se distinguen dos casos.

Si $m \neq n$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\left[\operatorname{sen}(m+n)x + \operatorname{sen}(m-n)x\right]\,dx \\
&= \frac{1}{2}\left\{-\frac{\cos\left(m+n\right)x}{(m+n)} - \frac{\cos\left(m-n\right)x}{(m-n)}\Big|_{x=-\pi}^{x=\pi}\right\} \\
&= \frac{1}{2}\left\{\left(-\frac{\cos\left(m+n\right)\pi}{(m+n)} + \frac{\cos\left(m-n\right)\pi}{(m-n)}\right) - \left(-\frac{\cos\left(m+n\right)(-\pi)}{(m+n)} + \frac{\cos\left(m-n\right)(-\pi)}{(m-n)}\right)\right\} \\
&= \frac{1}{2}\left\{\left(-\frac{(-1)^{m+n}}{(m+n)} + \frac{(-1)^{m-n}}{(m-n)}\right) - \left(-\frac{(-1)^{m+n}}{(m+n)} + \frac{(-1)^{m-n}}{(m-n)}\right)\right\} \\
&= \frac{1}{2}\left\{-\frac{(-1)^{m+n}}{(m+n)} + \frac{(-1)^{m-n}}{(m-n)} + \frac{(-1)^{m+n}}{(m+n)} - \frac{(-1)^{m-n}}{(m-n)}\right\} = 0.
\end{aligned}
$$

1) Si $m = n$

$$
\begin{aligned}
& \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\left[\operatorname{sen}\left(m+n\right)x + \operatorname{sen}\left(m-n\right)x\right]\,dx \\
&= \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\left[\operatorname{sen}\left(2m\right)x + \operatorname{sen}\left(0x\right)\right]\,dx \\
&= \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\operatorname{sen}(2m)x dx \\
&= \frac{1}{2}\left\{-\frac{\cos\left(2m\right)x}{2m}\Big|_{x=-\pi}^{x=\pi}\right\} \\
&= \frac{1}{2}\left\{\left(-\frac{\cos\left(2m\right)\pi}{2m}\right) - \left(-\frac{\cos\left(2m\right)(-\pi)}{2m}\right)\right\} \\
&= \frac{1}{2}\left\{\left(-\frac{1}{2m}\right) - \left(-\frac{1}{2m}\right)\right\} = 0.
\end{aligned}
$$

Nos queda por comprobar los casos en los que $f(x) = g(x)$. Si $f(x) = g(x) = \cos nx$

$$
\begin{aligned}
\langle f;\ g\rangle &= \langle \cos nx;\ \cos nx\rangle = \int_{-\pi}^{\pi}\cos nx \cos nx\,dx = \int_{-\pi}^{\pi}\cos^2(nx)\,dx \\
&= \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\left(1+\cos\left(2nx\right)\right)dx = \frac{1}{2}\ x + \frac{1}{2n}\operatorname{sen}2nx\Big|_{x=-\pi}^{x=\pi} \\
&= \frac{1}{2}\left\{\left(\pi + \frac{\operatorname{sen}\left(2n\pi\right)}{2n}\right) - \left(-\pi + \frac{\operatorname{sen}\left(-2n\pi\right)}{2n}\right)\right\} \\
&= \frac{1}{2}\left\{(\pi+0) - (-\pi+0)\right\} = \pi
\end{aligned}
$$

Mientras que si $f(x) = g(x) = \operatorname{sen} mx$

$$\begin{aligned}
\langle f;\ g\rangle &= \langle \operatorname{sen} nx;\ \operatorname{sen} nx\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen} nx \operatorname{sen} nx\, dx = \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen}^2(nx)\ dx \\
&= \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} (1 - \cos(2nx))\, dx = \frac{1}{2}\ x - \frac{1}{2n} \operatorname{sen} 2nx\Big|_{x=-\pi}^{x=\pi} \\
&= \frac{1}{2}\left\{\left(\pi - \frac{\operatorname{sen}(2n\pi)}{2n}\right) - \left(-\pi - \frac{\operatorname{sen}(-2n\pi)}{2n}\right)\right\} \\
&= \frac{1}{2}\{(\pi + 0) - (-\pi + 0)\} = \pi
\end{aligned}$$

Finalmente si $f(x) = g(x) = 1$

$$\langle f;\ g\rangle = \langle 1;\ 1\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} 1\, dx = x|_{x=-\pi}^{x=\pi} = 2\pi$$

*b*) Usando propiedad de bilinealidad

$$\begin{aligned}
\langle f(x);1\rangle &= \left\langle \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \operatorname{sen}(nx));1\right\rangle \\
&= \frac{a_0}{2}\langle 1;1\rangle + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \langle \cos(nx);1\rangle + b_n \langle \operatorname{sen}(nx);1\rangle = \frac{a_0}{2}2\pi = \pi a_0,
\end{aligned}$$

de donde por los apartados *i*) y *ii*):

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\langle f(x);1\rangle = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx.$$

Para calcular los $a_m$, multiplicamos por $\cos mx$

$$\begin{aligned}
\langle f(x);\cos mx\rangle &= \left\langle \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \operatorname{sen}(nx));\cos mx\right\rangle \\
&= \frac{a_0}{2}\langle 1;\cos mx\rangle + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \langle \cos(nx);\cos mx\rangle + b_n \langle \operatorname{sen}(nx);\cos mx\rangle \\
&= a_m\pi
\end{aligned}$$

de donde por los apartados *i*), *iii*) y *v*)

$$a_m = \frac{1}{\pi}\langle f(x);\cos mx\rangle = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(mx)\, dx$$

Para calcular los $b_m$, multiplicamos por $\operatorname{sen} mx$

$$\begin{aligned}
\langle f(x);\operatorname{sen} mx\rangle &= \left\langle \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \operatorname{sen}(nx));\operatorname{sen} mx\right\rangle \\
&= \frac{a_0}{2}\langle 1;\operatorname{sen} mx\rangle + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \langle \cos(nx);\operatorname{sen} mx\rangle + b_n \langle \operatorname{sen}(nx);\operatorname{sen} mx\rangle \\
&= b_m\pi
\end{aligned}$$

de donde por los apartados *i*), *iv*) y *v*)

$$b_m = \frac{1}{\pi}\langle f(x);\operatorname{sen} mx\rangle = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\operatorname{sen}(mx)\, dx.$$

*c)* Si $f(x) = x$

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x dx = \frac{1}{\pi}\left.\frac{x^2}{2}\right|_{x=-\pi}^{x=\pi} = 0. \\
a_m &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x \cos(mx)\, dx = 0. \\
b_m &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x \operatorname{sen}(mx)\, dx = 2\frac{(-1)^{n+1}}{n}.
\end{aligned}$$

Si $f(x) = |x|$

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |x|\, dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} (-x)\, dx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} x dx = \pi. \\
a_m &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |x| \cos(mx)\, dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} -x\cos(mx)\, dx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} x\cos(mx)\, dx = \frac{2}{n^2\pi}\left((-1)^n - 1\right). \\
b_m &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |x| \operatorname{sen}(mx)\, dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} -x\operatorname{sen}(mx)\, dx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} x\operatorname{sen}(mx)\, dx = 0.
\end{aligned}$$