1. Determina si las siguientes aplicaciones $f : V \to W$, son o no lineales.

   a) $V = W = \mathbb{R}^3 \qquad f(x, y, z) = (2x + y, y - 3x, 0)$.
   b) $V = W = \mathbb{R}^3 \qquad g(x, y, z) = (2x + y, y - 3x, 8)$.
   c) $V = \mathbb{R}^2, W = \mathbb{R} \qquad h(x, y) = x^2 + y - 5x$.
   d) $V = \mathbb{R}^2, W = \mathbb{R} \qquad k(x, y) = |x + y|$.

Solución: Usaremos la caracterización de aplicaciones lineales: Dado $u, v \in V; \alpha, \beta \in \mathbb{K} \Rightarrow f(\alpha u + \beta v) = \alpha f(u) + \beta f(v)$

a) $u = (x_1, y_1, z_1), v = (x_2, y_2, z_2) \in \mathbb{R}^3$

$$\left.\begin{array}{l} f(u) = (2x_1 + y_1, y_1 - 3x_1, 0) \\ \\ f(v) = (2x_2 + y_2, y_2 - 3x_2, 0) \end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} \alpha f(u) = \alpha(2x_1 + y_1, y_1 - 3x_1, 0) = \alpha(2x_1 + y_1, y_1 - 3x_1, 0) \\ \\ \beta f(v) = \beta(2x_2 + y_2, y_2 - 3x_2, 0) = \beta(2x_2 + y_2, y_2 - 3x_2, 0) \end{array}\right\}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow\ & \alpha f(u) + \beta f(v) = \alpha(2x_1 + y_1, y_1 - 3x_1, 0) + \beta(2x_2 + y_2, y_2 - 3x_2, 0) \\
=\ & (\alpha(2x_1 + y_1), \alpha(y_1 - 3x_1), 0) + (\beta(2x_2 + y_2), \beta(y_2 - 3x_2), 0) \\
=\ & (\alpha(2x_1 + y_1) + \beta(2x_2 + y_2), \alpha(y_1 - 3x_1) + \beta(y_2 - 3x_2), 0) \\
=\ & (2\alpha x_1 + \alpha y_1 + 2\beta x_2 + \beta y_2, \alpha y_1 - 3\alpha x_1 + \beta y_2 - 3\beta x_2, 0) \\
=\ & (2(\alpha x_1 + \beta x_2) + (\alpha y_1 + \beta y_2), \alpha y_1 + \beta y_2 - 3(\alpha x_1 + \beta x_2), 0)
\end{aligned}$$

Mientras que

$$\begin{aligned}
\alpha u + \beta v \ &= \ \alpha(x_1, y_1, z_1) + \beta(x_2, y_2, z_2) = (\alpha x_1 + \beta x_2, \alpha y_1 + \beta y_2, \alpha z_1 + \beta z_2) \\
&\Rightarrow\ f(\alpha u + \beta v) = (2(\alpha x_1 + \beta x_2) + (\alpha y_1 + \beta y_2), (\alpha y_1 + \beta y_2) - 3(\alpha x_1 + \beta x_2), 0)
\end{aligned}$$

que coincide con la expresión anterior.

b) No es aplicación lineal puesto que

$$g(0, 0, 0) = (0, 0, 8) \neq (0, 0, 0).$$

c)

$$\left.\begin{array}{r} h(1, 0) = 1^2 + 0 - 5 \cdot 1 = -4 \\ \\ h(-1, 0) = (-)^2 + 1 - 5 \cdot (-1) = 6 \end{array}\right\} \Rightarrow h(1, 0) + h(-1, 0) = -4 + 6 = 2$$

$$h((1, 0) + (-1, 0)) \ = \ h(0, 0) = 0^2 + 0 - 5 \cdot 0 = 0$$

por tanto

$$h((1,0)+(-1,0)) \neq h(0,0)$$

y la función no es lineal.

d)

$$\left.\begin{array}{r} k(1,0) = |1+0| = 1 \\ \\ k(-1,0) = |-1+0| = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad k(1,0)+f(-1,0) = 1+1 = 2$$

$$k((1,0)+(-1,0)) \quad = \quad k(0,0) = |0+0| = 0$$

por tanto

$$k((1,0)+(-1,0)) \neq k(0,0)$$

y la función no es lineal.

2. Sean V y W espacios vectoriales y sea $f: V \to W$, una aplicación lineal. Demuestra los siguientes apartados:

   a) Si $S = \langle\{\overrightarrow{v}_1, \ldots, \overrightarrow{v}_m\}\rangle \subseteq V \Longrightarrow f(S) = \langle\{f(\overrightarrow{v}_1), \ldots, f(\overrightarrow{v}_m)\}\rangle$.

   b) Si $B = \langle\{\overrightarrow{v}_1, \ldots, \overrightarrow{v}_n\}\rangle \subseteq V$ es base de $V \Longrightarrow \mathrm{Im}(f) = \langle\{f(\overrightarrow{v}_1), \ldots, f(\overrightarrow{v}_m)\}\rangle$.

   c) Si f es sobreyectiva $\Rightarrow \dim(W) \leq \dim(V)$.

   Solución:

   a) Sea $\overrightarrow{w} \in f(S) \Rightarrow \exists \overrightarrow{v} \in S : f(\overrightarrow{v}) = \overrightarrow{w}$. Como $\overrightarrow{v} \in S = \langle\{\overrightarrow{v}_1, \ldots, \overrightarrow{v}_m\}\rangle$, entonces $\exists \alpha_1, \ldots, \alpha_m \in \mathbb{K} : \overrightarrow{v} = \alpha_1 \overrightarrow{v}_1 + \cdots + \alpha_m \overrightarrow{v}_m$, y usando que f es lineal

   $$f(\overrightarrow{v}) = f(\alpha_1 \overrightarrow{v}_1 + \cdots + \alpha_m \overrightarrow{v}_m) = \alpha_1 f(\overrightarrow{v}_1) + \cdots + \alpha_m f(\overrightarrow{v}_m) \Rightarrow f(\overrightarrow{v}) \in \langle\{f(\overrightarrow{v}_1), \ldots, f(\overrightarrow{v}_m)\}\rangle.$$

   b) Sea $\overrightarrow{w} \in \mathrm{Im}\, f = f(V) \Rightarrow \exists \overrightarrow{v} \in V : f(\overrightarrow{v}) = \overrightarrow{w}$. Como $\overrightarrow{v} \in V$ y $B = \{\overrightarrow{v}_1, \ldots, \overrightarrow{v}_n\}$ es una base, entonces $\exists \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K} : \overrightarrow{v} = \alpha_1 \overrightarrow{v}_1 + \cdots + \alpha_n \overrightarrow{v}_n$, y usando que f es lineal

   $$\overrightarrow{w} = f(\overrightarrow{v}) = f(\alpha_1 \overrightarrow{v}_1 + \cdots + \alpha_n \overrightarrow{v}_n) = \alpha_1 f(\overrightarrow{v}_1) + \cdots + \alpha_n f(\overrightarrow{v}_n) \Rightarrow \overrightarrow{w} \in \langle\{f(\overrightarrow{v}_1), \ldots, f(\overrightarrow{v}_n)\}\rangle.$$

   c) Si f es sobreyectiva $\Rightarrow f(V) = W$, luego sin $B = \{\overrightarrow{v}_1, \ldots, \overrightarrow{v}_n\}$ es una base de V, entonces $f(B) = \{f(\overrightarrow{v}_1), \ldots, f(\overrightarrow{v}_n)\}$ es un sistema generador de $\mathrm{Im}(f) = f(V)$ y por tanto es un sistema generador de W de forma que $n \geq \dim(W)$.

3. ¿Existirá una aplicación lineal tal que $f(1,0,0) = (1,1), f(0,1,0) = (21,-3), f(0,0,1) = (-1,2)$ y $f(1,0,1) = (-1,1)$? ¿Y si fuera $f(1,0,1) = (0,3)$?

   Solución: Podemos comprobar que $(1,0,1) = (1,0,0) + (0,0,1)$ y como f es lineal

   $$f(1,0,1) = f((1,0,0)+(0,0,1)) = f(1,0,0) + f(0,0,1) = (1,1) + (-1,2) = (0,3)$$

   por tanto la respuesta es sólo puede ser lineal si se cumple

   $$f(1,0,1) = (0,3),$$

   de modo que la respuesta a la primera pregunta es no, mientras que a la segunda sería sí.

4. Demuestra la ecuación de las dimensiones para aplicaciones entre espacios vectoriales de dimensión finita, es decir, si $f: V \to W$ es una aplicación lineal, entonces se cumple

   $$\dim V = \dim(\ker f) + \dim(\mathrm{Im}\, f).$$

   Solución: Suponiendo que $\dim V = n$ y que $\dim(\ker f) = m$, entonces como $\ker f \leqslant V \Rightarrow n \leq m \Rightarrow n - m \geq 0$. Distinguimos dos casos:

a) Caso $n-m=0$

$$n-m=0 \Rightarrow n=m \Rightarrow \ker f = V \Rightarrow f(\overrightarrow{v})=0; \forall \overrightarrow{v} \in V \Rightarrow \mathrm{Im}(f)=\{0\} \Rightarrow \dim(\mathrm{Im} f)=0$$

y se cumple la igualdad.

b) Caso $n-m>0$. En este caso tomamos B_1 una base del subespacio $\ker f$, donde

$$B_1 = \{\overrightarrow{v}_1, \dots, \overrightarrow{v}_m\}$$

Como es una base para $\ker f$, los vectores son linealmente independientes y podemos completar una base Bde V con $n-m$ vectores adicionales linealmente independientes

$$B_2 = \{\overrightarrow{w}_1, \dots, \overrightarrow{w}_{n-m}\}$$

es decir

$$B = B_1 \cup B_2 = \{\overrightarrow{v}_1, \dots, \overrightarrow{v}_m, \overrightarrow{w}_1, \dots, \overrightarrow{w}_{n-m}\}$$

Entonces $f(B)$ es un sistema generador de $\mathrm{Im} f$, es decir

$$\mathrm{Im} f = \langle\{f(\overrightarrow{v}_1), \dots, f(\overrightarrow{v}_m), f(\overrightarrow{w}_1), \dots, f(\overrightarrow{w}_{n-m})\}\rangle$$

pero como $B \subseteq \ker f \Rightarrow f(\overrightarrow{v}_k)=0; \forall k=1,\dots,m$, por tanto

$$\mathrm{Im} f = \langle\{f(\overrightarrow{w}_1), \dots, f(\overrightarrow{w}_{n-m})\}\rangle$$

y por tanto

$$\dim \mathrm{Im} f \leq n-m.$$

Veamos que son linealmente independientes. Si suponemos que existe una combinación lineal de la forma

$$\alpha_1 f(\overrightarrow{w}_1) + \cdots + \alpha_{n-m} f(\overrightarrow{w}_{n-m}) = 0,$$

usando la linealidad tendremos

$$f(\alpha_1 \overrightarrow{w}_1 + \cdots + \alpha_{n-m}\overrightarrow{w}_{n-m}) = 0$$

luego el vector $\alpha_1 \overrightarrow{w}_1 + \cdots + \alpha_{n-m}\overrightarrow{w}_{n-m}$ cumple

$$\alpha_1 \overrightarrow{w}_1 + \cdots + \alpha_{n-m}\overrightarrow{w}_{n-m} \in \ker f$$

y como B_1 es una base, entonces deberían $\exists \beta_1, \dots, \beta_m \in \mathbb{K}$ tal que

$$\alpha_1 \overrightarrow{w}_1 + \cdots + \alpha_{n-m}\overrightarrow{w}_{n-m} = \beta_1 \overrightarrow{v}_1 + \cdots + \beta_m \overrightarrow{v}_m$$

pero los vectores $\{\overrightarrow{v}_1, \dots, \overrightarrow{v}_m\}$ y $\{\overrightarrow{w}_1, \dots, \overrightarrow{w}_{n-m}\}$ son linealmente independientes, luego si hubiera un coeficiente $\alpha_j \neq 0$, podríamos poner

$$w_j = \frac{1}{\alpha_j}\left((\beta_1 \overrightarrow{v}_1 + \cdots + \beta_m \overrightarrow{v}_m) - (\alpha_1 \overrightarrow{w}_1 + \cdots + \alpha_{j-1}\overrightarrow{w}_{j-1} + \alpha_{j+1}\overrightarrow{w}_{j+1} + \cdots + \alpha_{n-m}\overrightarrow{w}_{n-m})\right)$$

es decir, podríamos poner w_j como combinación lineal del resto de vectores, lo que contradice el hecho de que sea un vector de la base B, luego

$$\alpha_k = 0; \forall k = 1, \dots n-m$$

y por tanto los vectores $\{f(\overrightarrow{w}_1), \dots, f(\overrightarrow{w}_{n-m})\}$ son una base de $\mathrm{Im}(f)$, es decir

$$\dim \mathrm{Im} f = n-m,$$

y se comprueba la igualdad.

5. Para las siguientes aplicaciones lineales $f : V \to W$ calcula tanto el núcleo como la imagen e indica las propiedades de la aplicación (ver si es inyectiva y suprayectiva).

   a) $V = W = \mathbb{R}^3 \qquad f(x,y,z) = (z, x+y, -z).$

   b) $V = W = \mathbb{R}^3 \qquad g(x,y,z) = (x-y+2z, y-z, x+2z).$

   c) $V = \mathbb{R}^3, W = \mathbb{R}^4 \qquad h(x,y,z) = (z, x+y, -z, y-x).$

   d) $V = \mathbb{R}^4, W = \mathbb{R}^2 \qquad k(x,y,z,t) = (x-3y+8t, 2x).$

   e) $V = \mathbb{R}^3, W = \mathbb{R}^2 \qquad l(x,y,z) = (x+y+z, 0).$

   f) $V = W = \mathbb{R}^3 \qquad m(x,y,z) = (x+y+z, x+y-z, z).$

Solución: Recordemos la definición de Núcleo de una aplicación lineal $f : V \to W$

$$\ker(f) = \{u \in V \mid \quad f(u) = 0\},$$

que junto con la ecuación de las dimensiones

$$\dim(\ker(f)) + \dim(\mathrm{Im}(f)) = \dim(V)$$

nos servirá para resolver cada apartado.

a)

$$\begin{aligned} \ker(f) &= \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid \quad (z, x+y, -z) = (0,0,0)\right\} \\ &\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} z=0 \\ x+y=0 \\ -z=0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} z=0 \\ \\ y=-x \end{array} \right. \end{aligned}$$

por tanto

$$\ker(f) = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid \quad (x,-x,0)\right\} = \langle(1,-1,0)\rangle \Rightarrow \dim(\ker(f)) = 1 \Rightarrow f \text{ no es inyectiva.}$$

Para encontrar una base de $\mathrm{Im}(f)$

$$\begin{aligned} \mathrm{Im}(f) &= \left\{(z, x+y, -z) \in \mathbb{R}^3 \mid \quad x,y,z \in \mathbb{R}\right\} \\ &= \left\{x(0,1,0) + y(0,1,0) + z(1,0,-1) \in \mathbb{R}^3 \mid \quad x,y,z \in \mathbb{R}\right\} \\ &= \langle\{(0,1,0), (1,0,-1)\}\rangle \end{aligned}$$

También es posible encontrar un sistema generador de $\mathrm{Im}(f)$, evaluando la función en los vectores de la base canónica del espacio vectorial inicial, en este caso $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{aligned} f(1,0,0) &= (0,1,0) \\ f(0,1,0) &= (0,1,0) \\ f(0,0,1) &= (1,0,-1) \end{aligned}$$

que como vemos coincide con el resultado anterior. Además como $\dim(\mathrm{Im}(f)) = 2$, no coincide con la dimensión del espacio vectorial final y por tanto f **no es sobreyectiva**. Es posible deducir el mismo resultado usando la fórmula de las dimensiones para calcular la dimensión de $\mathrm{Im}(f)$ sin necesidad de conocer una base:

$$\dim(\mathrm{Im}(f)) = \dim\left(\mathbb{R}^3\right) - \dim(\ker(f)) = 3 - 1 = 2.$$

En los siguientes apartado sólo utilizaremos uno de los dos métodos, concretamente, el primero.

b)

$$\ker(g) = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid \quad (x-y+2z, y-z, x+2z) = (0,0,0)\right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} x-y+2z=0 \\ y-z=0 \\ x+2z=0 \end{array} \right.$$

cuya solución es

$$x = y = z = 0$$

luego

$$\ker(g) = \{(0,0,0)\} \Rightarrow g \text{ es inyectiva.}$$

Para encontrar una base de $\operatorname{Im}(g)$

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} g &= \left\{(x-y+2z, y-z, x+2z) \in \mathbb{R}^3 \mid \quad x,y,z \in \mathbb{R}\right\} \\ &= \left\{x(1,0,1) + y(-1,1,0) + z(2,-1,2) \in \mathbb{R}^3 \mid \quad x,y,z \in \mathbb{R}\right\} \\ &= \langle\{(1,0,1),(-1,1,0),(2,-1,2)\}\rangle = \mathbb{R}^3 \Rightarrow g \text{ es sobreyectiva.} \end{aligned}$$

c)

$$\ker(h) = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid \quad (z, x+y, -z, y-x) = (0,0,0)\right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} z=0 \\ x+y=0 \\ -z=0 \\ y-x=0 \end{array} \right.$$

cuya solución es

$$x = y = z = 0,$$

luego

$$\ker(h) = \{(0,0,0)\} \Rightarrow h \text{ es inyectiva.}$$

Para encontrar una base de $\operatorname{Im}(h)$

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} h &= \left\{(z, x+y, -z, y-x) \in \mathbb{R}^4 \mid \quad x,y,z \in \mathbb{R}\right\} \\ &= \left\{x(0,1,0,-1) + y(0,1,0,1) + z(1,0,-1,0) \in \mathbb{R}^4 \mid \quad x,y,z \in \mathbb{R}\right\} \\ &= \langle\{(0,1,0,-1),(0,1,0,1),(1,0,-1,0)\}\rangle \Rightarrow \dim(\operatorname{Im}(h)) = 3 \neq 4 \Rightarrow h \text{ no es sobreyectiva.} \end{aligned}$$

d)

$$\ker(k) = \left\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid \quad (x-3y+8t, 2x) = (0,0)\right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} x-3y+8t=0 \\ 2x=0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} y=\frac{8}{3}t \\ x=0 \end{array} \right.$$

luego tomando $z = \alpha$ y $t = \beta$, la solución es

$$\left(0, \frac{8}{3}\beta, \alpha, \beta\right)$$

luego

$$\ker(k) = \left\langle \left\{ (0,0,1,0), \left(0, \frac{8}{3}, 0, 1\right) \right\} \right\rangle \Rightarrow k \text{ no es inyectiva.}$$

Para encontrar una base de $\operatorname{Im}(k)$

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} k &= \left\{(x-3y+8t, 2x) \in \mathbb{R}^4 \mid \quad x,y,z \in \mathbb{R}\right\} = \left\{x(1,2) + y(-3,0) + z(0,0) + t(8,0) \in \mathbb{R}^4 \mid \quad x,y,z,t \in \mathbb{R}\right\} \\ &= \langle\{(1,2),(8,0)\}\rangle \Rightarrow \dim(\operatorname{Im}(k)) = 2 \Rightarrow k \text{ es sobreyectiva.} \end{aligned}$$

e)

$$\ker(l) = \left\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid \quad (x+y+z,0) = (0,0)\right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} x+y+z=0 \\ 0=0 \end{array} \right. \Leftrightarrow z = -x-y$$

luego tomando $x = \alpha$ e $y = \beta$, la solución es

$$(\alpha, \beta, -\alpha-\beta) = \alpha(1,0,-1) + \beta(0,1,-1)$$

luego

$$\ker(l) = \langle\{(1,0,-1),(0,1,-1)\}\rangle \Rightarrow l \text{ no es inyectiva.}$$

Para encontrar una base de $\operatorname{Im}(l)$

$$\begin{aligned} \operatorname{Im}(l) &= \left\{(x+y+z,0) \in \mathbb{R}^2 \mid \quad x,y,z \in \mathbb{R}\right\} = \left\{x(1,0) + y(1,0) + z(1,0) \in \mathbb{R}^3 \mid \quad x,y,z \in \mathbb{R}\right\} \\ &= \langle(1,0)\rangle \Rightarrow \dim(\operatorname{Im}(l)) = 1 \neq 2 = \dim\left(\mathbb{R}^2\right) \Rightarrow l \text{ no es sobreyectiva.} \end{aligned}$$

f)

$$\ker(m) = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid \quad (x+y+z, x+y-z, z) = (0,0,0)\right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} x+y+z=0 \\ x+y-z=0 \\ z=0 \end{array} \right. \Rightarrow \begin{array}{c} y=-x \\ \\ z=0 \end{array}$$

luego tomando $x = \alpha$, la solución es

$$(\alpha, -\alpha, 0) = \alpha(1,-1,0),$$

luego

$$\ker(m) = \langle\{(1,-1,0)\}\rangle \Rightarrow m \text{ no es inyectiva.}$$

Para encontrar una base de $\operatorname{Im}(m)$

$$\begin{aligned} \operatorname{Im}(m) &= \left\{(x+y+z, x+y-z, z) \in \mathbb{R}^2 \mid \quad x,y,z \in \mathbb{R}\right\} \\ &= \left\{x(1,1,0) + y(1,1,0) + z(1,-1,1) \in \mathbb{R}^3 \mid \quad x,y,z \in \mathbb{R}\right\} \\ &= \langle\{(1,1,0),(1,1,0),(1,-1,1)\}\rangle = \langle\{(1,1,0),(1,-1,1)\}\rangle \\ &\Rightarrow \dim(\operatorname{Im}(l)) = 2 \neq 3 = \dim\left(\mathbb{R}^3\right) \Rightarrow m \text{ no es sobreyectiva.} \end{aligned}$$

6. Sea f un endomorfismo de $\mathbb{R}^3$ cuya matriz asociada respecto de la base canónica es

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Halla la matriz asociada a f respecto de la base

$$B' = \{(1,0,1),(1,1,0),(1,0,0)\}$$

Solución: El problema nos da la matriz $M_{C\to C}(f)$, para encontrar la matriz asociada a f respecto de la base B', tendremos que utilizar la matriz de cambio de base entre C y B'.

$$M_{B'\to C} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

mientras que

$$M_{C\to B'} = M^{-1}_{B'\to C} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix},$$

y finalmente

$$M_{B'\to B'}(f) = M_{C\to B'}(f)\cdot M_{C\to C}(f)\cdot M_{B'\to C} = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 0 & -1 & -1 \\ -2 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

7. Se considera la aplicación lineal

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$$

que cumple que

$$\begin{aligned} f(1,0) &= (2, 3-1) \\ f(0,1) &= (0,-2,3) \end{aligned}$$

Dadas bases respectivas de $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$

$$B = \{(-1,2),(3,0)\}, B' = \{(0,0,-1),(0,2,1),(-1,1,4)\}$$

se pide obtener las matrices asociadas siguientes

$$M_{C_2\to C_3}(f), M_{B\to C_3}(f), M_{C_2\to B'}(f)$$

siendo C_2 la base canónica de $\mathbb{R}^2$ y C_3 la base canónica de $\mathbb{R}^3$.

Solución: Del enunciado se deduce que

$$M_{C_2\to C_3}(f) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Las matrices buscadas son matrices de cambio de base en los respectivos espacios vectoriales. Usando las correspondientes matrices de cambio de base

$$M_{B\to C_3}(f) = M_{C_2\to C_3}(f)\, M_{B\to C_2} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 6 \\ -7 & 9 \\ 7 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} M_{C_2\to B'}(f) &= M_{C_3\to B'} M_{C_2\to C_3}(f) = (M_{B'\to C_3})^{-1} M_{C_2\to C_3}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 4 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\frac{7}{2} & \frac{1}{2} & -1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -1 & 0 & \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9/2 & -4 \\ 5/2 & -1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

8. Supongamos que tenemos una aplicación lineal

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$$

y que consideramos en el primer espacio vectorial la base canónica C y en el segundo una base B. Supongamos que

$$M_{C\to B}(f) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Dado el vector $v = (2, -1, 2) \in \mathbb{R}^3$ halla $f(v)_B$. Halla los posibles $w \in \mathbb{R}^3$ tales que $f(w)_B = (2, 4)$.

Solución: La matriz dada calcula la imagen de un vector expresado en la base B y da el resultado en la base C, luego directamente

$$f(v)_B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

En el segundo apartado buscamos $w = (x, y, z)$ tal que $f(x, y, z)_B = (2, 4)$, tampoco tenemos que hacer cambios de base y directamente

$$f(x, y, z)_B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} x - y = 2 \\ -2x + 2z = 4 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} y = x - 2 \\ z = 2 + x \end{array} \right.$$

Si tomamos $x = \alpha$, los puntos buscados son $f^{-1}(w) = \{(\alpha, \alpha - 2, \alpha + 2) | \quad \alpha \in \mathbb{R}\}$.

9. Consideremos en $\mathbb{R}^3$ la base

$$B = \{\overrightarrow{v}_1 = (-2, 1, 1)\, ; \overrightarrow{v}_2 = (1, -1, 0)\, ; \overrightarrow{v}_3 = (3, 2, -4)\}$$

y el endomorfismo f tal que

$$M_{B \to B}(f) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & a \\ 1 & -1 & b - 1 \\ -2 & 2 & c \end{pmatrix}$$

siendo $a, b, c \in \mathbb{R}$ tales que $f(\overrightarrow{v}_2 + \overrightarrow{v}_3) = \overrightarrow{v}_1 + \overrightarrow{v}_2$.

a) Justifica que $a = 2, b = 3$ y $c = -2$.

b) Calcula la matriz de f respecto de la base canónica y su expresión analítica.

c) Calcula $\ker(f)$ e $\operatorname{Im}(f)$. ¿Es f inyectiva?¿Es f suprayectiva?

Solución:

a) La matriz que nos da el enunciado es $M_{B \to B}(f)$, es decir, dado un vector en la base B, obtendremos su imagen por f también expresado en la misma base. Los vectores $\overrightarrow{v}_2 + \overrightarrow{v}_3$ expresado en la base B son respectivamente

$$\overrightarrow{v}_2 + \overrightarrow{v}_3 = (0, 1, 1)_B$$
$$\overrightarrow{v}_1 + \overrightarrow{v}_2 = (1, 1, 0)_B$$

por otra parte

$$f(\overrightarrow{v}_2 + \overrightarrow{v}_3) = M_{B \to B}(f) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}_B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & a \\ 1 & -1 & b - 1 \\ -2 & 2 & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}_B = \begin{pmatrix} a - 1 \\ b - 2 \\ c + 2 \end{pmatrix}_B$$

y como $f(\overrightarrow{v}_2 + \overrightarrow{v}_3) = \overrightarrow{v}_1 + \overrightarrow{v}_2$, entonces

$$f(\overrightarrow{v}_2 + \overrightarrow{v}_3) = \overrightarrow{v}_1 + \overrightarrow{v}_2 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a - 1 \\ b - 2 \\ c + 2 \end{pmatrix}_B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}_B$$

de modo que

$$\begin{aligned} a - 1 &= 1 \Rightarrow a = 2, \\ b - 2 &= 1 \Rightarrow b = 3, \\ c + 2 &= 0 \Rightarrow c = -2. \end{aligned}$$

.

b)

$$\begin{aligned} M_{C_3\to C_3}(f) &= M_{B\to C_3}M_{B\to B}(f)M_{C_3\to B} = M_{B\to C_3}M_{B\to B}(f)M_{B\to C_3}^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \\ -2 & 2 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -4 \end{pmatrix}^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 6 & -1 & 6 \\ 4 & 0 & 4 \\ -8 & 1 & -8 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

y su expresión analítica es

$$f(x,y,z) = \begin{pmatrix} 6 & -1 & 6 \\ 4 & 0 & 4 \\ -8 & 1 & -8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6x-y+6z \\ 4x+4z \\ -8x+y-8z \end{pmatrix}.$$

c) Usando la expresión anterior, el núcleo será

$$\begin{pmatrix} 6x-y+6z \\ 4x+4z \\ -8x+y-8z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} 6x-y+6z=0 \\ x=-z \\ -8x+y-8z \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} -6z-y+6z=0 \\ x=-z \\ 8z+y-8z=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} -y=0 \\ x=-z \\ y=0 \end{array}\right.$$

por tanto si $x=\alpha$

$$\ker f = \{(\alpha,0,-\alpha)\} = \langle(1,0,-1)\rangle \Rightarrow f \text{ no es inyectiva.}$$

Mientras que

$\mathrm{Im}(f) = \langle(6,4,-8),(-1,0,1),(6,4,-8)\rangle = \langle(6,4,-8),(-1,0,1)\rangle \Rightarrow \mathrm{Im}(f) \neq \mathbb{R}^3 \Rightarrow f$ no es sobreyectiva.

$f =< (3,2,-4),(-1,0,1) >$. No inyectiva, no suprayectiva.

10. Consideremos en $\mathbb{R}^3$ la base

$$B = \{\overrightarrow{v}_1 = (1,-1,0)\,;\overrightarrow{v}_2 = (0,1,-1)\,;\overrightarrow{v}_3 = (1,0,1)\}$$

y en $\mathbb{R}^2$ la base

$$B' = \{\overrightarrow{w}_1 = (-1,1)\,;\overrightarrow{w}_2 = (-1,0)\}$$

Sea $f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ una aplicación lineal tal que

$$M_{B\to B'}(f) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Calcula:

a) La matriz de la aplicación f respecto de las bases canónicas respectivas.

b) La expresión analítica de dicha aplicación.

c) Calcula $\ker(f)$ e $\mathrm{Im}(f)$ y bases para estos subespacios.

d) ¿Es f inyectiva?¿Es f suprayectiva?

Solución:

a) Para encontrar $M_{C_3\to C_2}(f)$, tendremos que realizar usar las matrices de cambio de base $M_{C_3\to B}$ y $M_{B'\to C_2}$, tendremos:

$$M_{C_3\to C_2}(f) = M_{B'\to C_2}M_{B\to B'}(f)\,M_{C_3\to B} = M_{B'\to C_2}M_{B\to B'}(f)\,M_{B\to C_3}^{-1}$$

Las matrices implicadas son

$$M_{B'\to C_2} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$M_{B\to C_3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow M_{B\to C_3}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

y la matriz buscada sería:

$$M_{C_3\to C_2}(f) = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

b) La expresión analítica se obtiene con la matriz obtenida en el apartado anterior

$$f(x,y,z) = M_{C_3\to C_2}(f)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}z \\ \frac{3}{2}x - \frac{1}{2}y - \frac{3}{2}z \end{pmatrix}.$$

c) Para encontrar el núcleo utilizamos la expresión analítica

$$f(x,y,z) = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}z \\ \frac{3}{2}x - \frac{1}{2}y - \frac{3}{2}z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}z = 0 \\ \frac{3}{2}x - \frac{1}{2}y - \frac{3}{2}z = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} y - x + 3z = 0 \\ 3x - y - 3z = 0 \end{array} \right.$$

que tiene por solución

$$\begin{aligned} x &= 0 \\ y &= -3z \end{aligned}$$

luego

$$\ker f = \{(0,-3z,z)\} = \langle\{(0,-3,1)\}\rangle.$$

Para encontrar $\operatorname{Im} f$

$$\operatorname{Im} f = \langle\{f(e_1), f(e_2), f(e_3)\}\rangle = \left\langle\left\{\left(-\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right);\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right);\left(\frac{3}{2},-\frac{3}{2}\right)\right\}\right\rangle$$

obviamente el sistema no es linealmente independiente puesto que

$$\left(\frac{3}{2},-\frac{3}{2}\right) = 3\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$$

luego

$$\operatorname{Im} f = \left\langle\left\{\left(-\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right);\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)\right\}\right\rangle.$$

d) Del apartado anterior tenemos

$$\begin{aligned} \dim\ker f &= 1 \neq 0 \Rightarrow f \text{ no es inyectiva.} \\ \dim\operatorname{Im} f &= 2 \Rightarrow \operatorname{Im} f = \mathbb{R}^2 \Rightarrow f \text{ es sobreyectiva.} \end{aligned}$$

11. Determina un endomorfismo f de $\mathbb{R}^3$ que verifique $\ker f = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = 0\right\}$ y $f(0,1,1) = (2,1,-1)$.

Solución: Usando la ecuación implícita de $\ker f$, podemos obtener una base. Como $z = 0$, tendremos que los vectores de $\ker f$ son de la forma

$$(x,y,0) = x(1,0,0) + y(0,1,0)$$

luego

$$\ker f = \langle\{(1,0,0);(0,1,0)\}\rangle$$

El vector $(0,1,1)$ es independiente de los dos anteriores, luego los tres forman una base de $\mathbb{R}^3$

$$B = \{(1,0,0);(0,1,0);(0,1,1)\}$$

y podemos encontrar la matriz de f asociada a esa base, puesto que conocemos sus imágenes, los primeros vectores están en el núcleo y para la imagen del último vector la proporciona el enunciado

$$M_{B\to B} f = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Notar que este endomorfismo no es único ya que podemos intercambiar el orden de los vectores.

12. Determina un endomorfismo f de $\mathbb{R}^3$ que verifique $\ker f = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x - 2y = 0; x + z = 0\right\}$ e $\operatorname{Im} f = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0\right\}$.

Solución: Usando las ecuaciones implícitas de $\ker f$, podemos obtener una base:

$$\left\{\begin{array}{c} x - 2y = 0 \\ x + z = 0 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{c} y = \dfrac{x}{2} \\ z = -x \end{array}\right. ,$$

Los vectores de $\ker f$ serán de la forma

$$(x,y,z) = \left(x, \frac{x}{2}, -x\right) = x\left(1, \frac{1}{2}, -1\right),$$

y por tanto

$$\ker f = \langle\{(2,1,-2)\}\rangle$$

Usando las ecuaciones implícitas de $\operatorname{Im} f$ obtendremos una base

$$x + y + z = 0 \Rightarrow z = -x - y$$

por tanto los vectores de $\operatorname{Im} f$ son de la forma

$$(x,y,-x,-y) = x(1,0,-1) + y(0,1,-1).$$

Si tomamos la base canónica de $\mathbb{R}^3$, para encontrar un endormorfismo f podemos considerar que

$$\begin{aligned} f(e_1) &= f(1,0,0) = (1,0,-1), \\ f(e_2) &= f(0,1,0) = (0,1,-1). \end{aligned}$$

Nos falta por determinar $f(e_3) = f(0,0,1)$; para ello, utilizamos el hecho de que $f(2,1,-2) = 0$, puesto que dicho vector está en el núcleo de f. Tendremos pues

$$f(2,1,-2) = f(2e_1 + e_2 - 2e_3) = 0 \Leftrightarrow 2f(e_1) + f(e_2) - 2f(e_3) = 0$$

y utilizando las imágenes de e_1 y e_2

$$2(1,0,-1) + (0,1,-1) - 2f(e_3) = 0 \Rightarrow 2f(e_3) = 2(1,0,-1) + (0,1,-1) = (2,1,-3)$$

de donde

$$f\left(e_3\right)=\frac{1}{2}\left(2,1,-3\right)=\left(1,\frac{1}{2},-\frac{3}{2}\right),$$

y la matriz del endomorfimos f buscado, asociado a la base canónica podría ser

$$M_{C\to C}f=\left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ -1 & -1 & -\frac{3}{2} \end{array}\right)$$

Se deduce fácilmente que este endomorfismo no es único, ya que los vectores se pueden intercambiar, escalar, etc.

13. Determina la matriz asociada en las bases canónicas para cada una de las siguientes aplicaciones lineales:

    a) En $\mathbb{R}^3$ la proyección ortogonal de base $U=<(1,1,0),(0,1,-1)>$.
    b) En $\mathbb{R}^3$ la simetría ortogonal de base $U=<(1,1,0),(0,1,-1)>$.

    Solución:

    a) Calcularemos la proyección para cualquier vector $v\in\mathbb{R}^3$, tenemos $v=u+w$, con $u\in U$, $w\in U^{\perp}\Rightarrow P\left(v\right)=u$. Como $u\in U\Rightarrow u=\alpha\left(1,1,0\right)+\beta\left(0,1,-1\right)$.

$$\begin{aligned}\langle v,(1,1,0)\rangle &= \langle u+w,(1,1,0)\rangle=\langle u,(1,1,0)\rangle+\langle w,(1,1,0)\rangle\\ &= \langle u,(1,1,0)\rangle=\langle\alpha\left(1,1,0\right)+\beta\left(0,1,-1\right),(1,1,0)\rangle\\ &= \alpha\left\langle\left(1,1,0\right),(1,1,0)\right\rangle+\beta\left\langle\left(0,1,-1\right),(1,1,0)\right\rangle\\ &= 2\alpha+\beta\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\langle v,(0,1,-1)\rangle &= \langle u+w,(0,1,-1)\rangle=\langle u,(0,1,-1)\rangle+\langle w,(0,1,-1)\rangle\\ &= \langle u,(0,1,-1)\rangle=\langle\alpha\left(1,1,0\right)+\beta\left(0,1,-1\right),(0,1,-1)\rangle\\ &= \alpha\left\langle\left(1,1,0\right),(0,1,-1)\right\rangle+\beta\left\langle\left(0,1,-1\right),(0,1,-1)\right\rangle\\ &= \alpha+2\beta\end{aligned}$$

Hay que resolver el sistema

$$\begin{aligned}2\alpha+\beta &= \langle v,(1,1,0)\rangle\\ \alpha+2\beta &= \langle v,(0,1,-1)\rangle\end{aligned}$$

para encontrar los valores de α y β

$$\begin{aligned}\alpha &= \frac{2\left\langle v,(1,1,0)\right\rangle-\langle v,(0,1,-1)\rangle}{3}\\ \beta &= \frac{2\left\langle v,(0,1,-1)\right\rangle-\langle v,(1,1,0)\rangle}{3}\end{aligned}$$

por tanto

$$P(v) = \frac{2\langle v,(1,1,0)\rangle - \langle v,(0,1,-1)\rangle}{3}(1,1,0) + \frac{2\langle v,(0,1,-1)\rangle - \langle v,(1,1,0)\rangle}{3}(0,1,-1)$$

La matriz de proyección respecto a las bases canónicas se obtiene tomando v igual a $e_1 = (1,0,0)$, $e_2 = (0,1,0)$ y $e_3 = (0,0,1)$ respectivamente

$$\begin{aligned} P(e_1) &= \frac{2\langle e_1,(1,1,0)\rangle - \langle e_1,(0,1,-1)\rangle}{3}(1,1,0) + \frac{2\langle e_1,(0,1,-1)\rangle - \langle e_1,(1,1,0)\rangle}{3}(0,1,-1) \\ &= \frac{2}{3}(1,1,0) - \frac{1}{3}(0,1,-1) = \left(\frac{2}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(e_2) &= \frac{2\langle e_2,(1,1,0)\rangle - \langle e_2,(0,1,-1)\rangle}{3}(1,1,0) + \frac{2\langle e_2,(0,1,-1)\rangle - \langle e_2,(1,1,0)\rangle}{3}(0,1,-1) \\ &= \frac{1}{3}(1,1,0) + \frac{1}{3}(0,1,-1) = \left(\frac{1}{3},\frac{2}{3},-\frac{1}{3}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(e_3) &= \frac{2\langle e_3,(1,1,0)\rangle - \langle e_3,(0,1,-1)\rangle}{3}(1,1,0) + \frac{2\langle e_3,(0,1,-1)\rangle - \langle e_3,(1,1,0)\rangle}{3}(0,1,-1) \\ &= \frac{1}{3}(1,1,0) - \frac{2}{3}(0,1,-1) = \left(\frac{1}{3},-\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right) \end{aligned}$$

y la matriz será

$$P = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

b) Como el espacio es el mismo que para el apartado a y la matriz P es la proyección ortogonal tenemos

$$e_k = P(e_k) + w_k$$

siendo $w_k \in U^\perp$, es decir

$$w_k = e_k - P(e_k)$$

La simetría se obtiene cambiando w_k por $-w_k$, por tanto $S(e_k) = P(e_k) - w_k = P(e_k) - (e_k - P(e_k)) = 2P(e_k) - e_l$ o en forma matricial

$$S = 2P - I = \frac{2}{3}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

14. Aplicaciones Lineales (Matrices) para la derivada y la integral. Consideremos los espacios vectoriales $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ y $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ de los polinomios de grado menor o igual que 3 y 2, respectivamente. En el primero de ellos tomamos la base $B = \{1, x, x^2, x^3\}$ y en el segundo la base $B' = \{1, x, x^2\}$. Se pide:

    a) **Matriz de la derivada.** Consideremos la aplicación lineal que asocia a cada polinomio su derivada, es decir,

    $$\begin{aligned} D:\ \mathcal{P}_3(\mathbb{R}) &\to \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \\ p(x) &\mapsto D(p)(x) := p'(x). \end{aligned}$$

    Comprueba que la matriz asociada a D en las bases B y B' es

    $$M_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'}(D) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Matriz de la integral. Consideremos ahora la aplicación lineal que asocia a cada polinomio su integral, es decir,

$$\begin{array}{llll} I: & \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) & \to & \mathcal{P}_3(\mathbb{R}) \\ & p(x) & \mapsto & I(p)(x) := \int_0^x p(t)\, dt. \end{array}$$

Comprueba que la matriz asociada a I en las bases B' y B es

$$M_{\mathcal{B}' \to \mathcal{B}}(I) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

b) Calcula Ker D y Ker I.

c) Comprueba que $M_{\mathcal{B} \to \mathcal{B}'}(D) \cdot M_{\mathcal{B}' \to \mathcal{B}}(I) = I_3$, con I_3 la matriz identidad 3×3. Nótese que esta identidad matricial es una epecie de versión matricial del Teorema Fundamental del Cálculo: Derivada de la integral de una función $f(x) = f(x)$, es decir, derivación e integración son operaciones inversas.

Solución:

a) Derivando cada polinomio de $B = \{1, x, x^2, x^3\} \Rightarrow \{0, 1, 2x, 3x^2\}$ .Integrando cada polinoimio de $B' = \{1, x, x^2\} \Rightarrow \left\{x, \frac{x^2}{2}, \frac{x^3}{3}\right\}$

b) Para el operador **derivada**

$$\ker D \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} b \\ 2c \\ 3d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow (a, 0, 0, 0)$$

El núcleo está formado por los polinomios constantes.
Para el operador **integral**

$$\ker I \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ a \\ \frac{1}{s}b \\ \frac{1}{3}c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow a = b = c = 0$$

c) Sólo hay que multiplicar las matrices

$$M_{\mathcal{B} \to \mathcal{B}'}(D) \cdot M_{\mathcal{B}' \to \mathcal{B}}(I) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

15. Los gráficos por ordenador tratan con imágenes. Estas imágenes se mueven, cambian de escala, se giran y se proyectan (imágenes 3D sobre planos e imágenes 2D sobre rectas). Las tres últimas transformaciones se representan matemáticamente, en el espacio tridimensional, por medio de las siguientes aplicaciones lineales:

a) **Cambio de escala** (Scaling o Rescaling en inglés):

$$\begin{array}{llll} S: & \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ & \vec{v} = (v_1, v_2, v_3) & \mapsto & S(\vec{v}) := (c_1 v_1, c_2 v_2, c_3 v_3), \end{array}$$

con $c_j > 0$, $1 \leq j \leq 3$. Calcula la matriz asociada a S en la base canónica de $\mathbb{R}^3$.

b) **Rotación**: una rotación de ángulo θ en el plano se puede realizar por medio de la matriz

$$Q = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

¿Cómo es la matriz que permite rotar vectores en el plano YZ ?

c) **Proyección**: en los cursos de Álgebra Lineal casi todos los planos pasan por el origen, en la vida real, casi ninguno. Dado un vector unitario $n = (n_1, n_2, n_3)$ y otro vector fijo $v_0^T = (v_1^0, v_2^0, v_3^0)$, la proyección de cualquier vector tridimensional $\overrightarrow{v} = (v_1, v_2, v_3)$ sobre el plano de ecuación $n_1x + n_2y + n_3z = n_1v_1^0 + n_2v_2^0 + n_3v_3^0$ se calcula multiplicando el vector de coordenadas $(v_1, v_2, v_3, 1)$ por la matriz 4×4 (llamada de proyección)

$$P = \begin{pmatrix} I_3 & v_0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} I_3 - n^T n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} I_3 & -v_0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Comprueba que la proyección del vector $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ sobre el plano XY se puede calcular mediante el procedimiento anterior.

d) Aunque en principio, una translación es fácil de entender, sin embargo no es una aplicación lineal. En efecto, comprueba que si $\overrightarrow{a} = (a_1, a_2, a_3)$ es un vector fijo, entonces la aplicación

$$\begin{array}{rrcl} T_{\overrightarrow{a}}: & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & \overrightarrow{v} = (v_1, v_2, v_3) & \mapsto & T_{\overrightarrow{a}}\,(\overrightarrow{v}) = (a_1 + v_1, a_2 + v_2, a_3 + v_3)\,, \end{array}$$

no es lineal. Por tanto, una traslación en el espacio tridimensional no se puede representar por medio de una matriz 3×3. Esta dificultad se soluciona aumentando en uno el tamaño de la matriz de modo que la translación de vector $\overrightarrow{a} = (a_1, a_2, a_3)$ se calculará por medio de la matriz

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & 0 & a_2 \\ 0 & 0 & 1 & a_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

para ello hay que considerar las llamadas coordenadas homogéneas de un vector $\overrightarrow{v}$, definidas como

$$\overrightarrow{v} = (v_1, v_2, v_3) \Rightarrow \overrightarrow{v}_h = (v_1, v_2, v_3, 1)\,.$$

Demuestra que.

$$T_{\overrightarrow{a_h}}\,(\overrightarrow{v_h}) = \overrightarrow{a_h} + \overrightarrow{v_h} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & 0 & a_2 \\ 0 & 0 & 1 & a_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Solución:

a) Hay que calcular $S(\vec{e}_k)$ para $k = 1, 2, 3 M_{C_3 \to C_3}(S) = (S(\vec{e}_1), S(\vec{e}_2), S(\vec{e}_3)) = \begin{pmatrix} c_1 & 0 & 0 \\ 0 & c_2 & 0 \\ 0 & 0 & c_3 \end{pmatrix}$

b) Si el vector gira en el plano YZ, lo hará manteniendo la coordenada X correspondiente fija

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

c) En primer lugar calculamos la proyección del vector v sobre el plano XY en la forma usual. El plano XY es el espacio vectorial definido mediante la ecuación implícita

$$z = 0,$$

y una base de ese espacio vectorial sería

$$XY = \langle e_1 = (1,0,0)\,; e_2 = (0,1,0)\rangle$$

Como esta base es ortonormal; entonces si $v = u_1 + u_2$, con u_1 la proyección del vector v sobre este espacio XY, entonces

$$u_1 = \langle v, e_1\rangle\, e_1 + \langle v, e_2\rangle\, e_2 = (v_1, v_2, 0)\,.$$

Veamos ahora el segundo procedimiento. En este caso, como el plano es XY el vector unitario es $n = (0,0,1)$, de donde

$$n^T \cdot n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} (0,0,1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

de donde

$$I_3 - n^T n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

y la matriz P sería

$$\begin{aligned}
P &= \begin{pmatrix} I_3 & v_0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} I_3 - n^T n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} I_3 & -v_0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & v_1^0 \\ 0 & 1 & 0 & v_2^0 \\ 0 & 0 & 1 & v_3^0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -v_1^0 \\ 0 & 1 & 0 & -v_2^0 \\ 0 & 0 & 1 & -v_3^0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & v_1^0 \\ 0 & 1 & 0 & v_2^0 \\ 0 & 0 & 1 & v_3^0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -v_1^0 \\ 0 & 1 & 0 & -v_2^0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & v_3^0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

En este caso el vector v^0 es el vector nulo, luego la matriz de proyección es

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

y la proyección de $v = (v_1, v_2, v_3)$ sería

$$P \cdot v = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

cuyas 3 primeras coordenadas coinciden con las obtenidas en el apartado anterior.

d) No lineal puesto que $f(0) = \vec{a}$, que sólo es cero si es el vector nulo, luego en general, la aplicación no es lineal. Simplemente hay que multiplicar la matriz por el vector

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & 0 & a_2 \\ 0 & 0 & 1 & a_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 + a_1 \\ v_2 + a_2 \\ v_3 + a_3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

que son las coordenadas homogéneas del vector

$$\vec{a} + \vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 + a_1 \\ v_2 + a_2 \\ v_3 + a_3 \end{pmatrix}.$$