1. Resuelve de forma gráfica el siguiente problema de programación lineal:

$$\begin{cases} \text{Minimizar} & f(x,y) = 2x + 3y \\ \text{sujeto a} & x + y \geq 5 \\ & x + 3y \geq 9 \\ & 4x + y \geq 8 \\ & x, y \geq 0 \end{cases}$$

2. Resuelve de forma gráfica el siguiente problema. ¿Tiene solución? ¿Por qué?:

$$\begin{cases} \text{Maximizar} & f(x,y) = 2x + 3y \\ \text{sujeto a} & x + y \geq 5 \\ & x + 3y \geq 9 \\ & 4x + y \geq 8 \\ & x, y \geq 0 \end{cases}$$

3. Resuelve de forma gráfica el siguiente problema. ¿Tiene solución? En caso afirmativo, ¿Cuántas tiene? ¿Por qué ?

$$\begin{cases} \text{Minimizar} & f(x,y) = 2x + y \\ \text{sujeto a} & 2x + y \geq 20 \\ & 2x - y \leq 20 \\ & 0 \leq y \leq 20 \end{cases}$$

4. Consideremos una compañía que produce dos productos P_1 y P_2 que fabrica en dos talleres de trabajo E_1 y E_2, los cuales pueden elaborar ambos productos. Se sabe que, si el taller E_1 se dedicara a la producción de P_1 podría procesar 40 unidades del mismo al día, mientras que si se dedicara a la producción de P_2 procesaría 60 unidades al día. Por su parte, el taller E_2 es capaz de procesar 50 unidades al día de P_1 y también 50 de P_2. La rentabilidad que obtiene la empresa por cada producto es de 200€ para P_1 y 400€ para P_2. Si la compañía es capaz de disponer de toda su producción, la pregunta es: ¿cuál ha de ser la distribución de la producción de los productos para que el beneficio sea máximo?. Haz un modelo matemático para este problema y resuélvelo mediante el método SIMPLEX.

5. Una pequeña central eléctrica consta de dos generadores. El primero proporciona unos beneficios de 3 euros/MWh con una potencia máxima de salida de 4 MWh, mientras que el segundo genera unos beneficios de 5 euros/MWh con una potencia máxima de 6 MWh. Además el sistema debe ajustarse en todo momento de modo que la siguiente restricción requerida por el sistema de refrigeración se cumpla: tres veces la potencia de salida del primero más el doble de la del segundo no puede exceder en ningún caso de 18 MWh. ¿Cuál es la potencia óptima de salida de cada generador desde el punto de vista de maximizar los beneficios? Resuelve el problema mediante el método SIMPLEX y gráficamente.

6. Una determinada empresa dispone de dos minas A y B dedicadas a la extracción de carbón. La mina A es capaz de producir diariamente 1 tonelada de carbón de máxima calidad, 2 toneladas de calidad media y 6 toneladas de calidad baja. El coste diario que supone mantener abierta y a pleno rendimiento esta mina (es decir, el coste de producción diario) es de 1000 euros. Por su parte, la mina B produce diariamente 2 toneladas de carbón de máxima calidad, 5 toneladas de calidad media y 6 toneladas de calidad baja. El coste de producción diario para la mina B es de 1400 euros. La empresa recibe un pedido de 90 toneladas de carbón de máxima calidad, 120 de calidad media y 180 de baja calidad. Evidentemente, el propietario de la empresa desea averiguar cuántos días se debe trabajar en cada mina para que el pedido sea satisfecho y el coste total de producción sea mínimo. Escribe un modelo matemático para este problema y resuélvelo gráficamente.

7. Una empresa que produce violines, guitarras y violas utiliza madera, mano de obra y metal en su construcción. Las cantidades de cada recurso que se precisan para realizar una unidad de cada instrumento musical se muestran en la tabla siguiente:

	Violín	Guitarra	Viola
Madera	2	1	1
Mano de obra	2	1	2
Metal	1	1	1

La empresa dispone de 50 unidades de madera, 60 unidades de trabajo y 55 de metal, y vende los violines a 200 euros, las guitarras a 175 euros y las violas a 125 euros. Se trata de encontrar la cantidad a producir de cada instrumento para maximizar los beneficios de la empresa. Escribe un modelo matemático para este problema y resuélvelo mediante el método SIMPLEX.

8. Una fábrica de pinturas produce dos tipos diferentes de pintura (una para exteriores de casas y otra para interiores) a partir de dos materiales A y B. Las necesidades de materia prima por tonelada de pintura así como la disponibilidad diaria de los materiales está dada en la siguiente tabla:

	Exterior	Interior	Disponibilidad diaria
Materia A	1	2	6
Materia B	2	1	8

Si el precio por tonelada es de 3000 euros para la de exteriores y 2000 euros para la de interiores, escribe un modelo matemático que permita determinar cómo debe ser la producción de pintura para maximizar el beneficio y resuélvelo mediante el método SIMPLEX.

9. Una persona quiere invertir 100000 euros en dos tipos de acciones A y B. Las de tipo A tienen más riesgo, pero producen un beneficio del $10\,\%$. Las de tipo B son más seguras, pero producen sólo el $7\,\%$ nominal. Decide invertir como máximo 60000 euros en la compra de acciones A y, por lo menos, 20000 euros en las de tipo B. Además, quiere que lo invertido en A sea, por lo menos, igual a lo invertido en B. ¿Cómo debe invertir los 100000 euros para que el beneficio anual sea máximo? Resuélvelo gráficamente.

10. Resuelve mediante el método SIMPLEX los siguientes problemas de programación lineal

$$\begin{array}{ll} \text{Maximizar} & f(x,y,z) = 2x+7y+4z \\ \text{Sujeto a} & x+2y+3z \leq 10 \\ & 3x+3y+2z \leq 10 \\ & x,y,z \geq 0 \end{array} \qquad \begin{array}{ll} \text{Maximizar} & f(x,y,z) = x+2y+z \\ \text{Sujeto a} & x+y+2z \leq 1 \\ & 2x-z \leq 1 \\ & x,y,z \geq 0 \end{array}$$

11. Resuelve mediante el método SIMPLEX los siguientes problemas de programación lineal

$$\begin{array}{ll} \text{Minimizar} & f(x,y,z) = -3x-y-4z \\ \text{Sujeto a} & 6x+3y+5z \leq 25 \\ & 3x+4y+5z \leq 20 \\ & x,y,z \geq 0 \end{array} \qquad \begin{array}{ll} \text{Maximizar} & f(x,y) = 6x+8y \\ \text{Sujeto a} & 5x+2y \leq 20 \\ & x+2y \leq 10 \\ & x,y \geq 0 \end{array}$$

12. Dado el siguiente problema de programación lineal

$$\begin{array}{ll} \text{Minimizar} & f(x,y,z) = -3x-y-2z \\ \text{Sujeto a} & x-y+2z \leq 20 \\ & 2x+y-z \leq 10 \\ & x,y,z \geq 0 \end{array}$$

Si x_4^h y x_5^h son las variables de holgura para las respectivas restricciones y aplicamos el método Simplex, comprueba que la tabla óptima final es

$$\begin{array}{c|ccccc|c} & x & y & z & x_4^h & x_5^h & b \\ \hline z & 3 & 0 & 1 & 1 & 1 & 30 \\ y & 5 & 1 & 0 & 1 & 2 & 40 \\ \hline & 8 & 0 & 0 & 3 & 4 & 100 \end{array}$$

Considera el siguiente problema

$$\begin{array}{ll} \text{Minimizar} & f(x,y,z) = 5x - 5y - 13z \\ \text{Sujeto a} & -x + y + 3z \leq 20 \\ & 12x + 4y + 10z \leq 90 \\ & x, y, z \geq 0 \end{array}$$

comprueba que, la siguiente es la tabla óptima:

	x	y	z	x_4^h	x_5^h	b
y	-1	1	3	1	0	20
x_5^h	16	0	-2	-4	1	10
	0	0	2	5	0	100

donde x_4^h y x_5^h son las variables de holgura.

13. Considera el siguiente problema

$$\begin{array}{ll} \text{Minimizar} & f(x,y,z) = -2x + y - z \\ \text{Sujeto a} & 3x + y + z \leq 60 \\ & x - y + 2z \leq 10 \\ & x + y - z \leq 20 \\ & x, y, z \geq 0 \end{array}$$

Sean x_4^h, x_5^h y x_6^h las variables de holgura para las respectivas restricciones. Aplica el método SIMPLEX y comprueba que la tabla óptima final es

	x	y	z	x_4^h	x_5^h	x_6^h	b
x_4^h	0	0	1	1	-1	-2	10
x	1	0	$1/2$	0	$1/2$	$1/2$	15
y	0	1	$-3/2$	0	$-1/2$	$1/2$	5
	0	0	$3/2$	0	$3/2$	$1/2$	25

14. Resuelve los siguientes problemas lineales :

a)

$$\begin{array}{ll} \text{Minimizar} & f(x,y,z) = -2x - y + 3z \\ \text{Sujeto a} & 3x - y + z \leq 8 \\ & x + y + 4z \leq 6 \\ & 2x + 3y - z \leq 10 \\ & x, y, z \geq 0 \end{array}$$

b)

$$\begin{array}{ll} \text{Minimizar} & f(x,y,z) = 3x + 2y - z \\ \text{Sujeto a} & x + 2y + 3z \leq 5 \\ & 2x + 3y + z \leq 6 \\ & 3x + y + z \leq 7 \\ & x, y, z \geq 0 \end{array}$$

Otros ejemplos más realistas de problemas de programación lineal de interés en Ingeniería Química pueden encontrarse en la siguiente referencia:

Referencias

[1] Edgar T., Himmelblau, Optimization of chemical processes, ed. McGraw-Hill, 1988.

Soluciones

1. $(x^*, y^*) = (3, 2)$.
2. No hay solución. Problema de valor infinito.
3. Soluciones alternativas.
4. La solución óptima del problema es: $x^* = (x_{11} = 0, x_{12} = 0, x_{21} = 60, x_{22} = 50)$ con valor óptimo $z^* = 44000$.
5. La solución óptima es $(x^* = 2, y^* = 6)$ con valor óptimo $z^* = 36$.
6. La solución óptima es $(x^* = 0, y^* = 45)$ con valor óptimo $z^* = 63000$.
7. La solución óptima es $(x^* = 0, y^* = 50, z^* = 0)$ con valor óptimo $z^* = 8750$.
8. La solución óptima es $\left(x^* = \frac{10}{3}, y^* = \frac{4}{3}\right)$ con valor óptimo $z^* = \frac{38000}{3}$.
9. La solución óptima es $(x^* = 60000, y^* = 40000)$ con valor óptimo $z^* = 8800$.
10. **(a)** $x^* = \left(0, \frac{10}{3}, 0\right)$ y $f(x^*) = \frac{70}{3}$.**(b)** $x^* = (0, 1, 0)$ y $f(x^*) = 2$.
11. **(a)** $x^* = \left(\frac{5}{3}, 0, 3\right)$ y $f(x^*) = -17$.**(b)** $x^* = \left(\frac{10}{4}, \frac{30}{8}\right)$ y $f(x^*) = 45$.
12. $x^* = (0, 40, 30)$ y $f(x^*) = -100$.
13. $x^* = (0, 20, 0)$ y $f(x^*) = -100$.
14. $x^* = (15, 5, 0)$ y $f(x^*) = -25$.
15. **(a)** $x^* = \left(\frac{34}{11}, \frac{14}{11}, 0\right)$ y $f(x^*) = -\frac{82}{11}$. **(b)** $x^* = \left(0, 0, \frac{5}{3}\right)$ y $f(x^*) = -\frac{5}{3}$.