Capítulo 1

Los números complejos

1.1. El cuerpo $\mathbb{C}$

Se llama **número complejo** a todo par ordenado (x, y) de números reales x y y, escrito como

$$z = (x, y)$$

El conjunto de los números complejos lo denotaremos por

$$\mathbb{C} = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}.$$

Por consiguiente, en cuanto a conjunto (sin estructura) $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$.

Dado un número complejo $z = (x, y)$ llamaremos **parte real** de z, y lo denotaremos $\operatorname{Re} z$, a su primera coordenada; mientras que llamaremos **parte imaginaria** de z, y lo denotaremos $\operatorname{Im} z$, a su segunda coordenada, es decir,

$$\operatorname{Re} z = x \qquad \text{y} \qquad \operatorname{Im} z = y.$$

Por definición dos números complejos son iguales si y sólo si sus partes reales e imaginarias son iguales. Si $\operatorname{Im} z = 0$, entonces diremos que z es un **número real puro.** Si $\operatorname{Re} z = 0$, entonces diremos que z es **imaginario puro.**

Las **operaciones adición y multiplicación** en el conjunto $\mathbb{C}$ vienen dadas de la siguiente manera: si $z_1 = (x_1, y_1)$ y $z_2 = (x_2, y_2)$, entonces

$$z_1 + z_2 = (x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2). \tag{1.1}$$

y

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) = (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + x_2y_1). \tag{1.2}$$

Con las operaciones adición y multiplicación el conjunto $\mathbb{C}$ tiene estructura de **cuerpo conmutativo**[1].

Las siguientes relaciones para los números complejos $(x_1, 0)$ y $(x_2, 0)$

$$(x_1, 0) + (x_2, 0) = (x_1 + x_2, 0) \qquad \text{y} \qquad (x_1, 0) \cdot (x_2, 0) = (x_1 x_2, 0)$$

también se verifican para los número reales x_1 y x_2, es decir, claramente

$$x_1 + x_2 = x_1 + x_2 \qquad \text{y} \qquad x_1 \cdot x_2 = x_1 x_2$$

Por tanto, los números complejos extienden a los reales, y es posible escribir (identificar)

$$x = (x, 0)\,, \text{ con } x \in \mathbb{R}.$$

En particular, $\mathbb{R}$ es un subcuerpo de $\mathbb{C}$.

Diferencias con el conjunto $\mathbb{R}$

- En el conjunto $\mathbb{C}$ no se puede establecer una relación de orden.
- Los términos positivo y negativo no tienen sentido en este conjunto.

1.2. Forma binómica de los números complejos

Observar que

$$(0,1)\,(0,1) = (-1,0) = -1$$

propiedad que jamás satisface un número real (la de que su cuadrado de -1). Al número complejo $(0,1)$ se le denomina **unidad imaginaria** y lo denotaremos por i, es decir

$$i^2 = -1.$$

[1]

$$\left.\begin{array}{l} z_1 + z_2 = z_2 + z_1 \\ z_1 z_2 = z_2 z_1 \end{array}\right\} \quad \text{(Leyes conmutativas)}$$

$$\left.\begin{array}{l} (z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3) \\ (z_1 z_2)\, z_3 = z_1\,(z_2 z_3) \end{array}\right\} \quad \text{(Leyes asociativas)}$$

$$z_1\,(z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3 \qquad \text{(Ley distributiva)}$$

$$0 + z = z + 0 = z \qquad 0 \text{ identidad aditiva}$$

$$z + (-z) = (-z) + z = 0 \text{ con } -z = -x - iy$$

$$z \cdot 1 = 1 \cdot z = z \qquad 1 \text{ identidad multiplicativa}$$

Además para cada $y \in \mathbb{R}$

$$(0, y) = (0, 1)\,(y, 0) = (0, 1)\,y = iy.$$

Cualquier número complejo $z = (x, y)$ admite la siguiente expresión en **forma binómica**[2]

$$z = (x, y) = (x, 0) + (0, y) = x + iy,$$

en particular $0 = 0 + 0i$.

Para realizar operaciones con números complejos se suele utilizar la forma binómica ya que esta permite la utilización de las operaciones con números reales (de las que estamos más familiarizados) y así evitamos la utilización de (1.1) y (1.2).

Ejemplo 1 *Determinar la diferencia* $z_1 - z_2$ *y el cociente*[3] $\dfrac{z_1}{z_2}$ *donde* $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$

1.3. Plano complejo

Un número complejo $z = x + iy$ se puede representar geométricamente en un sistema coordenado dos-dimensional llamado *plano complejo*: la parte real x yace en el eje horizontal, que llamaremos **eje real**, y la parte imaginaria y en el eje vertical, que llamaremos **eje imaginario**. A menudo nos referiremos al número complejo como el punto z o como el vector z.

1.4. Forma polar de los números complejos. Potencias y raíces

Si además de usar las coordenadas x e y también se usan las coordenadas polares r y θ usuales definidas como

$$x = r\cos\theta \qquad \text{y} \qquad y = r\,\mathrm{sen}\,\theta,$$

[2]Esta notación se utiliza exclusivamente en la prática.

[3]Obtener la regla práctica para la división: multiplicar y dividir por el conjugado del número complejo del denominador.

entonces, a la expresión del número complejo $z = x + iy \in \mathbb{C}$ dada por

$$z = r(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta) = r_\theta$$

se la denomina **forma polar de un número complejo**[4].

1.4.1. Módulo

Llamaremos **módulo** de z, y lo denotaremos por $|z|$, al número real no negativo,

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = r.$$

Interpretación geométrica del módulo

- Geométricamente el número $|z|$ es la distancia entre el punto (x, y) y el origen, o sea, la longitud del vector $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ que representa a z. De manera análoga $|z_1 - z_2|$ es la distancia entre z_1 y z_2.
- La desigualdad $|z_1| < |z_2|$ significa que el punto z_1 está más cercano del origen que el punto z_2.

Los números reales $|z|$, $\operatorname{Re} z$ y $\operatorname{Im} z$. están relacionados de la siguiente forma

$$|z|^2 = (\operatorname{Re} z)^2 + (\operatorname{Im} z)^2$$

y es fácil ver que

$$\operatorname{Re} z \le |\operatorname{Re} z| \le |z| \qquad \text{y} \qquad \operatorname{Im} z \le |\operatorname{Im} z| \le |z|.$$

1.4.2. Conjugado

Sea $z = x + iy \in \mathbb{C}$. Llamaremos **conjugado** de z y lo denotaremos por $\bar{z}$, al número complejo

$$\bar{z} = x - iy = (x, -y).$$

El conjugado $\bar{z}$ de un número complejo z es el simétrico de z en el plano complejo con respecto al eje real. Claramente $\overline{(\bar{z})} = z$.

Los conjugados son de utilidad porque verifican diversas propiedades importantes. Una de ellas, que usaremos en la división, es que

$$z\bar{z} = x^2 + y^2 = |z|^2$$

[4] $(0, \theta)$ son las coordenadas polares del número complejo $z = 0$.

es real. Obviamente

$$|\bar{z}| = |z|.$$

Además, la adición y la sustracción conducen a que

$$z + \bar{z} = 2x \qquad z + \bar{z} = 2iy.$$

De esta forma podremos expresar la parte real y la parte imaginaria de un número complejo mediante las fórmulas

$$\operatorname{Re} z = \frac{z + \bar{z}}{2} \qquad \operatorname{Im} z = \frac{z - \bar{z}}{2i}.$$

Además respecto a las operaciones usuales se tiene

$$\overline{z_1 \pm z_2} = \bar{z}_1 \pm \bar{z}_2 \qquad \overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2.$$

y

$$\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2} (z_2 \neq 0).$$

1.4.3. Argumento

Claramente θ es uno de los ángulos[5] que forma el vector (x, y) con el eje de abscisas. Cuando[6] $z \neq 0$, llamaremos **argumento principal de** z, y lo denotaremos por $\operatorname{Arg} z$, al único valor de $\theta \in \left]-\pi, \pi\right]$ que cumple

$$\theta = \arctan \frac{y}{x}.$$

Así, por definición $\theta = \operatorname{Arg} z$ satisface

$$-\pi < \operatorname{Arg} z \leq \pi,$$

Al determinar θ es necesario fijarse en el cuadrante en que está z porque el periodo de $\tan \theta$ es π.

Ejemplo 2 *Determinar los argumentos principales de los siguientes conjuntos de números complejos.*

(i) $\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z > 0 \ e \ \operatorname{Im} z = 0\}$.

[5] Aquí, como en cálculo, todos los ángulos se miden en radianes y son positivos si se describen en sentido contrario al del movimiento de las manecillas del reloj.

[6] Para $z = 0$, el ángulo θ no está definido.

(ii) $\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z < 0 \text{ e } \operatorname{Im} z = 0\}$.

(ii) $\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z = 0 \text{ e } \operatorname{Im} z > 0\}$.

(iv) $\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z = 0 \text{ e } \operatorname{Im} z < 0\}$.

Claramente el argumento principal del conjugado de un número complejo verifica la igualdad

$$\operatorname{Arg}(\bar{z}) = -\operatorname{Arg}(z).$$

Evidentemente θ es uno de los posibles ángulos que forman el vector (x, y) con el eje de abscisas. Al conjunto de todos estos ángulos lo llamaremos **argumento**[7] de z y lo denotaremos por $\arg z$, es decir

$$\arg z = \{\operatorname{Arg} z + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$$

1.4.4. Fórmula de Moivre

Sean z_1, $z_2 \in \mathbb{C}$ tales que

$$z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\operatorname{sen}\theta_1) \qquad \text{y} \qquad z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\operatorname{sen}\theta_2),$$

entonces

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= [r_1(\cos\theta_1 + i\operatorname{sen}\theta_1)][r_2(\cos\theta_2 + i\operatorname{sen}\theta_2)] \\ &= r_1 r_2[(\cos\theta_1\cos\theta_2 - \operatorname{sen}\theta_1\operatorname{sen}\theta_2) + i(\operatorname{sen}\theta_1\cos\theta_2 + \cos\theta_1\operatorname{sen}\theta_2)] \\ &= r_1 r_2[\cos(\theta_1+\theta_2) + i\operatorname{sen}(\theta_1+\theta_2)] \qquad (1.3) \end{aligned}$$

Por (1.3) se tiene, si $z = r(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta)$

$$zz = r^2(\cos 2\theta + i\operatorname{sen} 2\theta)$$

y

$$\begin{aligned} \frac{1}{z^2} &= \frac{\overline{z^2}}{|z^2|^2} = \frac{1}{r^4}r^2[\cos(2\theta) - i\operatorname{sen}(2\theta)] \\ &= \frac{1}{r^2}[\cos(-2\theta) + i\operatorname{sen}(-2\theta)]. \end{aligned}$$

---

[7] Por definición, la correspondencia que a cada número complejo no nulo z le hace corresponder su argumento no es una función. Esta correspondencia posee una infinidad de determinaciones y, por este hecho, diremos que se trata de una función multívoca. En contraposición la correspondencia que a cada número complejo no nulo z le hace corresponder su argumento principal es una función.

Más generalmente

$$z^n = r^n (\cos n\theta + i \operatorname{sen} n\theta) \text{ para todo } n \in \mathbb{Z}. \qquad (1.4)$$

Para $|z| = r = 1$, la fórmula (1.4) conduce a la fórmula de Moivre

$$(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)^n = \cos n\theta + i \operatorname{sen} n\theta.$$

De la relación obtenida en (1.3) también se obtiene que

$$|z_1 z_2| = r_1 r_2 = |z_1|\,|z_2|$$

De la misma forma se puede demostrar que

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{r_1}{r_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|}$$

La fórmula de Moivre es de utilidad para expresar $\cos n\theta$ y $\operatorname{sen} n\theta$, en términos de $\cos\theta$ y $\operatorname{sen}\theta$. Por ejemplo, si $n = 2$

$$\cos^2\theta + i2\cos\theta\operatorname{sen}\theta - \operatorname{sen}^2\theta = (\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta)^2 = \cos 2\theta + i\operatorname{sen} 2\theta$$

y considerando parte real y parte imaginaria de ambos miembros, se obtienen[8]

$$\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta = \cos 2\theta \qquad \text{y} \qquad 2\cos\theta\operatorname{sen}\theta = \operatorname{sen} 2\theta.$$

1.4.5. Raíces

Sea $n \in \mathbb{N}$. Si $z = w^n$, entonces a cada valor de w le corresponde un valor de z. Recíprocamente vamos a ver que a un valor dado de $z \neq 0$ le corresponde n distintos valores de w. Cada uno de estos valores se denomina **raíz n-ésima** de z y se escribe

$$w = \sqrt[n]{z}.$$

Los valores de $\sqrt[n]{z}$ pueden escribirse de la siguiente forma. Si $w = R(\cos\phi + i\operatorname{sen}\phi)$, la ecuación $z = w^n$ se transforma en

$$w^n = R^n (\cos n\phi + \operatorname{sen} n\phi) = z = r(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta).$$

[8] Esto muestra que los métodos complejos a menudo simplifican la obtención de fórmulas reales.

Igualando los valores absolutos de ambos miembros se obtiene

$$R^n = r, \text{ es decir, } R = \sqrt[n]{r},$$

en donde la raíz n-ésima es real y positiva. Al igualar los argumentos se obtiene

$$n\phi = \theta + 2k\pi, \text{ es decir, } \phi = \frac{\theta + 2k\pi}{n} \text{ con } k \in \mathbb{Z}.$$

En consecuencia, para $z \neq 0$, se tienen los valores

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\theta + 2k\pi}{n} + i \operatorname{sen}\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) \text{ en donde } k \in \mathbb{Z}.$$

Es fácil ver que para $k = 0, 1, 2, ..., n-1$ se obtienen n distintos valores de $\sqrt[n]{z}$ y que con otros valores de k se obtienen valores repetidos de $\sqrt[n]{z}$. Por ejemplo, para $k = n$ se obtiene

$$\phi = \frac{\theta + 2n\pi}{n} = \frac{\theta}{n} + \frac{2n\pi}{n} = \frac{\theta}{n} + 2\pi$$

y

$$\cos\left(\frac{\theta}{n} + 2\pi\right) = \cos\frac{\theta}{n} \quad \text{y} \quad \operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{n} + 2\pi\right) = \operatorname{sen}\frac{\theta}{n}$$

En consecuencia, para $z \neq 0$, se tienen los n valores distintos

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\theta + 2k\pi}{n} + i \operatorname{sen}\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) \text{ en donde } k = 0, 1, ..., n-1. \tag{1.5}$$

Las raíces n-ésimas como los vértices de un polígono

Cuando $n = 2$ las raíces están siempre en extremos opuestos del diámetro de una circunferencia y cuando $n \geq 3$ están en los vértices de un polígono regular de n lados inscrito en una circunferencia de radio $\sqrt[n]{r}$.

Ejemplo 3 [9] *Determinar* $\sqrt{2i}$.

1.5. Topología del plano complejo

Durante este curso consideraremos al plano complejo dotado de la distancia (euclídea) d de $\mathbb{R}^2$, es decir, si $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$

$$d(z_1, z_2) = |z_1 - z_2|.$$

[9] Antes de realizar el primer problema obtener, en general, la raiz cuadrada de un número complejo.

1.5.1. Circunferencias y discos

Sea $z_0 \in \mathbb{C}$ y sea $\rho > 0$.

- Llamaremos **disco abierto** de centro z_0 y radio ρ al conjunto
$$D(z_0, \rho) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| < \rho\}.$$
- Llamaremos **circunferencia** de centro z_0 y radio ρ al conjunto
$$C(z_0, \rho) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| = \rho\}.$$
- Llamaremos **disco cerrado** de centro z_0 y radio ρ al conjunto
$$\overline{D}(z_0, \rho) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| \leq \rho\},$$
es decir
$$\overline{D}(z_0, \rho) = D(z_0, \rho) \cup C(z_0, \rho).$$
- Llamaremos **anillo o corona** de centro z_0 y radios ρ_1 y ρ_2 (con $0 \leq \rho_1 < \rho_2 \leq +\infty$), al conjunto
$$A(z_0, \rho_1, \rho_2) = \{z \in \mathbb{C} \mid \rho_1 < |z - z_0| < \rho_2\}$$
- Llamaremos **bola o disco punteado** de centro z_0 y radio ρ, que escribiremos $D^*(z_0, \rho)$, al conjunto
$$D^*(z_0, \rho) = \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < |z - z_0| < \rho\}.$$

1.5.2. Semiplanos[10]

Llamaremos **semiplano superior** (abierto) al subconjunto de números complejos $\mathrm{j}_+ = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z > 0\}$ y por **semiplano inferior** se entiende el conjunto $\mathrm{j}_- = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z < 0\}$. De manera semejante $\operatorname{Re} z > 0$ define el **semiplano derecho** y $\operatorname{Re} z < 0$ define el **semiplano izquierdo**.

1.5.3. Conceptos topológicos

Llamaremos **entorno** de z_0 a cualquier disco abierto de centro z_0. Un subconjunto Ω de $\mathbb{C}$ diremos que es un **conjunto abierto** si cualquier punto de Ω tiene un entorno que consta completamente de puntos de Ω, es decir,

[10] Todos estos conjuntos son conjuntos abiertos.

si para todo $z_0 \in \mathbb{C}$ existe $\rho > 0$ tal que $D(z_0, \rho) \subset \Omega$. Un subconjunto Ω de $\mathbb{C}$ diremos que es un **conjunto cerrado** si $\mathbb{C} \setminus \Omega$ es abierto.

Recordar que hay conjuntos que son abiertos y cerrados (por ejemplo, $\mathbb{C}$ y $\emptyset$) y que hay conjuntos que no son abiertos ni cerrados. Por ejemplo el conjunto $\Omega = D^*(0,1) \cup \{2\}$ no es un subconjunto abierto ni cerrado de $\mathbb{C}$.

Un punto $z_0 \in \mathbb{C}$ diremos que es un **punto frontera** de un conjunto Ω si todo entorno de z_0 contiene puntos que pertenecen a Ω y que no pertenecen a Ω. Resulta evidente que un conjunto es abierto si no contiene a ninguno de sus puntos frontera y es cerrado si contiene a todos sus puntos frontera

Diremos que un conjunto abierto Ω es **conexo** si dos puntos cualesquiera de Ω pueden unirse mediante una línea quebrada constituida por un número finito de segmentos de recta completamente contenidos en Ω. Un conjunto abierto conexo lo denominaremos **dominio**. Por ejemplo un disco abierto y un anillo son dominios. Un cuadrado abierto sin una diagonal no es un dominio, ya que este conjunto no es conexo.

Una región es un conjunto que consta de un dominio más, quizá, algunos o todos sus puntos frontera.

1.6. El cuerpo complejo ampliado

En muchas ocasiones es adecuado ampliar el cuerpo $\mathbb{C}$ de los números complejos añadiéndole un punto que denotaremos por ∞ y que llamaremos infinito. Básicamente se hace para ganar perspectiva, evitando algunas situaciones aparentemente patológicas que realmente no lo son.

Evidentemente, si pensamos en el plano de Gauss como modelo del cuerpo $\mathbb{C}$, dista de ser trivial cómo definir el concepto de punto del infinito, porque a infinito podemos acercarnos a lo largo de cualquier dirección.

En el siglo XIX Riemann concibió una idea realmente ocurrente al cartografiar el plano de Gauss sobre la superficie de la bola unidad de $\mathbb{R}^3$ perforada por su polo norte-mediante la denominada proyección estereográfica-de tal manera que ir a infinito en el plano de Gauss se traduce a acercarse al polo norte sobre la esfera.

Procediendo de esta manera, Riemann propuso la esfera unidad completa como modelo de cuerpo complejo ampliado por el punto del infinito, denotado por $\mathbb{C}^*$, siendo el polo norte el punto del infinito. Por alumbrar esta idea tan simple como fructífera, a la esfera unidad de $\mathbb{R}^3$ le cayo el apelativo de esfera de Riemann[11]

A $\mathbb{S}^2$ se le denomina plano complejo ampliado, denotado habitualmente por $\mathbb{C}^*$. $\mathbb{S}^2 \setminus \{N\}$ es un modelo de $\mathbb{C}$ y N recibe el nombre de punto del infinito de $\mathbb{C}^*$.

La expresión de las operaciones suma y producto de complejos sobre $\mathbb{S}^2 \setminus \{N\}$ no es tan simple como sobre el plano $x_3 = 0$. Pero esta dificultad no debe turbarnos, porque nuestro único objetivo aquí era disponer de un modelo simple de plano complejo ampliado que preservase la topología del plano de Gauss compactándola, y la esfera de Riemann nos lo proporciona.

[11] Otro modelo de $\mathbb{C}^*$ es la esfera proyectiva compleja $\mathbb{P}(\mathbb{C}^2)$.