Capítulo 2

Funciones de Variable Compleja

Se trata en este capítulo de estudiar las relaciones que se establecen entre conjuntos de números complejos a través de funciones entre ambos. Se definirá el concepto de función de variable compleja, su continuidad, su derivabilidad y su relación con las funciones reales de variable real que el alumno ha realizado en cursos anteriores.

2.1. Introducción

Definición 2.1 *Se define función real de variable compleja a toda aplicación de un subconjunto de números complejos $A \subseteq \mathbb{C}$ en $\mathbb{R}$, y representamos como*

$$\begin{array}{rcl} f & : & A \subseteq \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R} \\ & & z \quad \rightsquigarrow \quad f(z) \end{array}$$

donde

$$f(z) \in \mathbb{R}$$

Ejemplo 2.1 *Funciones reales de variable compleja son:*

a) $f(z) = \mathrm{Re}(z)$ *(Función parte real)*

b) $f(z) = \mathrm{Im}(z)$ *(Función parte imaginaria)*

c) $f(z) = |z|$ *(Función módulo)*

Definición 2.2 *Se define función compleja de variable compleja a una aplicación de un subconjunto de números complejos $A \subseteq \not{C}$ en $\mathbb{C}$, y representamos como*

$$\begin{array}{ccc} f : A \subseteq \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \rightsquigarrow & f(z) \end{array}$$

donde

$$f(z) \in \mathbb{C}$$

En ambos casos el conjunto A es el *dominio de definición* de la función f.

Ejemplo 2.2 *Funciones complejas de variable compleja son:*

a) $I_d(z) = z$ *(Función Identidad)*

b) $T(z) = z + z_0$ *(Traslación)*

c) $R(z) = ze^{i\theta}$ *(Rotación de ángulo θ)*

d) $C(z) = \overline{z}$ *(Reflexión o conjugación)*

e) $f(z) = z^2$

f) $f(z) = \frac{1}{z}$ *(Inverso, con $z \neq 0$)*

Puesto que tanto z como $f(z)$ son números complejos, ambos elementos tendrán parte real e imaginaria

$$\begin{aligned} z &= \operatorname{Re}(z) + i \operatorname{Im}(z) \\ f(z) &= \operatorname{Re}(f(z)) + i \operatorname{Im}(f(z)) \end{aligned}$$

por otra parte y teniendo en cuenta la equivalencia entre $\mathbb{C}$ y $\mathbb{R}^2$, es posible considerar este tipo de funciones como aplicaciones de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$; tomando $z = x + iy$, entonces

$$f(z) = f(x + iy) \equiv f(x, y)$$

y podemos definir dos funciones reales de dos variables reales de la siguiente forma

$$\begin{aligned} u(x, y) &\equiv \operatorname{Re}(f(x, y)) = \operatorname{Re}(f(z)) \\ v(x, y) &\equiv \operatorname{Im}(f(x, y)) = \operatorname{Im}(f(z)) \end{aligned}$$

es decir, expresamos la parte real e imaginaria de $f(z)$ en términos de la parte real e imaginaria de z: Una función compleja de variable compleja es equivalente a una función vectorial real de dos variables.

Ejemplo 2.3 *Como ejemplo de función compleja de variable compleja están los polinomios y aunque posteriormente se verán algunas propiedades adicionales, un polinomio complejo de grado $n \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$ y coeficientes $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$, con $a_n \neq 0$ es una función definida como*

$$P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$$

donde sólo se utilizan operaciones elementales de suma y productos de números complejos.

Para obtener la parte real e imaginaria de un polinomio complejo sólo hay que sustituir la variable z por su correspondiente expresión en forma binómica, $z = x + iy$, y realizar las operaciones correspondientes:

$$P(z) = P(x + iy) = a_n (x + iy)^n + a_{n-1} (x + iy)^{n-1} + \cdots + a_1 (x + iy) + a_0.$$

Ejemplo 2.4 *Calcula $u(x, y) = \operatorname{Re}(f(z))$ y $v(x, y) = \operatorname{Im}(f(z))$ para $f(z) = z^2$*

Solución: Tomando z en forma binómica como

$$z = x + iy$$

entonces sustituyendo z en $f(z)$ y operando

$$f(x+iy) = (x+iy)^2 = \left(x^2 - y^2\right) + i2xy$$

de donde

$$\begin{aligned} u(x,y) &= x^2 - y^2 \\ v(x,y) &= 2xy \end{aligned}$$

Ejemplo 2.5 *Expresa en términos de $z = x + iy$ la función*

$$f(x,y) = 2x + iy + \frac{x - iy}{x^2 + y^2}$$

Solución: Sabiendo que

$$\begin{aligned} x &= \operatorname{Re}(z) = \frac{z + \overline{z}}{2} \\ y &= \operatorname{Im}(z) = \frac{z - \overline{z}}{2i} \end{aligned}$$

podemos sustituir estos valores en la expresión de $f(z)$, no obstante, en este caso podemos emplear el hecho de que

$$\begin{aligned} z \cdot \overline{z} &= x^2 + y^2 \\ \overline{z} &= x - iy \end{aligned}$$

para poner

$$f(x,y) = f(\operatorname{Re}(z), \operatorname{Im}(z)) = 2\left(\frac{z+\overline{z}}{2}\right) + i\left(\frac{z-\overline{z}}{2i}\right) + \frac{\overline{z}}{z \cdot \overline{z}}$$

de donde

$$\begin{aligned} f(z) &= (z + \overline{z}) + \left(\frac{z}{2} - \frac{\overline{z}}{2}\right) + \frac{\overline{z}}{z \cdot \overline{z}} \\ &= \frac{3z}{2} + \frac{\overline{z}}{2} + \frac{\overline{z}}{z \cdot \overline{z}} \\ &= \frac{3}{2}z + \frac{1}{2}\overline{z} + \frac{1}{z} \end{aligned}$$

Ejercicio 2.1 *Calcula* $\operatorname{Re}(f(z))$ *e* $\operatorname{Im}(f(z))$ *para*

a) $g(z) = \frac{\overline{z}}{z}$ *b)* $h(z) = z + \frac{1}{z}$

c) $k(z) = \frac{z}{z^2+i}$ *d)* $l(z) = \frac{z^3+iz-1+i}{z}$

Ejercicio 2.2 *Expresa la función*

$$f(x,y) = x^2 - y^2 - 2y + i(2x - 2xy)$$

en términos de z.

Observación 2.1 *Al ser* $f(z)$ *en esencia una función de* $\mathbb{R}^2$ *en* $\mathbb{R}^2$*, no es posible obtener una representación gráfica en sentido usual, ya que transformaría conjuntos de* $\mathbb{R}^2$ *en conjuntos de* $\mathbb{R}^2$*, no obstante es posible representar de forma independiente los conjuntos* A *y* $f(A)$*, es por ello que a las funciones complejas de variable compleja también se las llama* transformaciones.

Definición 2.3 *Dada* $f : A \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *una función compleja de variable compleja, diremos que es* unifoliada en $A \Leftrightarrow$

$$\forall z_1, z_2 \in A, z_1 \neq z_2 \Rightarrow f(z_1) \neq f(z_2)$$

en caso contrario $f(z)$ *es de varias hojas o* multifoliada.

Ejemplo 2.6

$$f(z) = z^2 \qquad z \in \operatorname{Im}(z) > 0 \Longrightarrow \text{ Unifoliada}$$

$$f(z) = z^2 \qquad z \in \mathbb{C} \Longrightarrow \text{ Bifoliada}$$

Definición 2.4 *Dada* $f : A \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *una función compleja de variable compleja, diremos que* $f(z)$ *es* multivaluada en $A \Leftrightarrow$ *asigna a un número complejo más de un valor, no es una función en el sentido estricto de la palabra.*

Ejemplo 2.7 *La función*

$$f(z) = \sqrt{z} \qquad z \in \mathbb{C}$$

es una función multivaluada. Sabiendo que si $z = re^{i\theta}$*, entonces*

$$z^{1/2} = \pm\sqrt{r}e^{i(\theta/2)}$$

donde

$$\theta \in \arg(z)$$

2.2. Límites y continuidad

En esta sección se introducen los conceptos de límites y continuidad de funciones complejas de variable compleja y puesto que $\mathbb{C}$ es en esencia $\mathbb{R}^2$, estos conceptos no son muy diferentes de los vistos para funciones de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$.

Definición 2.5 *Dada* $f : A \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *con* $z_0 \in \mathbb{C}$*, diremos que tiene como límite a* $w_0 \in \mathbb{C}$ *cuando* $z \to z_0$ *o también que el límite de* $f(z)$ *cuando* z *tiende a* z_0 *es* w_0 *y lo expresaremos como*

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = w_0$$

si se cumple

$$\forall \varepsilon > 0 \Longrightarrow \exists \delta > 0 : \ |z - z_0| < \delta \Rightarrow \ |f(z) - w_0| < \varepsilon$$

o en términos topológicos mediante el uso de discos abiertos:

$$\forall \varepsilon > 0 \Longrightarrow \exists \delta > 0 : \ z \in B(z_0, \delta) \Rightarrow f(z) \in B(w_0, \varepsilon).$$

Teorema 2.1 *El límite de una función compleja de variable compleja en un punto, si existe, es único.*

Observación 2.2 *La interpretación del límite de una función de variable compleja es idéntico al de una función de variable real, sería el punto del plano al que se .ªcercan"los valores de una función de variable compleja en puntos que se .ªcercan.ªl punto donde queremos calcular el límite, la única diferencia es que mientras que para el caso real ese acercamiento se puede hacer por dos direcciones (izquierda y derecha) en el caso complejo el número de direcciones es infinito.*

Utilizando el concepto de punto del infinito ∞ que se introdujo al final del capítulo anterior, definimos los llamados límites infinitos y límites en el infinito.

Definición 2.6 *Sea $f : A \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, entonces:*

- *Diremos que $f(z)$ tiene límite ∞ cuando z tiende $z_0 \in \mathbb{C}$ si ocurre*

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = \infty \Leftrightarrow \forall M > 0, \exists \delta > 0 : \quad |z - z_0| < \delta \Rightarrow \quad |f(z)| > M \text{ (límite infinito)}$$

- *Diremos que $f(z)$ tiene límite $w_0 \in \mathbb{C}$ cuando z tiende ∞ si ocurre*

$$\lim_{z \to \infty} f(z) = w_0 \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N > 0 : |z| > N \Rightarrow \quad |f(z) - w_0| < \varepsilon.$$

- *Diremos que $f(z)$ tiene límite ∞ cuando z tiende ∞ si ocurre*

$$\lim_{z \to \infty} f(z) = \infty \Leftrightarrow \forall M > 0, \exists N > 0 : |z| > N \Rightarrow \quad |f(z)| > M$$

El resultado más importante sobre límites de funciones complejas de variable compleja es el siguiente, ya que relaciona los límites en $\mathbb{C}$ con los límites de funciones de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$.

Teorema 2.2 *Sea $f : A \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, con $z_0 \in \mathbb{C}^{\#}$. Se cumple:*

$$\exists \lim_{z \to z_0} f(z) = w_0 \in \mathbb{C} \Leftrightarrow \begin{cases} \exists \lim\limits_{z \to z_0} \operatorname{Re}(f(z)) = \operatorname{Re}(w_0) \\ \\ \exists \lim\limits_{z \to z_0} \operatorname{Im}(f(z)) = \operatorname{Im}(w_0) \end{cases}$$

Es decir el límite una función compleja de variable compleja existe siempre que existan los correspondientes límites de las partes real e imaginaria y recíprocamente.

Con el teorema anterior se garantiza que todas las operaciones conocidas para los límites de funciones de dos variables reales se cumplen para los límites de funciones de variable compleja.

Ejemplo 2.8 *Por ejemplo, algunos límites se calculan directamente sustituyendo el valor como en el siguiente:*

$$\lim_{z \to 1} \frac{z}{z+1} = \frac{1}{2}$$

Otras veces nos encontraremos con una indeterminación como en el siguiente límite:

$$\lim_{z \to 0} \frac{\overline{z} + iz^2}{\sqrt{|z|}} = \frac{0}{0}$$

Podemos solventar esta indeterminación si expresamos la función en su parte real e imaginaria, tomando $z = x + iy$

$$\frac{\overline{z} + iz^2}{\sqrt{|z|}} = \frac{(x - iy) + i\,(x + iy)^2}{\sqrt{|x + iy|}} = \frac{(x - iy) + i\left(x - y^2 + i2xy\right)}{\sqrt[4]{x^2 + y^2}} = \frac{x - 2xy}{\sqrt[4]{x^2 + y^2}} + i\frac{x^2 - y^2 - y}{\sqrt[4]{x^2 + y^2}}$$

Si tenemos en cuenta el teorema anterior, si existiera el límite entonces deben existir los de la parte real e imaginaria y se debe cumplir:

$$\lim_{z\to 0} \frac{\overline{z} + iz^2}{\sqrt{|z|}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x - 2xy}{\sqrt[4]{x^2 + y^2}} + i \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 - y^2 - y}{\sqrt[4]{x^2 + y^2}}$$

Los dos límites dobles se resuelven haciendo un cambio a coordenadas polares $(x = r\cos\theta, y = r\operatorname{sen}\theta)$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x - 2xy}{\sqrt[4]{x^2 + y^2}} = \lim_{r\to 0} \frac{r\cos\theta - 2r^2 \operatorname{sen}\theta\cos\theta}{\sqrt[4]{r^2}} = \lim_{r\to 0} \sqrt{r}\,(\cos\theta - r\operatorname{sen}2\theta) = 0$$

$$\lim_{(x,y)\to 0} \frac{x^2 - y^2 - y}{\sqrt[4]{x^2 + y^2}} = \lim_{r\to 0} \frac{r^2\cos^2\theta - r^2\operatorname{sen}^2\theta - r\operatorname{sen}\theta}{\sqrt[4]{r^2}} = \lim_{r\to 0} \sqrt{r}\,(r\cos 2\theta - \operatorname{sen}\theta) = 0$$

de donde:

$$\lim_{z\to 0} \frac{\overline{z} + iz^2}{\sqrt{|z|}} = 0 + i\cdot 0 = 0$$

Ejercicio 1 *Prueba que no existe el siguiente límite*

$$\lim_{z\to 0} \frac{\overline{z} + iz^2}{|z|}$$

Ejercicio 2 *Calcula los siguientes límites:*

a) $\lim\limits_{z\to 2i} \left(2x + iy^2\right)$ *b)* $\lim\limits_{z\to -1} \frac{iz+3}{z+1}$ *c)* $\lim\limits_{z\to 0} \frac{\operatorname{sen} z}{\operatorname{senh}(iz)}$

c) $\lim\limits_{z\to e^{i\pi/3}} \left(z - e^{i\pi/3}\right) \frac{z}{z^3+1}$ $\lim\limits_{z\to\infty} \frac{2z+i}{z+1}$

A partir de la definición de límite se puede desarrollar el concepto de continuidad de una función compleja de variable compleja:

Definición 2.7 *Sea* $f : A \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$*, con* $z_0 \in A$*. Diremos que* $f(z)$ *es* ***continua*** *en* $z_0 \Leftrightarrow$

i) $\exists f(z_0) \in \mathbb{C}$

ii) $\exists \lim\limits_{z\to z_0} f(z) = f(z_0)$

La función $f(z)$ *se dice continua en* $A \Leftrightarrow f(z)$ *es continua en* $\forall z \in A$.

Teniendo en cuenta lo visto antes sobre los límites está claro que se cumple el siguiente resultado:

Teorema 2.3 *Sea $f : A \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, con $z_0 \in \mathbb{C}$. Entonces:*

$$f(z) \text{ es continua en } z_0 \in \mathbb{C} \Leftrightarrow \begin{cases} \exists \lim\limits_{z \to z_0} \operatorname{Re}(f(z)) = \operatorname{Re}(f(z_0)) \Rightarrow u(x,y) \text{ es continua en } (x_0, y_0) \\ \\ \exists \lim\limits_{z \to z_0} \operatorname{Im}(f(z)) = \operatorname{Im}(f(z_0)) \Rightarrow v(x,y) \text{ es continua en } (x_0, y_0) \end{cases}$$

Es decir una función compleja de variable compleja es continua, sí y solo si son continuas en (x_0, y_0) las funciones $u(x,y) = \operatorname{Re}(f(z))$ y $v(x,y) = \operatorname{Im}(f(z))$ como funciones de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}$, siendo $z_0 = x_0 + iy_0$.

Ejemplo 2.9 *Con este resultado podemos comprobar de forma directa la continuidad de las siguientes funciones: $f(z) = z$, $g(z) = \overline{z}$ y $h(z) = z^2$, sin más que calcular sus respectivas partes reales e imaginarias.*

$$f(z) = z \Rightarrow \begin{cases} \operatorname{Re}(f(z)) = x \\ \operatorname{Im}(f(z)) = y \end{cases} \qquad g(z) = \overline{z} \Rightarrow \begin{cases} \operatorname{Re}(g(z)) = x \\ \operatorname{Im}(g(z)) = -y \end{cases} \qquad f(z) = z^2 \Rightarrow \begin{cases} \operatorname{Re}(h(z)) = x^2 - y^2 \\ \operatorname{Im}(h(z)) = 2xy \end{cases}$$

y vemos que todas las funciones reales implicadas son continuas.

El comportamiento de la continuidad respecto a las operaciones básicas con funciones complejas es el mismo que se obtiene para funciones de variable real:

Proposición 2.4 *Si $f, g : A \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ son continuas en $z_0 \in A$ entonces son continuas en z_0 las siguientes funciones:*

1. $(f + g)(z)$ *y* $(f - g)(z)$
2. $(f \cdot g)(z)$
3. $\left(\frac{f}{g}\right)(z)$ *siempre que* $g(z_0) \neq 0$
4. $\overline{f(z)}$
5. $|f(z)|$

Teorema 2.5 ***(Función Compuesta)*** *Sea $f : A \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ y $g : B \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ con $z_0 \in A$ y $w_0 = f(z_0) \in B$. Entonces, si $f(z)$ es continua en z_0 y $g(z)$ es continua en $w_0 \Rightarrow (g \circ f)(z)$ es continua en z_0.*

2.3. Derivación Compleja

La derivabilidad de una función compleja de variable compleja se describe en los mismo términos que la correspondiente a una función real de variable real:

Definición 2.8 *Sea $f : A \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ y $z_0 \in A$, entonces*

$$f(z) \text{ es derivable en } z_0 \Longleftrightarrow \exists \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = f'(z_0) \in \mathbb{C},$$

también se puede expresar

$$f'(z_0) = \frac{df}{dz}(z_0).$$

Si tomamos $h = z - z_0 \in \mathbb{C}$*, entonces*

$$f'(z_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h}.$$

La función $f(z)$ *es* derivable en $A \Leftrightarrow f(z)$ *es derivable en* z, $\forall z \in A$.

Teorema 2.6 *Sea* $f : A \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$*, sea* $z_0 \in A$*, entonces si* $f(z)$ *es* derivable en $z_0 \Rightarrow f(z)$ *es continua en* z_0*.*

Ejemplo 2.10 *Calcula usando la definición, las derivadas de las siguientes funciones:*

a) $f(z) = z$

b) $f(z) = z^2$

c) $f(z) = z^n$

Solución: Tomamos $z_0 \in \mathbb{C}$ un número complejo cualquiera. Para cada caso utilizamos la definición de derivada mediante el cálculo de límite correspondiente:

a) $f(z) = z \quad \Rightarrow \quad \lim_{z \to z_0} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} = \lim_{z \to z_0} \frac{z-z_0}{z-z_0} = \lim_{z \to z_0} 1 = 1$

b) $f(z) = z^2 \quad \Rightarrow \quad \displaystyle\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{z \to z_0} \frac{z^2 - z_0^2}{z - z_0} = \lim_{z \to z_0} \frac{(z - z_0)(z + z_0)}{z - z_0} = \lim_{z \to z_0} (z + z_0) = 2z_0$

c) $f(z) = z^n \quad \Rightarrow \quad \lim_{z \to z_0} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} = \lim_{z \to z_0} \frac{z^n - z_0^n}{z-z_0} = \lim_{z \to z_0} \frac{(z-z_0)\left(z^{n-1}+z^{n-2}z_0+\cdots+zz_0^{n-2}+z_0^{n-1}\right)}{z-z_0}$

$= \lim_{z \to z_0} \left(z^{n-1} + z^{n-2}z_0 + \cdots + zz_0^{n-2} + z_0^{n-1}\right) = \left(z_0^{n-1} + z_0^{n-1} + \cdots + z_0^{n-1}\right) = nz_0^{n-1}$

Con estos ejemplos se ilustra el hecho de que derivar una función $f(z)$ respecto a z equivale a considerar la función como de una sola variable y utilizar los métodos usuales de derivación para este tipo de función, esto será cierto siempre que esta derivada exista. Con esta equivalencia los conceptos de derivadas de orden superior se definen de forma natural:

$$\begin{aligned} f''(z) &= \frac{d}{dz}\left(f'(z)\right) \\ f'''(z) &= \frac{d}{dz}\left(f''(z)\right) \\ &\vdots \\ f^{(n)}(z) &= \frac{d}{dz}\left(f^{(n-1)}(z)\right) \end{aligned}$$

Definición 2.9 *Sea* $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$*,* $f(z)$ *se dice que es una* ***función entera*** *si* $f(z)$ *es derivable* $\forall z \in \mathbb{C}$*.*

Las propiedades que se extraen con esta definición son, como era de esperar, las mismas que para funciones reales de variable real.

Proposición 2.7 *Si* $f, g : A \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *son derivables en* $z_0 \in A$ *entonces son derivables en* z_0 *las siguientes funciones:*

1. $(f+g)(z)$ *y* $(f-g)(z)$, *además*

$$(f \pm g)'(z_0) = f'(z_0) \pm g'(z_0)$$

2. $(f \cdot g)(z)$ *y además*

$$(f+g)'(z_0) = f'(z_0)\, g(z_0) + f(z_0)\, g'(z_0)$$

3. *Si* $g(z_0) \neq 0$ *entonces* $\left(\frac{f}{g}\right)(z)$ *y además*

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(z_0) = \frac{f'(z_0)\, g(z_0) - f(z_0)\, g'(z_0)}{g(z_0)^2}$$

Proposición 2.8 ***(Función compuesta)*** *Sea* $f : A \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *y* $g : B \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *con* $z_0 \in A$ *y* $w_0 = f(z_0) \in B$. *Entonces, si* $f(z)$ *es derivable en* z_0 *y* $g(z)$ *es derivable en* $w_0 \Rightarrow (g \circ f)(z)$ *es derivable en* z_0 *y además*

$$(g \circ f)'(z_0) = g'(w_0)\, f'(z_0) = g'(f(z_0))\, f'(z_0)$$

También podemos emplear las derivadas en el cálculo de límites:

Teorema 2.9 (Regla de L'Hôpital) *Sea* $f, g : A \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *con* $z_0 \in A$. *Si* $f(z)$ *y* $g(z)$ *son derivables en* z_0 *y se cumple* $f(z_0) = g(z_0) = 0$ *con* $g'(z_0) \neq 0$, *entonces*

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \lim_{z \to z_0} \frac{f'(z)}{g'(z)}$$

Y en general si $g(z_0) = g'(z_0) = \cdots = g^{n-1}(z_0) = 0$ *y* $f(z_0) = f'(z_0) = \cdots = f^{n-1}(z_0) = 0$, *con* $g^n(z_0) \neq 0$ *entonces también:*

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{f^n(z_0)}{g^n(z_0)}$$

Observación 2.3 *La regla también es válida si ocurre:*

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = \lim_{z \to z_0} g(z) = \infty$$

Teorema 2.10 ***(Función inversa)*** *Sea* $f : A \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *holomorfa en* A. *Sea* $z_0 \in A$, *y supongamos que* $f'(z_0) \neq 0 \Rightarrow$ *Existe* $\mathcal{U}_{z_0}$ *entorno de* z_0, *y* $\mathcal{V}_{w_0}$ *entorno de* $w_0 = f(z_0)$ *tal que la aplicación*

$$f : U \to V$$

es biyectiva y

$$f^{-1} : V \to U$$

es analítica en w_0, *además*

$$\frac{df^{-1}}{dz}(w_0) = \left(f^{-1}\right)'(w_0) = \frac{1}{f'(z_0)} = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(w_0)\right)}$$

Ejemplo 2.11 *Por lo visto en los ejemplos anteriores, está claro que un polinomio de grado* n, $P_n(z)$, *es una función derivable, ya que está construida por sumas y productos de funciones que son derivables, de hecho un polinomio de grado* n *es una función entera, ya que es derivable en cualquier* $z \in \mathbb{C}$:

$$P_n(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0 \Rightarrow P_n'(z) = a_n n z^{n-1} + a_{n-1}(n-1) z^{n-2} + \cdots + a_1.$$

Ecuaciones de Cauchy-Riemann

En la sección anterior se ha comprobado que desde el punto de vista formal la derivada de una función compleja de variable compleja que sea derivable sigue las mismas reglas que la correspondiente derivada de una función real de variable real, lo único que debemos hacer es cambiar la variable utilizada. Se podría pensar que, tal y como ocurre con el caso de la continuidad, el hecho de que las funciones real e imaginaria de una función compleja sean derivables conducirá al hecho de que la función compleja es derivable, sin embargo, esto no sucede así y lo comprobamos con un ejemplo. Consideremos la función

$$f(z) = \overline{z},$$

es decir

$$f(x+iy) = x - iy,$$

de donde

$$u(x,y) = x,$$
$$v(x,y) = -y.$$

Claramente, tanto u como v son funciones derivables respecto de sus dos variables

$$u_x = 1 \qquad u_y = 0$$

$$v_x = 0 \qquad v_y = -1$$

así que podríamos pensar que la función de conjugación $f(z) = \overline{z}$, debería ser derivable. Sin embargo, si quisiéramos encontrar la derivada de $f(z)$ en $z_0 = x_0 + iy_0$ mediante la definición, tendríamos

$$\lim_{z\to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{(x-iy)-(x_0-iy_0)}{(x+iy)-(x_0+iy_0)} = \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{(x-x_0)+i(y_0-y)}{(x-x_0)+i(y-y_0)},$$

si este límite existiese, los límites iterados deberían existir y ser iguales:

$$\lim_{x\to x_0} \lim_{y\to ,y_0} \frac{(x-x_0)+i(y_0-y)}{(x-x_0)+i(y-y_0)} = \lim_{y\to ,y_0} \lim_{x\to x_0} \frac{(x-x_0)+i(y_0-y)}{(x-x_0)+i(y-y_0)},$$

sin embargo, por una parte el límite de la izquierda es

$$\lim_{x\to x_0} \lim_{y\to ,y_0} \frac{(x-x_0)+i(y_0-y)}{(x-x_0)+i(y-y_0)} = \lim_{x\to x_0} \frac{(x-x_0)}{(x-x_0)} = \lim_{x\to x_0} 1 = 1,$$

mientras que el de la derecha

$$\lim_{y\to ,y_0} \lim_{x\to x_0} \frac{(x-x_0)+i(y_0-y)}{(x-x_0)+i(y-y_0)} = \lim_{y\to ,y_0} \frac{i(y_0-y)}{i(y-y_0)} = \lim_{y\to ,y_0} -1 = -1,$$

y se comprueba que la derivabilidad de u y v no garantiza la derivabilidad de $f = u + iv$, como función compleja, además de este requisito, es fundamental que se cumpla uno adicional: las **ecuaciones de Cauchy-Riemann.**

Teorema 2.11 *Si $f : A \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ es derivable en $z_0 \in A$ y si $f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$, entonces las funciones parte real, $u(x,y)$ y parte imaginaria, $v(x,y)$, tienen derivadas parciales continuas en (x_0,y_0) y se cumplen las ecuaciones*

$$\left.\begin{aligned} u_x(x_0,y_0) &= v_y(x_0,y_0) \\ u_y(x_0,y_0) &= -v_x(x_0,y_0) \end{aligned}\right\} \tag{2.1}$$

que son las llamadas ecuaciones de Cauchy-Riemann *en el punto* (x_0, y_0).

La derivada de $f(z)$ *en* z_0 *se obtiene como*

$$f'(z_0) = u_x(x_0, y_0) + iv_x(x_0, y_0) = v_y(x_0, y_0) - iu_y(x_0, y_0).$$

Notar que las ecuaciones de Cauchy-Riemann se pueden reducir a una ecuación compleja ya que

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(u + iv) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y} = i\left(\frac{1}{i}\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) = i\left(-i\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) = -i\left(i\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial y}\right) = -i\frac{\partial f}{\partial y},$$

de forma que

$$\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y} = 0.$$

Ejemplo 2.12 *Encuentra los complejos para los que la función* $f(z) = |z|^2$ *es derivable.*

Solución: Expresamos la función $f(z)$ en términos de x e y

$$f(z) = |z|^2 = x^2 + y^2 = \left(x^2 + y^2\right) + i \cdot 0$$

por tanto

$$\begin{aligned} u(x, y) &= x^2 + y^2 \Rightarrow \begin{cases} u_x = 2x \\ u_y = 2y \end{cases} \\ v(x, y) &= 0 \Rightarrow \begin{cases} v_x = 0 \\ v_y = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

y el sistema dado por 2.1 será

$$\left.\begin{array}{r} u_x = v_y \Leftrightarrow 2x = 0 \\ u_y = -v_x \Leftrightarrow 2y = 0 \end{array}\right\}$$

cuya única solución es el punto $(0, 0)$ y por tanto es el único punto donde la función $f(z) = |z|^2$ será derivable, el valor de la derivada en ese punto será

$$f'(0 + i \cdot 0) = u_x(0, 0) + iv_x(0, 0) = 2 \cdot 0 + i \cdot 0 = 0$$

Para que el recíproco del teorema sea cierto se deben cumplir ciertas hipótesis sobre u y v:

Proposición 2.12 *Sea* $f : A \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *con* $f = u + iv$ *y sea* $z_0 = x_0 + iy_0 \in A$. *Si existen las derivadas* u_x, u_y, v_x, v_y, *son continuas en el punto* (x_0, y_0) *y se cumplen las ecuaciones de Cauchy-Riemann (2.1) en ese punto; entonces* $f(z)$ *es derivable en* $z_0 = x_0 + iy_0$.

Holomorfía: ceros y singularidades

Un concepto más fuerte que la derivabilidad en un punto es el concepto de holomorfía ya que además de exigir que la función sea derivable en ese punto, también lo debe ser en un cierto conjunto que contenga a ese punto.

Definición 2.10 *Sea $f : A \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ con $z_0 \in A$. Diremos $f(z)$ es* holomorfa *en z_0 o que $f(z) \in \mathcal{H}(z_0)$, si y sólo si existe un $r > 0$, tal que $f(z)$ es derivable en todos los puntos del conjunto $B(z_0, r)$.*

La función $f(z)$ será holomorfa *en A si lo es en cada uno de sus punto y se indica como*

$$f(z) \in \mathcal{H}(A).$$

Por ejemplo, se ha visto que la función $|z|^2$ es derivable en el punto $z_0 = 0$, pero no será holomorfa en ese punto, puesto que la función no es derivable en ningún otro punto más.

Definición 2.11 ***(Ceros de una función)*** *Sea $f(z) \in \mathcal{H}(B(z_0, r))$, con $z_0 \in \mathbb{C}$,*

$$z_0 \text{ es un cero o raíz de orden } k \in \mathbb{N} \text{ de } f(z) \Leftrightarrow \begin{cases} f(z_0) = f'(z_0) = \cdots = f^{(k-1)}(z_0) = 0 \\ f^{(k)}(z_0) \neq 0 \end{cases}$$

Proposición 2.13 *Sea $z_0 \in \mathbb{C}$, $r > 0$ y $f(z) \in \mathcal{H}(B(z_0, r))$*

$$z_0 \text{ es un cero o raíz de orden } k \in \mathbb{N} \text{ de } f(z) \Leftrightarrow \begin{cases} f(z) = (z - z_0)^k g(z) \\ g(z_0) \neq 0 \\ g(z) \in \mathcal{H}(B(z_0, r)). \end{cases}$$

Definición 2.12 *Sea $f : A \to \mathbb{C}$, $z_0 \in A$. Diremos que z_0 es una* singularidad de $f(z)$*, si:*

1) $f(z)$ no es derivable en z_0

2) $\forall r > 0 \Longrightarrow \exists z_1 \in B(z_0, r) : f(z)$ es derivable en z_1.

La definición implica que $f(z)$ es no derivable en z_0, pero es derivable en algún punto dentro de cualquier bola que contenga a z_0, es decir, cerca de z_0 siempre hay puntos donde $f(z)$ sí que es derivable.

Ejemplo 2.13 *Hemos visto que la función $f(z) = |z|^2$ es derivable en $z_0 = 0$, pero no holomorfa, en el resto de puntos, donde la función no es derivable, no hay ninguna singularidad.*

Ejemplo 2.14 *Dada la función $f(z) = x^2 + iy^2$, vamos a ver los puntos en los que es derivable. Utilizamos las ecuaciones de Cauchy-Riemann con $u = x^2$ y $v = y^2$*

$$\left.\begin{array}{r} u_x = 2x \\ u_y = 0 \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{r} v_x = 0 \\ v_y = 2y \end{array}\right\}$$

El sistema formado por las ecuaciones de Cauchy-Riemann es

$$\begin{cases} u_x = v_y \Rightarrow 2x = 2y \Rightarrow x = y \\ u_y = -v_x \Rightarrow 0 = 0 \end{cases}$$

que tiene por solución a todos los puntos de la forma (x, x), luego la función $f(z)$ es derivable en todos los puntos de la forma $z = x + ix$. En ninguno de esos puntos la función es holomorfa y no hay ninguna singularidad.

Definición 2.13 *Sea* $f : A \to \mathbb{C}$, $z_0 \in A$. *Diremos que* z_0 *es una* singularidad aislada de $f(z)$, *si:*

$$1)\quad f(z) \text{ no es derivable en } z_0$$

$$2)\quad \exists r > 0 \Longrightarrow f(z) \in \mathcal{H}(B^*(z_0, r)).$$

En este caso, la definición implica que $f(z)$ *es no derivable en* z_0*, pero es derivable en todos los puntos dentro de una bola reducida que contiene a* z_0.

Definición 2.14 *Sea* $z_0 \in \mathbb{C}$ *una singularidad aislada de* $f(z)$*, es decir,* $f(z) \in \mathcal{H}(B^*(z_0, r))$ *para algún* $r > 0$*, entonces se dice:*

1. z_0 *es una* singularidad evitable $\Leftrightarrow \exists \lim\limits_{z\to z_0} f(z) \Leftrightarrow \exists \lim_{z\to z_0}(z - z_0) f(z) = 0$, *en este caso la función* $\widetilde{f}(z)$ *definida por*

$$\widetilde{f}(z) = \begin{cases} f(z) & z \in \mathcal{H}(B^*(z_0, \delta)) \\ \lim_{z\to z_0} f(z) & z = z_0 \end{cases}$$

   es derivable en z_0.

2. z_0 *es una* singularidad tipo polo $\Leftrightarrow \lim\limits_{z\to z_0} f(z) = \infty$

3. z_0 *es una* singularidad esencial $\Leftrightarrow \nexists \lim\limits_{z\to z_0} f(z)$.

Definición 2.15 *Sea* z_0 *una singularidad aislada tipo polo de* $f(z)$*, entonces:*

$$z_0 \text{ es de orden } k \in \mathbb{N} \Leftrightarrow \exists \lim_{z\to z_0} (z - z_0)^k f(z) \neq 0$$

Además

$$\text{Si } m < k \Rightarrow \lim_{z\to z_0} (z - z_0)^m f(z) = \infty$$

$$\text{Si } m > k \Rightarrow \lim_{z\to z_0} (z - z_0)^m f(z) = 0$$

Proposición 2.14 *Sea* $f(z) \in \mathcal{H}(B^*(z_0, r))$*, con* z_0 *una singularidad aislada de* $f(z)$*, entonces se cumple:*

$$z_0 \text{ es un polo de orden } k \in \mathbb{N} \Leftrightarrow f(z) = \frac{g(z)}{(z - z_0)^k} \text{ y } g(z) \in \mathcal{H}(B(z_0, r)) \text{ siendo } g(z_0) \neq 0.$$

Proposición 2.15 *Sea* $f(z) \in \mathcal{H}(B(z_0, r))$*, entonces se cumple:*

$$z_0 \text{ es un cero de orden } k \text{ de } f(z) \Leftrightarrow z_0 \text{ es un polo de orden } k \text{ de } g(z) = \frac{1}{f(z)}.$$

Proposición 2.16 *Si* $f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$ *siendo* $p(z)$ *y* $q(z)$ *dos funciones holomorfas en* $z_0 \in \mathbb{C}$*, con* $p(z_0) \neq 0 \Rightarrow$

$$f(z) = \frac{p(z)}{q(z)} \text{ tiene un polo de orden } m \Leftrightarrow q(z) \text{ tiene un cero de orden } m \text{ en } z_0$$

Proposición 2.17 *Si $f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$ siendo $p(z)$ y $q(z)$ dos funciones holomorfas en $z_0 \in \mathbb{C}$, si z_0 es un cero de orden n de $p(z)$ y un cero de orden m de $q(z)$, entonces*

1. *Si $n < m \Rightarrow z_0$ es un polo de orden $m - n$ de $f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$.*

2. *Si $n > m \Rightarrow z_0$ es un cero de orden $n - m$ de $f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$.*

3. *Si $n = m \Rightarrow z_0$ es una singularidad evitable de $f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$.*

Singularidades en el punto del infinito

Consideremos el punto del infinito ∞, nos preguntamos si este punto puede ser visto como una singularidad aislada para una determinada función $f(z)$ .Para estudiar este hecho se estudia la función $g(z) = f\left(\frac{1}{z}\right)$ en el punto 0.

Definición 2.16 *Diremos que una función $f(z)$ es continua en el punto del infinito $\infty \Leftrightarrow$ La función $g(z) = f\left(\frac{1}{z}\right)$ es continua en el punto 0.*

Con esta definición el punto del infinito, ∞, puede ser una singularidad evitable, polo de orden k o singularidad esencial, según el punto 0 sea una singularidad evitable, polo de orden k o singularidad esencial de $g(z) = f\left(\frac{1}{z}\right)$ respectivamente.

2.4. Funciones Elementales

Polinomios complejos

Como resultado adicional a los introducidos previamente para los polinomios complejos de grado n, $P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$, se incluye aquí el llamado Teorema Fundamental del Álgebra:

Teorema 2.18 (Fundamental del Álgebra) *Sea $P_n(z)$ polinomio complejo de grado $n \Rightarrow \exists z_1, \ldots, z_n \in \mathbb{C}$ tales que $P(z_k) = 0$, para $k = 1, \ldots, n$.*

Es decir un polinomio complejo de grado n tiene n ceros complejos, no necesariamente distintos. El polinomio $P(z)$ puede factorizarse como:

$$P_n(z) = a_n (z - z_1)(z - z_1) \cdots (z - z_n)$$

Y si se tiene en cuenta la multiplicidad de las raíces la factorización será de la forma

$$P_n(z) = a_n (z - z_1)^{m_1} (z - z_2)^{m_2} \cdots (z - z_k)^{m_k}$$

siendo $\{z_1, \ldots, z_k\}$ las raíces distintas de $P_n(z)$ y $m_1, \ldots, m_k$ sus correspondientes multiplicidades.

En el caso de que $a_k \in \mathbb{R}$, $k = 0, \ldots, n$, es decir $P(z)$ es un polinomio con coeficientes reales, entonces se puede comprobar que si z_k es un cero de $P_n(z)$, entonces su conjugado $\overline{z_k}$ también lo será.

Funciones racionales complejas

Una función racional compleja es un cociente entre dos polinomios, es decir, si $P(z)$ y $Q(z)$ son dos polinomios complejos de grados $\deg(P) = n$ y $\deg(Q) = m$ respectivamente, entonces se define la función racional compleja $R(z)$ como:

$$R(z) = \frac{P(z)}{Q(z)} = \frac{a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0}{b_m z^m + b_{m-1} z^{m-1} + \cdots + b_1 z + b_0} \quad a_k, b_k \in \mathbb{C}$$

que estará definida y será y continua y derivable en para todos los complejos $z \in \mathbb{C}$ salvo para los ceros del polinomio del denominador $Q(z)$.

Conocemos por el teorema fundamental del álgebra que, salvo multiplicidades, existen m valores z_k tales de $Q(z_k) = 0$, por tanto

$$R(z) \in \mathcal{H}(\mathbb{C} - \{z_1, \ldots, z_m\}).$$

Supongamos ahora que $\deg(P) < \deg(Q)$, en caso contrario podemos hacer la división euclidea entre polinomios

$$P(z) = C(z) Q(z) + R(z) \qquad \text{con } \deg(R) < \deg(P),$$

es posible expresar cualquier la función racional $R(z) = P(z)/Q(z)$ como suma de fracciones simples de la forma

$$\frac{A_{k,m_k}}{(z - z_k)^{m_k}}$$

donde z_k es una de las raíces del denominador, m_k su multiplicidad y $A_{k,m_k} \in \mathbb{C}$. Si $b_m = 1$, la descomposición efectiva sería de la forma:

$$R(z) = \frac{P(z)}{Q(z)} = \frac{A_{1,1}}{(z - z_1)} + \frac{A_{1,2}}{(z - z_1)^2} + \ldots \frac{A_{1,m_1}}{(z - z_1)^{m_1}} + \ldots + \frac{A_{k,1}}{(z - z_k)} + \frac{A_{k,2}}{(z - z_k)^2} + \ldots \frac{A_{k,m_k}}{(z - z_k)^{m_k}}$$

para ciertos valores de $A_{i,j} \in \mathbb{C}$. Para el caso en que $b_m \neq 1$, dividimos numerador y denominador por b_m

$$\begin{aligned} R(z) &= \frac{P(z)}{Q(z)} = \frac{a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0}{b_m z^m + b_{m-1} z^{m-1} + \cdots + b_1 z + b_0} \\ &= \frac{\frac{a_n}{b_m} z^n + \frac{a_{n-1}}{b_m} z^{n-1} + \cdots + \frac{a_1}{b_m} z + \frac{a_0}{b_m}}{\frac{b_m}{b_m} z^m + \frac{b_{m-1}}{b_m} z^{m-1} + \cdots + \frac{b_1}{b_m} z + \frac{b_0}{b_m}} \\ &= \frac{\widehat{a}_n z^n + \widehat{a}_{n-1} z^{n-1} + \cdots + \widehat{a}_1 z + \widehat{a}_0}{z^m + \widehat{b}_{m-1} z^{m-1} + \cdots + \widehat{b}_1 z + \widehat{b}_0}. \end{aligned}$$

Ejemplo 2.15 *Encuentra la descomposición en fracciones simples de*

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{z + i}{(z + 1)(z^2 + 1)} \\ g(z) &= \frac{z - 1}{(z + 1)^2 (z - 2)} \end{aligned}$$

Función exponencial compleja

Definimos la función exponencial compleja como

$$e^z = e^{x+iy} = e^x \cos y + ie^x \operatorname{sen} y$$

Comprobaremos que e^z definido de esta forma es una función entera. Derivando cada función respecto de las dos variables:

$$u(x,y) = e^x \cos y \Rightarrow \begin{cases} u_x(x,y) = e^x \cos y \\ \\ u_y(x,y) = -e^x \operatorname{sen} y \end{cases},$$

$$v(x,y) = e^x \operatorname{sen} y \Rightarrow \begin{cases} v_x(x,y) = e^x \operatorname{sen} y \\ \\ v_y(x,y) = e^x \cos y \end{cases},$$

y se cumplen las ecuaciones de Cauchy-Riemman en todos los puntos:

$$\begin{aligned} u_x &= v_y, \\ \\ y_y &= -v_x. \end{aligned}$$

Como además estas derivadas parciales son continuas en todos los puntos (x,y), la función e^z es entera y su derivada es

$$(e^z)' = u_x(x,y) + iv_x(x,y) = e^x \cos y + ie^x \operatorname{sen} y = e^z,$$

manteniendo la propiedad que tenía la exponencial real de tener por derivada a ella misma, además si evaluamos e^z en los reales $x = x + i \cdot 0$

$$e^{(x+i\cdot 0)} = e^x \cos 0 + ie^x \operatorname{sen} 0 = e^x,$$

es decir coincide con el valor de la exponencial real.

Si ahora tomamos un número imaginario puro, es decir $\operatorname{Re}(z) = 0$, $z = iy$. se obtiene la famosa fórmula de Euler:

$$e^z = e^{0+iy} = e^{iy} = \cos y + i \operatorname{sen} y$$

Esta definición es la esperada, ya que si tenemos en cuenta que $z = x + iy$ y se utilizan las propiedades de la exponencial real:

$$e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x (\cos y + i \operatorname{sen} y) = e^x \cos y + ie^x \operatorname{sen} y.$$

Proposición 2.19 *La función exponencial compleja e^z cumple las siguientes propiedades:*

a) $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C} \Rightarrow e^{z_1+z_2} = e^{z_1} e^{z_2}$ *y* $\frac{e^{z_1}}{e^{z_2}} = e^{z_1-z_2}$

b) $e^z \neq 0 \quad \forall z \in \mathbb{C}$

c) $|e^z| = e^{\operatorname{Re}(z)} = e^x$

d) $e^{i\theta} = \cos\theta + i \operatorname{sen}\theta$ *(Fórmula de Euler)*

e) $\left|e^{i\theta}\right| = 1$

e) e^z *es periódica de periodo* $2\pi i$*, es decir,* $e^z = e^{z+2\pi i}$

Observación 2.4 *Utilizando la fórmula de Euler obtenemos las famosas relaciones de Euler que contienen algunos de los números más característicos de las matemáticas:*

$$\begin{aligned} e^{i\pi}+1 &= 0 \\ e^{i2\pi}-1 &= 0 \end{aligned}$$

Funciónes trigonométricas complejas

Se utiliza la exponencial compleja, e^z, para definir otro tipo de funciones complejas, entre ellas las trigonométricas:

Definición 2.17 *Definimos*

a) Seno Trigonométrico Complejo: $\operatorname{sen}(z)=\dfrac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}$

b) Coseno Trigonométrico Complejo: $\cos(z)=\dfrac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}$

Proposición 2.20 *Las funciones trigonométricas complejas cumplen las siguientes propiedades*

1. $\operatorname{sen}(z), \cos(z) \in \mathcal{C}(\mathbb{C})$

2. $\operatorname{sen}(z), \cos(z) \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$, *es decir, son funciones enteras. Además*

$$\begin{aligned} [\operatorname{sen} z]' &= \cos z \\ [\cos z]' &= -\operatorname{sen} z \end{aligned}$$

3. *Relación trigonométrica fundamental*

$$\operatorname{sen}^2 z+\cos^2 z=1$$

4. *Paridad*

   a) El seno es impar: $\operatorname{sen}(-z)=-\operatorname{sen} z$

   b) El coseno es par: $\cos(-z)=\cos z$

5. *Los ceros de* $\operatorname{sen}(z)$ *y* $\cos(z)$ *son números reales*

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}(z) &= 0 \Leftrightarrow z=k\pi \qquad k\in\mathbb{Z} \\ \cos(z) &= 0 \Leftrightarrow z=(2k+1)\frac{\pi}{2} \qquad k\in\mathbb{Z} \end{aligned}$$

6. $\operatorname{sen} z$ *y* $\cos z$ *son funciones periódicas de periodo* 2π.

7. *No están acotados en módulo. A diferencia de las funciones* $\operatorname{sen}(x)$ *y* $\cos(x)$ *que están acotadas por* 1, *cuando el argumento empleado,* x, *es un número real. Las funciones complejas no lo están.*

Definición 2.18 *A partir de las funciones trigonométricas complejas, podemos definir las funciones tangente, cotangente, secante y cosecante:*

a) Tangente Trigonométrica Compleja: $\tan z = \dfrac{\operatorname{sen} z}{\cos z}$

b) Cotangente Trigonométrica Compleja: $\cot z = \dfrac{\cos z}{\operatorname{sen} z}$

c) Secante Trigonométrica Compleja: $\sec z = \frac{1}{\cos z}$

d) Cosecante Trigonométrica Compleja: $\csc z = \frac{1}{\operatorname{sen} z}$

Estas funciones serán derivables en todos los puntos de $\mathbb{C}$, salvo para aquellos que anulan el denominador y que vienen dados por la propiedad 5.

Funciónes hiperbólicas complejas

De forma similiar a las funciones trigonométricas complejas, se definen las funciones hiperbólicas:

Definición 2.19 *Definimos*

a) Seno Hiperbólico Complejo: $\operatorname{senh}(z) = \dfrac{e^z - e^{-z}}{2}$

b) Coseno Hiperbólico Complejo: $\cosh(z) = \dfrac{e^z + e^{-z}}{2}$

Proposición 2.21 *Las funciones trigonométricas complejas cumplen las siguientes propiedades*

1. $\operatorname{senh}(z), \cosh(z) \in \mathcal{C}(\mathbb{C})$

2. $\operatorname{senh}(z), \cosh(z) \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$, *es decir, son funciones enteras. Además*

$$\begin{aligned} [\operatorname{senh} z]' &= \cosh z \\ [\cosh z]' &= \operatorname{senh} z \end{aligned}$$

3. *Relación hiperbólica fundamental*

$$\cosh^2 z - \operatorname{senh}^2 z = 1$$

4. *Paridad*

   a) El seno hiperbólico es impar: $\operatorname{senh}(-z) = -\operatorname{senh} z$

   b) El coseno hiperbólico es par: $\cosh(-z) = \cosh z$

5. *No están acotados en módulo.*

$$|\operatorname{senh} 2| = \left|\frac{e^2 - e^{-2}}{2}\right| = \frac{e^2 - e^{-2}}{2} \simeq 3.62686\,041 > 3$$

6. *Relación con las funciones trigonométricas*

$$\begin{aligned} \operatorname{senh}(iz) &= i \operatorname{sen} z \\ \cosh(iz) &= \cos z \end{aligned}$$

7. *Son funciones periódicas de periodo* $2\pi i$.

8. *Los ceros de* $\operatorname{senh}(z)$ *y* $\cosh(z)$ *son números imaginarios puros*

$$\begin{aligned} \operatorname{senh}(z) &= 0 \Leftrightarrow z = k\pi i \qquad k \in \mathbb{Z} \\ \cos(z) &= 0 \Leftrightarrow z = (2k+1)\frac{\pi}{2} i \qquad k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Definición 2.20 *Como antes, a partir de las funciones hiperbólicas, podemos definir las funciones tangente y cotangente hiperbólicas:*

a) *Tangente Hiperbólica Compleja:* $\tanh z = \dfrac{\operatorname{sen} z}{\cos z}$

b) *Cotangente Hiperbólica Compleja:* $\coth z = \dfrac{\cos z}{\operatorname{sen} z}$

Estas funciones serán derivables en todos los puntos de $\mathbb{C}$, *salvo para aquellos que anulan el denominador y que vienen dados por la propiedad 8.*

Función logaritmo complejo

Vamos a definir y estudiar la función inversa de la exponencial compleja: el logaritmo complejo. Recordemos que para el caso real, la función

$$f(x) = e^x$$

es una biyección entre $\mathbb{R}$ y $(0, \infty)$ cuya inversa es el logaritmo natural real:

$$f^{-1}(x) = \ln x$$

de forma que

$$e^{\ln(x)} = id(x) = x$$

Sin embargo en $\mathbb{C}$, la exponencial no es inyectiva ya que es periódica de periodo $2\pi i$, de hecho

$$e^{z_1} = e^{z_2} \Leftrightarrow e^{z_1 - z_z} = 1 \Leftrightarrow z_1 - z_2 = 2k\pi i$$

con $k \in \mathbb{Z}$, luego la definición de una función inversa "no es única".

Definición 2.21 *Dado* $z \in \mathbb{C} - \{0\}$ *se llama* conjunto de los logaritmos *o* logaritmo de z *al conjunto definido por*

$$\log z = \{w \in \mathbb{C} : e^w = z\}$$

Por la periodicidad de e^z está claro que si $w \in \log z$, entonces también $w + 2k\pi i \in \log z$ para cualquier valor de $k \in \mathbb{Z}$, luego podemos describir el conjunto de los logaritmos como

$$\log(z) = \{w + 2k\pi i \in \mathbb{C} : e^w = z \text{ y } k \in \mathbb{Z}\}$$

Por definición de e^w tendremos:

$$e^w = e^{\mathrm{Re}(w)+i\,\mathrm{Im}(w)} = e^{\mathrm{Re}(w)}\left(\cos \mathrm{Im}\, w + i \operatorname{sen} \mathrm{Im}\, w\right) = z$$

Como los complejos e^w y $|z|$ son iguales, los módulos deben coincidir

$$|e^w| = |z| \Leftrightarrow e^{\mathrm{Re}(w)} = |z|,$$

y como ahora ambos son números reales positivos se pueden tomar logaritmos naturales

$$\ln e^{\mathrm{Re}(w)} = \mathrm{Re}(w) = \ln |z|.$$

Como además:

$$z = |z|\, e^{i\theta} \text{ con } \theta \in \arg(z)$$

entonces debe ocurrir

$$\mathrm{Im}(w) \in \arg(z)$$

y por tanto

$$\mathrm{Im}(w) = \theta + 2k\pi$$

para algún $k \in \mathbb{Z}$. Se obtiene así la expresión para los miembros de la familia de los logaritmos complejos de un número complejo $z \neq 0$

$$\log z = \ln |z| + i \arg(z) = \ln |z| + i(\theta + 2k\pi)$$

Ejemplo 2.16 *Calcula* $\log(i)$, $\log(1+i)$

Solución: Expresamos los complejos en forma polar y aplicamos la definición anterior

$$\begin{aligned} i &= 1e^{i\pi/2} \Rightarrow \log(i) = \ln 1 + i\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) = i\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) \\ 1+i &= \sqrt{2}e^{i\pi/4} \Rightarrow \log(1+i) = \ln\sqrt{2} + i\left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right) = \frac{1}{2}\ln 2 + i\left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right) \end{aligned}$$

La función $\log(z)$ es multivaluada, cada complejo distinto de cero tiene una cantidad infinita de logaritmos; para construir una función univaluada tendremos que elegir uno sólo de los argumentos de z, por ejemplo, podríamos tomar el argumento principal y definir una función logaritmo como

$$f(z) = \ln |z| + i \operatorname{Arg}(z).$$

Como $f(z)$ es una suma de dos funciones $\ln |z|$ y $\operatorname{Arg}(z)$, podemos establecer continuidad y/o derivabilidad en términos de estas.

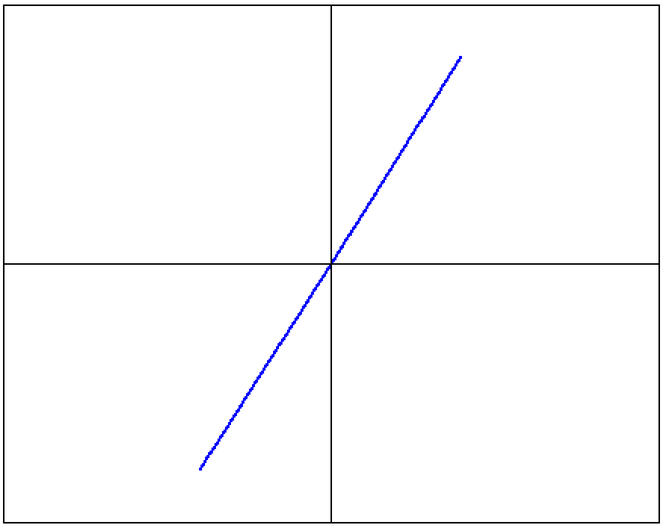
Sabemos que $\ln |z|$ es continua en su dominio, así que solamente queda por ver qué ocurre con $\operatorname{Arg}(z)$. Sin embargo, podemos ver gráficamente que no hay continuidad en aquellos complejos situados en el eje real negativo, ya que si tomamos una sucesión en el segundo cuadrante sus argumentos convergen a π, mientras que si la sucesión está en el tercer cuadrante sus argumentos convergerán a $-\pi$. Si quitamos estos números entonces habrá continuidad.

Para definir el logaritmo como inversa de e^z, tenemos que reducir el cálculo de $\log z$ a tomar argumentos en un intervalo de longitud 2π pero sin incluir los extremos, generalmente $(-\pi, \pi)$ o $(0, 2\pi)$.

Definición 2.22 *Dado $\theta \in \mathbb{R}$, definimos el* rayo o rama *de centro* 0 *y dirección θ al conjunto definido como*

$$H_\theta = \left\{-re^{i\theta} : r \geq 0\right\} = \left\{re^{i(\theta+\pi)} : r \geq 0\right\}$$

gráficamente:



Definición 2.23 $\forall D \subseteq \mathbb{C} - \{0\}$, *definimos una* Determinación o Rama Continua del Logaritmo (D.C.L.) *a toda función*

$$f : D \longrightarrow \mathbb{C}$$

tal que: $f(z)$ es continua en D y $f(z) \in \log(z)$ $\forall z \in D$.

Como $f(z) \in \log(z)$, la función debe ser de la forma

$$f(z) = \ln|z| + iA(z)$$

de donde

$$A(z) \in \arg(z)$$

es llamada *Determinación Continua del Argumento (D.C.A.)* y es una función que asigna de forma continua números complejos a sus argumentos, evitando el problema que ha aparecido antes.

Teorema 2.22 $\forall \theta \in \mathbb{R}$, *podemos definir la rama del logaritmo*

$$f(z) = L_\theta(z) : \mathbb{C} - H_\theta \longrightarrow \mathbb{R}$$

de forma que se cumple:

1. $f(z) \in \mathcal{C}(\mathbb{C} - H_\theta)$
2. $f(z) \in \log(z) = \ln|z| + i \arg z$
3. $f(z) = \ln|z| + iA_\theta(z)$

4. $A_\theta(z) \in (\theta - \pi, \theta + \pi)$

5. $f(z) \in \mathcal{H}(\mathbb{C} - H_\theta)$ *y* $f'(z) = \frac{1}{z}$

Ejemplo 2.17 *Calcula* $L_0(i)$, $L_\pi(-1), L_0(-1)$

Solución: Para el cálculo de $L_0(i)$ tenemos en cuenta que $\theta = 0$, y por tanto los argumentos deben elegirse en $(-\pi, \pi)$

$$\arg(i) \cap (-\pi, \pi) = \left\{ i\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)\right\} \cap (-\pi, \pi) = \frac{\pi}{2}$$

luego

$$L_0(i) = \ln|i| + i\frac{\pi}{2} = i\frac{\pi}{2}.$$

Para el cálculo de $L_\pi(-1)$ tenemos en cuenta que $\theta = \pi$, y por tanto los argumentos deben elegirse en $(0, 2\pi)$

$$\arg(-1) \cap (0, 2\pi) = \{i(\pi + 2k\pi)\} \cap (0, 2\pi) = \pi$$

luego

$$L_\pi(-1) = \ln|-1| + i\pi = i\pi.$$

Para el cálculo de $L_0(-1)$ tenemos en cuenta que $\theta = 0$, y por tanto los argumentos deben elegirse en $(-\pi, \pi)$

$$\arg(-1) \cap (0, 2\pi) = \{i(\pi + 2k\pi)\} \cap (-\pi, \pi) = \emptyset$$

luego $L_0(-1)$ no existe, notar que en este caso $-1 \in H_0$, que es justo el conjunto excluido para $L_0(z)$.

2.5. Funciones Armónicas

Definición 2.24 *Dada una función* $\phi(x, y) : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, *con* D *un dominio y* $\phi(x, y) \in \mathcal{C}^2(D)$, *diremos que* $\phi(x, y)$ *es armónica en* $D \Leftrightarrow$ *Se cumple la ecuación*

$$\nabla\phi = \phi_{xx} + \phi_{yy} = 0 \qquad \forall (x, y) \in D \quad \text{(Ecuación de Laplace)}$$

El operador ∇ *es el llamado operador Laplaciano.*

Observación 2.5 *Se ha utilizado la notación simplificada para las derivadas parciales de* ϕ, *es decir,*

$$\phi_{xx} = \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}$$

$$\phi_{yy} = \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}$$

Ejemplo 2.18 *Discute si son o no armónicas las siguientes funciones:*

$$a)\ u(x, y) = x^2 - y^2 \quad b)\ v(x, y) = e^x \cos y \quad c)\ w(x, y) = x^2 + y^2$$

Solución: Podemos comprobar que todas las funciones del ejercicio son de clase $\mathcal{C}^2\left(\mathbb{R}^2\right)$. Comprobaremos si son o no son armónicas

$$u\left(x,y\right) = x^2 - y^2 \Rightarrow \begin{cases} u_x = 2x & \Rightarrow & u_{xx} = 2 \\ & & \\ u_y = -2y & \Rightarrow & u_{yy} = -2 \end{cases} \Rightarrow u_{xx} + u_{yy} = 0 \Rightarrow u \text{ es armónica}$$

$$v\left(x,y\right) = e^x \cos y \Rightarrow \begin{cases} v_x = e^x \cos y & \Rightarrow & v_{xx} = e^x \cos y \\ & & \\ v_y = -e^x \operatorname{sen} y & \Rightarrow & v_{yy} = -e^x \cos y \end{cases} \Rightarrow v_{xx} + v_{yy} = 0 \Rightarrow v \text{ es armónica}$$

$$w\left(x,y\right) = x^2 + y^2 \Rightarrow \begin{cases} u_x = 2x & \Rightarrow & u_{xx} = 2 \\ & & \\ u_y = 2y & \Rightarrow & u_{yy} = 2 \end{cases} \Rightarrow u_{xx} + u_{yy} = 4 \neq 0 \Rightarrow w \text{ no es armónica}$$

Teorema 2.23 *Sea $z_0 \in \mathbb{C}$, $r > 0$ y sea $f : B\left(z_0, r\right) \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ con $f\left(z\right) = u + iv$ y $u, v \in \mathcal{C}^2\left(B\left(z_0, r\right)\right)$. Entonces*

$$f\left(z\right) \in \mathcal{H}\left(D\right) \Rightarrow u, v \textit{ son armónicas en } B\left(z_0, r\right)$$

Demostración: Como $f\left(z\right)$ es holomorfa en $B\left(z_0, r\right) \Rightarrow u, v$ son derivables y se cumplen las ecuaciones de Cauchy-Riemann

$$\begin{aligned} u_x &= v_y \\ u_y &= -v_x \end{aligned}$$

Como por el enunciado u, v tienen derivadas parciales de orden 2, podemos derivar los dos miembros de las ecuaciones anteriores. Si derivamos la primera respecto de x y la segunda respecto de y, obtendremos

$$\begin{aligned} u_{xx} &= v_{yx} \\ u_{yy} &= -v_{xy} \end{aligned}$$

si sumamos ambas expresiones y teniendo en cuenta que $v_{xy} = v_{yx}$

$$u_{xx} + u_{yy} = v_{yx} + \left(-v_{xy}\right) = 0$$

luego u es armónica.

Del mismo modo se prueba para la función v, en este caso se deriva la primera ecuación respecto a y, y la segunda respecto a x

$$\begin{aligned} u_{xy} &= v_{yy} \\ u_{yx} &= -v_{xx} \end{aligned}$$

y después se restan ambas expresiones teniendo en cuenta que $u_{xy} = u_{yx}$

$$0 = u_{xy} - u_{yx} = v_{yy} - \left(-v_{xx}\right) = v_{xx} + v_{yy}$$

y la función v también será armónica.

Definición 2.25 *Si u, v son armónicas en $B(z_0, r)$ y sus derivadas cumplen las ecuaciones de Cauchy-Riemann en $B(z_0, r)$, entonces se dice que v es* armónica conjugada *de u.*

Teorema 2.24 *La función $f = u + iv$ es holomorfa en $B(z_0, r) \Leftrightarrow v$ es armónica conjugada de u.*

Observación 2.6 *En general no ocurre que si v es armónica conjugada de u, entonces u sea armónica conjugada de v.*

Teorema 2.25 *Si v es armónica conjugada de u y u es armónica conjugada de $v \Rightarrow u$ y v son constantes.*

Solución:

$$v \text{ armónica conjugada de } u \Rightarrow \begin{cases} u_x = v_y & (A_1) \\ \\ u_y = -v_x & (A_2) \end{cases}$$

$$u \text{ armónica conjugada de } v \Rightarrow \begin{cases} v_x = u_y & (B_1) \\ \\ v_y = -u_x & (B_2) \end{cases}$$

Utilizando A_1 y B_2

$$u_x = v_y = -u_x$$

de donde se deduce

$$u_x = -u_x \Rightarrow u_x = 0 \Rightarrow v_y = 0$$

Del mismo modo utilizando A_2 y B_1

$$u_y = -v_x = -u_y$$

de donde

$$u_y = -u_y \Rightarrow u_y = 0 \Rightarrow v_x = 0$$

Como todas las derivadas parciales de u y v son cero y estamos en un disco abierto, debe ocurrir

$$u, v \text{ constantes}$$

Cálculo de la función ármonica conjugada

El objetivo de esta sección es determinar si, dada una función $\phi(x, y)$, derivable dentro de un disco abierto, sería posible encontrar una función $f(z)$ holomorfa tal que ϕ sea su parte real o su parte imaginaria, es decir, que $f(z)$ sea de la forma

$$f(z) = \phi + iv$$

para alguna función $v = v(x, y)$ o de la forma

$$f(z) = u + i\phi$$

para alguna función $u = u(x, y)$.

Por establecer un procedimiento inicial, supongamos que estamos en el primer caso, es decir, supongamos que tenemos una función $u(x, y)$ y queremos saber si podría ser la parte real de una función holomorfa. En primer lugar tendremos que comprobar si u es armónica, en caso contrario será imposible encontrar su armónica conjugada, después haremos uso de las ecuaciones de Cauchy-Riemann que son las expresiones que relacionan a $u(x, y)$ con su armónica conjugada $v(x, y)$ para construir la función holomorfa correspondiente. Veamos el procedimiento problema a través del siguiente ejemplo:

Ejemplo 2.19 *¿Existe $f = u + iv$ tal que $u = y^3 - 3x^2y$?*

Solución: Comprobemos en primer lugar si u es armónica:

$$u(x,y) = y^3 - 3x^2y \Rightarrow \left\{ \begin{array}{ccc} u_x = -6xy & \Rightarrow & u_{xx} = -6y \\ \\ u_y = 3y^2 - 3x^2 & \Rightarrow & u_{yy} = 6y \end{array} \right. \Rightarrow u_{xx} + u_{yy} = -6y + 6y = 0$$

luego u cumple la ecuación de Laplace, es armónica y va a ser posible encontrar su armónica conjugada v que hallaremos utilizando las ecuaciones de Cauchy-Riemann. De la primera ecuación obtenemos el valor de v_y

$$u_x = v_y \Rightarrow v_y = -6xy$$

e integrando respecto a y

$$v(x,y) = \int -6xydx = -\frac{6xy^2}{2} + C(x) = -3xy^2 + C(x)$$

donde $C(x)$ es la constante de integración respecto a la variable y, pero puede depender de la variable x. Para encontrar el valor de $C(x)$ se utiliza la segunda ecuación de Cauchy-Riemann

$$u_y = -v_x$$

El valor de u_y se obtiene directamente derivando la función dada u, mientra que v_x se obtiene de la expresión de v que acabamos de obtener:

$$\underbrace{3y^2 - 3x^2}_{u_y} = -\underbrace{\left(-3y^2 + C'(x)\right)}_{v_x} \Leftrightarrow 3y^2 - 3x^2 = 3y^2 - C'(x)$$

Despejamos el valor de $C'(x)$

$$C'(x) = 3x^2$$

que como podemos observar sólo depende de x, se obtiene la expresión para $C(x)$ integrando respecto de x :

$$C(x) = x^3 + K$$

siendo K la constante de integración respecto de x. Finalmente la función v será

$$v(x,y) = -3xy^2 + C(x) = -3xy^2 + x^3 + K$$

y la función analítica f sería:

$$f = u + iv = \left(y^3 - 3x^2y\right) + i\left(-3xy^2 + x^3 + K\right)$$

También podemos expresar $f(z)$ en términos de $z = x + iy$ como:

$$f(z) = iz^3 + iK$$

Teorema 2.26 (*) *Si $f \in \mathcal{H}(D)$ con D dominio y $|f(z)| = cte.$ en $D \Rightarrow f(z)$ es constante en D.*