Matemáticas II

Segundo Curso,
Grado en Ingeniería Electrónica Industrial y Automática
Grado en Ingeniería Eléctrica

17 de febrero de 2012

1. Conteste las siguientes cuestiones:

   (a) (0.5 ptos.) Escriba en forma binómica $\left(\frac{-1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\,i\right)^{2012}$.

   (b) (0.75 ptos.) Calcule en forma binómica todas las soluciones de la ecuación
   $$z^4+1=0.$$

   (c) (0.25 ptos.) Demuestre que todos los números de la forma
   $$\pi\cos(\alpha)+\pi i\,\mathrm{sen}\,(\alpha)\,; \qquad (\alpha\in\mathbb{R})$$

   (d) (0.25 ptos.) Teniendo en cuenta que $\mathbb{C}\approx\mathbb{R}^2$, represente en el plano el conjunto
   $$\{z\in\mathbb{C};-\pi<\mathrm{Im}\,(z)<\pi,\sqrt{3}\leq\mathrm{Re}\,(z)\}.$$

   (e) (1 pto.) Resuelva en C la ecuación siguiente:
   $$\cos(z)+i\,\sqrt{3}=0.$$

2. (1.75 ptos.) Se considera la función racional $f(z)=\dfrac{z^2}{(z-1/4)(z^2-4z-12)}$. Calcule, justificando la validez de la región de convergencia, el desarrollo de Laurent de f convergente en el anillo
$$\mathcal{A}(0;2,6)=\{z\in\mathbb{C};\;2<|z|<6\}.$$

3. Calcule las siguientes integrales:

   (a) (1.5 ptos.)
   $$\int_\gamma\frac{\mathrm{sen}\,z}{z^2\,(z-\pi)}dz;\quad \gamma(t)=3\,\exp(it),\,t\in[0,2\pi].$$

   (b) (1.75 ptos.) Calcule razonadamente, aplicando la teoría de variable compleja, la integral real
   $$\int_0^{2\pi}\frac{1}{2+\mathrm{sen}\,t}dt.$$

4. (1 pto.) Obtenga una sucesión $\{y_n\}_{n\geq0}$ cuya transformada Z sea
$$Y\,(z)=\frac{z}{(z-1)\,(z-2)}$$

5. (2 ptos.) Calcule razonadamente, mediante la transformada de Laplace, una función $y\,(t)$, que verifique la siguiente ecuación diferencial con condiciones iniciales:
$$\begin{cases} y''\,(t)+5y'\,(t)+6y\,(t)=u\,(t)\,; & t\in(0,+\infty)\\ \\ y\,(0)=0\\ y'\,(0)=2\end{cases}$$
donde
$$u\,(t)=\begin{cases}3; & 0\leq t<6\\ \\ 0; & 6\leq t,\end{cases}$$