Matemáticas II
Grado en Ingeniería Eléctrica/Grado en Ingeniería Electrónica y Automática
Convocatoria Junio 2015

Apellidos:

Nombre:

DNI:

Observaciones

- No está permitido el uso de calculadora programable.
- Los cálculos deben ser exactos y los ángulos deben explicitarse en radianes.
- Justifique los razonamientos que emplea.
- Entregue la hoja del enunciado.
- Procure empezar cada problema folio nuevo y entregue los ejercicios en el mismo orden que aparecen enunciados.
- Puntuación: El examen está puntuado sobre 10 y supone el 80 % de la evaluación global en las condiciones descritas en la guía docente y en la convocatoria.

---

1. **(1.2 puntos)** Encuentra en $\mathbb{C}$ todas las soluciones de la siguiente ecuación:

$$\cos(z) + 2\sqrt{5}i = 0.$$

2. Dada la siguiente función:

$$f(z) = \left(z^2 + \frac{1}{z}\right)\cos\left(\frac{1}{z}\right).$$

   a) **(1 punto)** Calcule su desarrollo de Laurent centrado en $z_0 = 0$, indicando su anillo de convergencia, así como su partes regular y singular.

   b) **(0.4 puntos)** Utilizando el desarrollo del apartado anterior calcule

$$\mathrm{Res}\left(f(z), z_0\right).$$

3. **(1.2 puntos)** Calcule la siguiente integral aplicando la Fórmula Integral de Cauchy, justificando de forma razonada porqué se puede aplicar esta fórmula.

$$\int_\gamma \frac{\operatorname{sen} z}{z(z-2)^2}dz; \qquad \gamma(t) = 4e^{it}, t \in [0, 2\pi].$$

4. **(1.2 puntos)** Calcule en función de $r > 0$ y mediante el teorema de los residuos la siguiente integral; justificando de forma razonada porqué se puede aplicar dicho teorema:

$$\int_\gamma \frac{\cos z}{z\left(z-\frac{\pi}{2}\right)^2}dz; \qquad \gamma(t) = 1 + re^{it}, t \in [0, 2\pi], \quad r > 0.$$

5. **(1.4 puntos)** Calcule mediante el teorema de los residuos la siguiente integral, justificando de forma razonada cada paso realizado:

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{\sqrt{10} + \operatorname{sen} t}dt.$$

6. Resuelva cada apartado de forma independiente:

   a) **(0.4 puntos)** Usando la definición, demuestre que la transformada de Laplace de la función $f(t) = 1 + t \cdot h_3(t)$, es la función de variable compleja

$$\mathcal{L}[f(t)](z) = \frac{1}{z} + e^{-3z}\left(\frac{1}{z^2} + \frac{3}{z}\right); \quad \mathrm{Re}(z) > 0,$$

   donde $h_3(t)$ es la función de Heaviside de parámetro 3.

   b) **(1.4 puntos)** Resuelva mediante la transformada de Laplace el siguiente problema del valor inicial:

$$\begin{cases} y''(t) - 4y'(t) + y(t) = 1 + t \cdot h_3(t), \qquad t \geq 0, \\ y(0) = 1, \\ y'(0) = 0. \end{cases}$$

7. Resuelva cada apartado de forma independiente.

   a) **(0.4 puntos)** Usando la definición, demuestre que la transformada $\mathcal{Z}$ de la sucesión $x_n = 3^n$, es la función de variable compleja

$$X(z) = \frac{z}{(z-3)}; \quad |z| > 3$$

   b) **(1.0 puntos)** Resuelva mediante la transformada $\mathcal{Z}$ el siguiente problema de valor inicial en tiempo discreto:

$$\begin{cases} y_{n+2} - 16y_n = 3^n, \qquad n \geq 0, \\ y_0 = 0, \\ y_1 = 2. \end{cases}$$

   c) **(0.4 puntos)** Calcule y_2 mediante la ecuación y también mediante la solución obtenida; compruebe que ambos resultados coinciden.