Matemáticas II - Grado en Ingeniería Eléctrica
3 de noviembre de 2015
MODELO B - Soluciones

1. (2.5 puntos) Dados los números complejos $z_1 = -1+i$ y $z_2 = -\sqrt{3}-i$ realice las siguientes operaciones, tanto en forma **binómica** como en forma **exponencial o polar**.

a) $z_1 z_2$,

b) $\dfrac{z_1}{z_2}$.

Solución: Operaciones en forma binómica

$$
\begin{aligned}
z_1 z_2 &= (-1+i)\cdot\left(-\sqrt{3}-i\right) = \left(1+\sqrt{3}\right) + \left(1-\sqrt{3}\right) i \\
\frac{z_1}{z_2} &= \frac{(-1+i)}{(-\sqrt{3}-i)} = \left(-\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{3}}{4}\right) - \left(\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{3}}{4}\right) i
\end{aligned}
$$

Operaciones en forma exponencial

$$
\begin{aligned}
z_1 &= \sqrt{2} e^{i3\pi/4} \\
z_2 &= 2e^{-i5\pi/6} \\
z_1 z_2 &= 2\sqrt{2} e^{-i\pi/12} \\
\frac{z_1}{z_2} &= \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-i5\pi/12}
\end{aligned}
$$

2. (2.5 puntos) Calcule $z = \left(1+i\sqrt{3}\right)^6 + \left(1-i\sqrt{3}\right)^6$ y exprese el resultado en forma **binómica**.

Solución: Está claro que son complejos conjugados por tanto, utilizando las propiedades

$$z^6 + \overline{z}^6 = z^6 + \overline{z^6} = 2\,\mathrm{Re}\left(z^6\right)$$

Para el cálculo de z^6, expresamos el complejo en forma exponencial

$$z = 2e^{i\frac{\pi}{3}} \Rightarrow z^6 = \left(2e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^6 = 2^6 e^{i2\pi} = 2^6 = 128.$$

3. (2.5 puntos) Encuentre todas las soluciones en $\mathbb{C}$ de la ecuación $z^4 - 64 = 0$ y exprese el resultado en forma **binómica**.

Buscamos las raíces cuartas de 64

$$z^4 - 64 = 0 \Leftrightarrow z^4 = 64 \Leftrightarrow z = \sqrt[4]{64}$$

Poniendo 64 en forma exponencial

$$64 = 64e^{i0}$$

de donde

$$|z| = \sqrt[4]{|64|} = \sqrt[4]{64} = 2\sqrt{2}$$

$$\varphi = \frac{0 + 2k\pi}{4} \quad k = 0, \ldots, 4$$

y las raíces en forma exponencial y binómica son:

$$\begin{aligned}
w_0 &= 2\sqrt{2}e^{i0} = 2\sqrt{2} \\
w_1 &= 2\sqrt{2}e^{i\pi/2} = 2\sqrt{2}i \\
w_2 &= 2\sqrt{2}e^{i\pi} = -2\sqrt{2} \\
w_3 &= 2\sqrt{2}e^{i3\pi/2} = -2\sqrt{2}i
\end{aligned}$$

4. (2.5 puntos) Encuentre la parte real e imaginaria de la siguiente función

$$f(z) = (\overline{z})^2 e^z.$$

Solución: Haciendo el cambio $z = x + iy$, obtenemos

$$\begin{aligned}
f(x+iy) &= (x-iy)^2 e^{x+iy} = \left(x^2 - y^2 - i2xy\right)(e^x \cos y + ie^x \operatorname{sen} y) \\
&= \left(\left(x^2 - y^2\right) e^x \cos y + 2xye^x \operatorname{sen} y\right) + i\left(-2xye^x \cos y + \left(x^2 - y^2\right) e^x \operatorname{sen} y\right) \\
&= e^x \left(\left(x^2 - y^2\right) \cos y + 2xy \operatorname{sen} y\right) - ie^x \left(2xy \cos y - \left(x^2 - y^2\right) \operatorname{sen} y\right)
\end{aligned}$$
