Matemáticas II

Segundo Curso,
Grado en Ingeniería Electrónica Industrial y Automática
Grado en Ingeniería Eléctrica

17 de febrero de 2012

1. Conteste las siguientes cuestiones:

   (a) (0.5 ptos.) Escriba en forma binómica $\left(\dfrac{-1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right)^{2012}$.

   Solución: Haremos la operación en forma exponencial. Para ello calculamos el módulo y argumento del complejo $z_1 = \dfrac{-1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$

$$|z_1| = \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4}+\frac{3}{4}} = 1$$

$$\theta_z = \arctan \frac{\sqrt{3}/2}{-1/2} = \arctan -\sqrt{3} = -\frac{\pi}{3} + \pi = \frac{2\pi}{3} \qquad \text{(Está en el segundo cuadrante)}$$

   Y ahora realizamos la operación de potenciación

$$\left(\frac{-1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^{2012} = \left(e^{i2\pi/3}\right)^{2012} = e^{i2\cdot 2012\pi/3}$$

   Si descontamos vueltas completas:

$$\frac{2\cdot 2012}{3}\pi = \frac{2\pi\,(67\cdot 3+2)}{3} = 2\pi\cdot 67 + \frac{4\pi}{3}$$

   Se han dado 67 vueltas completas a la circunferencia y queda un ángulo de $4\pi/3$ radianes, por tanto

$$e^{i2\cdot 2012\pi/3} = e^{i4\pi/3} = \cos\frac{4\pi}{3} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

   (b) (0.75 ptos.) Calcule en forma binómica todas las soluciones de la ecuación

$$z^4 + 1 = 0.$$

   Solución: Los complejos que cumplen la ecuación son las raíces cuartas de -1, por tanto

$$z = \sqrt[4]{-1}$$

   que calculamos en forma exponencial. Para ello expresamos el radicando en forma exponencial

$$-1 = 1\cdot e^{i\pi}$$

   y las 4 raíces cuartas son

$$w_k = \sqrt[4]{|z|}e^{i\varphi_k}$$

   siendo

$$\varphi_k = \frac{\theta_z + 2k\pi}{4}; \qquad k = 0,1,2,3.$$

En este caso $|z| = 1$ y $\theta_z = \pi$, de este modo

$$w_k = e^{i\varphi_k}$$

siendo

$$\varphi_k = \frac{\pi + 2k\pi}{4}; \qquad k = 0, 1, 2, 3$$

y las raíces en forma binómica son

$$\begin{aligned}
k &= 0 \Rightarrow w_0 = e^{i\pi/4} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i,\\
k &= 1 \Rightarrow w_0 = e^{i3\pi/4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i,\\
k &= 2 \Rightarrow w_0 = e^{i5\pi/4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i,\\
k &= 3 \Rightarrow w_0 = e^{i7\pi/4} = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i.
\end{aligned}$$

(c) **(0.25 ptos.) Demuestre que todos los números de la forma**

$$\pi\cos(\alpha) + \pi i \operatorname{sen}(\alpha); \qquad (\alpha \in \mathbb{R})$$

pertenecen a la circunferencia $\gamma(t) = \pi e^{it}$; $t \in [0, 2\pi]$
Solución: Utilizando la fórmula de Euler

$$\pi\cos(\alpha) + \pi i \operatorname{sen}(\alpha) = \pi(\cos(\alpha) + i\operatorname{sen}(\alpha)) = \pi e^{i\alpha}$$

y está claro que

$$\left|\pi e^{i\alpha}\right| = |\pi|\left|e^{i\alpha}\right| = \pi$$

luego todos esos puntos están en la curva $\gamma(t)$. También es posible comprobarlo utilizando la definición de módulo de forma directa, sin necesidad de la fórmula de Euler

$$|\pi\cos(\alpha) + \pi i \operatorname{sen}(\alpha)| = \sqrt{(\pi\cos\alpha)^2 + (\pi\operatorname{sen}\alpha)^2} = \sqrt{\pi^2(\cos^2\alpha + \operatorname{sen}^2\alpha)} = \sqrt{\pi^2 \cdot 1} = \pi$$

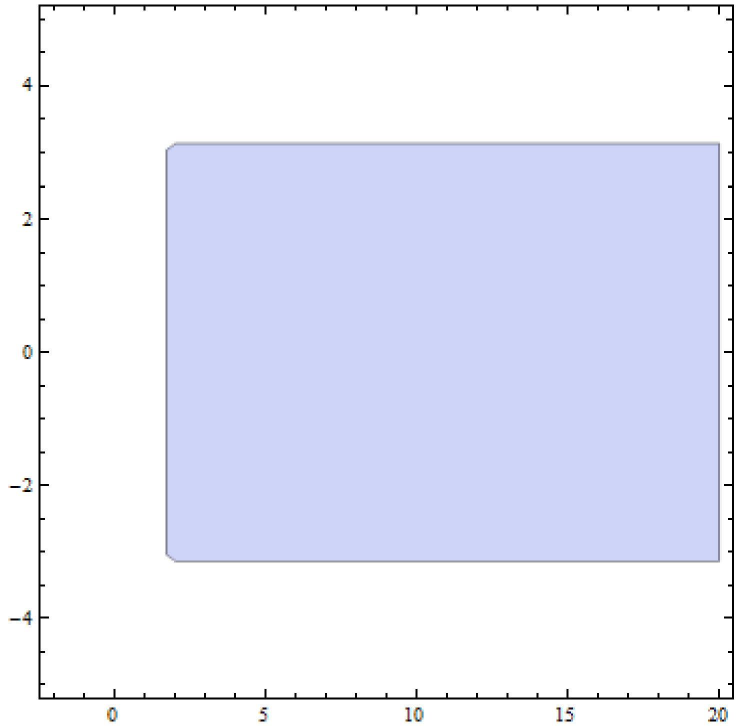
(d) **(0.25 ptos.) Teniendo en cuenta que $\mathbb{C} \approx \mathbb{R}^2$, represente en el plano el conjunto**

$$\{z \in \mathbb{C}; -\pi < \operatorname{Im}(z) < \pi, \sqrt{3} \leq \operatorname{Re}(z)\}.$$

Solución: Si expresamos el complejo z en la forma binómica $z = x + iy$, el conjunto puede expresarse como

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; -\pi < y < \pi, \sqrt{3} \leq x\}.$$

cuya representación gráfica es una banda horizontal de anchura 2π con centro en el eje real, es decir



(e) (1 pto.) Resuelva en C la ecuación siguiente:

$$\cos(z) + i\sqrt{3} = 0.$$

Solución: Utilizamos la definición de $\cos z$ en términos de la función exponencial para reescribir la ecuación

$$\left(\frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}\right) + i\sqrt{3} = 0$$

Hacemos el cambio

$$e^{iz} = w$$

y como $w \neq 0$

$$e^{-iz} = \frac{1}{e^{iz}} = \frac{1}{w}$$

De esta forma se obtiene una ecuación en la variable w

$$\frac{w + \frac{1}{w}}{2} + i\sqrt{3} = 0 \Rightarrow \frac{w^2 + 1}{2w} + i\sqrt{3} = 0$$

y multiplicando por $2w$ obtenemos una ecuación de segundo grado

$$(w` + 1) + 2wi\sqrt{3} = 0 \Rightarrow w^2 + 2wi\sqrt{3} + 1 = 0$$

que podemos resolver fácilmente mediante la correspondiente fórmula

$$w = \frac{-2i\sqrt{3} \pm \sqrt{\left(-2i\sqrt{3}\right)^2 - 4 \cdot (1)\,(1)}}{2 \cdot 1} = \frac{-2i\sqrt{3} \pm \sqrt{-16}}{2} = \frac{-2i\sqrt{3} \pm 4i}{2} = \left(-\sqrt{3} \pm 2\right) i$$

obteniendo dos soluciones

$$\begin{aligned} w_1 &= \left(-\sqrt{3} + 2\right) i \\ w_2 &= \left(-\sqrt{3} - 2\right) i \end{aligned}$$

Con estos valores para w_1 y w_2 y teniendo en cuenta el cambio que se hizo al principio del ejercicio obtendremos, mediante la definición de logaritmo complejo $e^{iz} = w \Rightarrow iz = \log w$, tenemos en cuenta además que w_1 y w_2 son dos números imaginarioas puros con parte imaginaria positiva y negativa respectivamente

$$iz_1 = \log\left(\left(-\sqrt{3}+2\right)i\right) = \ln\left(2-\sqrt{3}\right) + i\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right) \Rightarrow z_1 = -i\ln\left(2-\sqrt{3}\right) + \left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)$$

$$iz_2 = \log\left(\left(-\sqrt{3}+2\right)i\right) = \ln\left(2+\sqrt{3}\right) + i\left(\frac{3\pi}{2}+2k\pi\right) \Rightarrow z_2 = -i\ln\left(2+\sqrt{3}\right) + \left(\frac{3\pi}{2}+2k\pi\right)$$

2. (1.75 ptos.) Se considera la función racional $f(z) = \dfrac{z^2}{(z-1/4)(z^2-4z-12)}$. Calcule, justificando la validez de la región de convergencia, el desarrollo de Laurent de f convergente en el anillo

$$\mathcal{A}(0;2,6) = \{z \in \mathbb{C};\ 2 < |z| < 6\}.$$

Solución: En primer lugar buscamos las raíces del denominador para descomponer la función en fracciones simples. Está claro que una de las raíces es $z_1 = 1/4$, para las otras resolvemos la correspondiente ecuación

$$(z^2-4z-12) \Leftrightarrow z = \frac{4 \pm \sqrt{16-4\cdot(-12)}}{2} = \frac{4\pm\sqrt{64}}{2} = \frac{4\pm 8}{2} \Rightarrow \begin{cases} z_2 = \frac{4+8}{2} = 6 \\ z_3 = \frac{4-8}{2} = -2 \end{cases}$$

por tanto

$$f(z) = \frac{z^2}{(z-1/4)(z^2-4z-12)} = \frac{z^2}{(z-1/4)(z-6)(z+2)}$$

Como estamos buscando potencias de z, la descomposición en factores simples es la siguiente:

$$f(z) = \frac{z^2}{(z-1/4)(z-6)(z+2)} = \left(\frac{A}{z-1/4} + \frac{B}{z-6} + \frac{C}{z+2}\right)$$

Para la expresión entre paréntesis tenemos

$$\frac{A(z-6)(z+2) + B(z-1/4)(z+2) + C(z-1/4)(z-6)}{(z-1/4)(z-6)(z+2)}$$

Por tanto

$$A(z-6)(z+2) + B(z-1/4)(z+2) + C(z-1/4)(z-6) = z^2$$

y dando a z los valores de las raíces

$$\left.\begin{array}{l} z = 1/4 \Rightarrow A(1/4-6)(1/4+2) = 1/16 \Rightarrow A = -\frac{1}{207} \\ z = 6 \Rightarrow B(6-1/4)(6+2) = 36 \Rightarrow B = \frac{36}{46} = \frac{18}{23} \\ z = -2 \Rightarrow C(-2-1/4)(-2-6) = 4 \Rightarrow C = \frac{4}{18} = \frac{2}{9} \end{array}\right\}$$

y la descomposición es

$$\frac{z^2}{(z-1/4)(z-6)(z+2)} = \left(-\frac{1}{207(z-1/4)} + \frac{18}{23(z-6)} + \frac{2}{9(z+2)}\right)$$

El desarrollo de Laurent en el conjunto indicado $2 < |z| < 6$ de cada fracción es muy sencillo.
Como $2 < |z| \Rightarrow \frac{1}{4} < 2 < |z| \Rightarrow \frac{1}{|4z|} < \frac{2}{|z|} < 1$ y entonces

$$\frac{1}{z-1/4} = \frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{1}{4z}} = \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{4z}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{4^n}\frac{1}{z^{n+1}} \text{ con } \left|\frac{1}{4z}\right| < 1$$

De nuevo como $2 < |z| \Rightarrow \frac{2}{|z|} < \frac{|z|}{|z|} < 1$ y el desarrollo para esta fracción es:

$$\frac{1}{z+2} = \frac{1}{z}\frac{1}{1+\frac{2}{z}} = \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{2}{z}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n 2^n}{z^{n+1}} \text{ con } \left|\frac{2}{z}\right| < 1$$

Finalmente como $|z| < 6 \Rightarrow \frac{|z|}{6} < 1$

$$\frac{1}{z-6} = \frac{1}{6\left(\frac{z}{6}-1\right)} = \frac{-1}{6}\frac{1}{1-\frac{z}{6}} = \frac{-1}{6}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{6}\right)^n = -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{6^{n+1}} \text{ con } \left|\frac{z}{6}\right| < 1$$

La función tendrá el siguiente desarrollo6

$$f(z) = \left(-\frac{1}{207(z-1/4)} + \frac{18}{23(z-6)} + \frac{2}{9(z+2)}\right) = \left(-\frac{1}{207}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{4^n}\frac{1}{z^{n+1}} - \frac{18}{23}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{6^{n+1}} + \frac{2}{9}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n 2^n}{z^{n+1}}\right)$$

agrupamos las potencias negativas y positivas de forma:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{207}\frac{1}{4^n} + \frac{2}{9}(-1)^n 2^n\right)\frac{1}{z^{n+1}} - \frac{18}{23}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{6^{n+1}}$$

o simplificando

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{207}\frac{1}{4^n} + \frac{(-1)^n 2^{n+1}}{9}\right)\frac{1}{z^{n+1}} - \frac{3}{23}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{6^n}$$

y cambiando el contador en la primera suma $n+1 \Rightarrow n$

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{207}\frac{1}{4^{n-1}} + \frac{(-1)^{n-1} 2^n}{9}\right)\frac{1}{z^n} - \frac{3}{23}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{6^n}$$

3. Calcule las siguientes integrales:

   (a) (1.5 ptos.)

$$\int_\gamma \frac{\operatorname{sen} z}{z^2(z-\pi)}dz; \quad \gamma(t) = 3\exp(it),\ t \in [0, 2\pi].$$

Solución: Es la integral de un cociente de funciones derivables a lo largo de una curva cerrada, por tanto utilizaremos el teorema de los residuos teniendo en cuenta solamente las singularidades que caen dentro de la curva. Las singularidades de la función son los números complejos que anulan el denominador de la función, por tanto

$$z^2(z-\pi) = 0$$

que tiene por soluciones

$$z_1 = 0$$

$$z_2 = \pi$$

Aunque $z_1 = 0$ es un cero doble del denominador, también es un cero simple del numerador, por tanto será un polo simple de la función. La otra singularidad, $z_2 = \pi$, es de tipo evitable puesto que aunque es un cero simple del denominador, también es un cero simple del numerador y por tanto será singularidad evitable de la función. No obstante solamente z_1 está dentro de la curva (¡es el centro de la circunferencia!), ya que la distancia de z_2 al centro de la circunferencia es

$$d(z_2, 0) = |z_2 - 0| = |z_2| = |\pi| = \pi > 3$$

es mayor que el radio y no influirá en el cálculo de la integral. El residuo para z_1 se puede calcular mediante límites

$$\operatorname{Res}\left(\frac{\operatorname{sen} z}{z^2(z-\pi)},0\right)=\lim_{z\to 0} z\frac{\operatorname{sen} z}{z^2(z-\pi)}=\lim_{z\to 0}\frac{\operatorname{sen} z}{z(z-\pi)}=\lim_{z\to 0}\frac{\operatorname{sen} z}{z}\frac{1}{(z-\pi)}=1\cdot\frac{1}{-\pi}=-\frac{1}{\pi}$$

y la integral será

$$\int_\gamma \frac{\operatorname{sen} z}{z^2(z-\pi)}dz=2\pi i\operatorname{Res}\left(\frac{\operatorname{sen} z}{z^2(z-\pi)},0\right)=2\pi i\left(-\frac{1}{\pi}\right)=-2i$$

(b) (1.75 ptos.) Calcule razonadamente, aplicando la teoría de variable compleja, la integral real

$$\int_0^{2\pi}\frac{1}{2+\operatorname{sen} t}dt.$$

Solución: Es una integral trigonométrica de una función racional en $(\operatorname{sen} t,\cos t)$, por tanto haremos el cambio usual

$$\begin{aligned}\operatorname{sen} t &= \frac{z^2-1}{2iz}\\ dt &= \frac{1}{iz}dz\end{aligned}$$

en este caso la función del integrando es

$$\frac{1}{2+\operatorname{sen} t}dt=\frac{1}{2+\frac{z^2-1}{2iz}}\frac{1}{iz}dz=\frac{2}{4iz+z^2-1}dz$$

y la integral trigonométrica se transofrma en

$$\int_0^{2\pi}\frac{1}{2+\operatorname{sen} t}dt=\int_\gamma\frac{2}{z^2+4iz-1}dz$$

siendo

$$\gamma(t)=e^{it}\qquad t\in[0,2\pi]$$

Utilizando el teorema de los residuos podremos resolver dicha integral. En primer lugar buscaremos los ceros del denominador de la función

$$z^2+4iz-1\Leftrightarrow z=\frac{-4i\pm\sqrt{-16+4}}{2}=\frac{-4i\pm\sqrt{-12}}{2}=\frac{-4i\pm 2\sqrt{3}i}{2}\Rightarrow\begin{cases} z_1=\left(-2+\sqrt{3}\right)i\\ z_2=\left(-2-\sqrt{3}\right)i\end{cases}$$

Sólo z_1 está en la circunferencia den centro $(0,0)$ y radio 1, puesto que

$$|z_1|=\left|\left(-2+\sqrt{3}\right)i\right|=2-\sqrt{3}<1$$

mientras que z_2 estará fuera puesto que

$$|z_1|=\left|\left(-2-\sqrt{3}\right)i\right|=2+\sqrt{3}>1$$

Para la integral sólo tendremos en cuenta a z_1

$$\int_0^{2\pi}\frac{1}{2+\operatorname{sen} t}dt.=2\pi i\operatorname{Res}\left(\frac{2}{z^2+4iz-1},\left(-2+\sqrt{3}\right)i\right)=2\pi i\frac{2}{\left(-2+\sqrt{3}\right)i-\left(-2-\sqrt{3}\right)i}=\frac{2}{3}\pi\sqrt{3}$$

4. (1 pto.) Obtenga una sucesión $\{y_n\}_{n\geq 0}$ cuya transformada $\mathcal{Z}$ sea

$$Y(z) = \frac{z}{(z-1)(z-2)}$$

Solución: Para obtener el valor de y_n tendremos que calcular la transformada $\mathcal{Z}$ inversa de $Y(z)$

$$y_n = Z^{-1}\left(\frac{z}{(z-1)(z-2)}\right)$$

Para calcular esta transformada $\mathcal{Z}$ inversa, hay que encontrar las raíces del denominador y hacer la descomposición de la función racional en fracciones simples. Las raíces del denominador son

$$\begin{cases} z_1 = 1 \\ \\ z_2 = 2 \end{cases}$$

La descomposición de $F(z)$ es

$$F(z) = \frac{z}{(z-1)(z-2)} = \left(\frac{A}{z-1} + \frac{B}{z-2}\right)$$

Para la expresión entre paréntesis tenemos

$$\frac{A(z-2) + B(z-1)}{(z-1)(z-2)}$$

Por tanto

$$A(z-2) + B(z-1) = z$$

y dando a z los valores de las raíces

$$\left.\begin{array}{l} z = 1 \Rightarrow A(1-2) = 1 \Rightarrow A = -1 \\ \\ z = 2 \Rightarrow B(2-1) = 2 \Rightarrow B = 2 \end{array}\right\}$$

y la descomposición es

$$\frac{z}{(z-1)(z-2)} = \left(-\frac{1}{(z-1)} + \frac{2}{(z-2)}\right)$$

A continuación desarrollamos cada fracción en series de Laurent dentro de conjuntos de la forma $A(0, r, \infty)$, es decir en el exterior de bolas de centro 0 y radio r, en todas hay que hacer la misma operación, transformar la fracción para poder emplear la suma de una serie geométrica

$$\begin{aligned} \frac{1}{z-1} &= \frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{1}{z}} = \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{z}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^{n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{z^n} \quad |z| > 1 \\ \frac{1}{z-2} &= \frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{2}{z}} = \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{z}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{z^{n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n-1}}{z^n} \quad |z| > 2 \end{aligned}$$

y sustituyendo en la expresión para $F(z)$

$$\begin{aligned} \frac{z}{(z-1)(z-2)} &= -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{z^n} + 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n-1}}{z^n} \quad |z| > 2 \\ &= \sum_{n=1}^{\infty}(2^n - 1)\frac{1}{z^n} \quad |z| > 2 \end{aligned}$$

Los coeficientes de las potencias de z son los elementos de la sucesión que buscamos

$$y_n = (2^n - 1) \quad n \geq 1$$

mientras que

$$y_0 = 0$$

5. (2 ptos.) Calcule razonadamente, mediante la transformada de Laplace, una función $y(t)$, que verifique la siguiente ecuación diferencial con condiciones iniciales:

$$\begin{cases} y''(t) + 5y'(t) + 6y(t) = u(t); & t \in (0, +\infty) \\ \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 2 \end{cases}$$

donde

$$u(t) = \begin{cases} 3; & 0 \leq t < 6 \\ \\ 0; & 6 \leq t, \end{cases}$$

Solución: Para resolver la ecuación diferencial

$$y''(t) + 5y'(t) + 6y(t) = u(t)$$

junto con las condiciones iniciales $y(0) = 0$, $y'(0) = 2$, aplicaremos la transformada de laplace y sus propiedades de linealidad y desplazamiento.

Aplicamos la transforada de Laplace a ambos miembros de la ecuación

$$\mathcal{L}[y''(t) + 5y'(t) + 6y(t)](z) = \mathcal{L}[u(t)](z),$$

utilizamos la linealidad

$$\mathcal{L}[y''(t)](z) + 5\mathcal{L}[y'(t)](z) + 6\mathcal{L}[y(t)](z) = \mathcal{L}[u(t)](z)$$

y a continuación la propiedad de desplazamiento junto con las condiciones iniciales

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[y(t)](z) &= Y(z) \\ \mathcal{L}[y'(t)](z) &= z\mathcal{L}[y(t)](z) - y(0) = zY(z) \\ \mathcal{L}[y''(t)](z) &= z^2\mathcal{L}[y(t)](z) - zy(0) - y'(0) = z^2Y(z) - 2 \end{aligned}$$

Con estos cambios la ecuación queda

$$\begin{aligned} \left(z^2Y(z) - 2\right) + 5\left(z\mathcal{L}[u(t)](z)\right) + 6\left(Y(z)\right) &= \mathcal{L}[u(t)](z) \\ \left(z^2 + 5z + 6\right)Y(z) &= \mathcal{L}[u(t)](z) + 2 \end{aligned}$$

y despejando

$$Y(z) = \frac{\mathcal{L}[u(t)](z) + 2}{(z^2 + 5z + 6)}$$

El valor de $\mathcal{L}[u(t)](z)$ lo obtenemos mediante la aplicación directa de la definición de transformada de Laplace, teniendo en cuenta que $u(t)$ en términos de la función de Heaviside se puede expresar como

$$u(t) = 3\left(h_0(t) - h_6(t)\right)$$

luego

$$\mathcal{L}[u(t)](z) = \mathcal{L}[3\left(h_0(t) - h_6(t)\right)](z) = 3\left(\frac{1}{z} - \frac{e^{-6z}}{z}\right)$$

o como alternativa también puede hacerse mediante la definición de $\mathcal{L}[u(t)](z)$

$$\mathcal{L}[u(t)](z) = \int_0^{\infty} u(t)e^{-zt}dt = \int_0^6 3e^{-zt}dt = -3\frac{e^{-zt}}{z}\bigg|_{t=0}^{6} = 3\left(\frac{1}{z} - \frac{e^{-6z}}{z}\right).$$

Sustituendo en la expresión de $Y(z)$

$$Y(z)=\frac{\mathcal{L}[u(t)](z)+2}{(z^2+5z+6)}=\frac{3\left(\frac{1}{z}-\frac{e^{-6z}}{z}\right)+2}{(z^2+5z+6)}=\frac{3+2z-3e^{-6z}}{z(z^2+5z+6)}=\frac{3+2z-3e^{-6z}}{z(z+2)(z+3)}$$

Mediante la transformada inversa obtendremos el valor de $y(t)$

$$y(t)=\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{3+2z-3e^{-6z}}{z(z+2)(z+3)}\right](t).$$

Utilizando la linealidad

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}\left[\tfrac{3+2z-3e^{-6z}}{z(z+2)(z+3)}\right](t) &= \mathcal{L}^{-1}\left[\tfrac{3}{z(z+2)(z+3)}\right](t)+\mathcal{L}^{-1}\left[\tfrac{2z}{z(z+2)(z+3)}\right](t)+\mathcal{L}^{-1}\left[\tfrac{-3e^{-6z}}{z(z+2)(z+3)}\right](t),\\ &= 3\mathcal{L}^{-1}\left[\tfrac{1}{z(z+2)(z+3)}\right](t)+2\mathcal{L}^{-1}\left[\tfrac{1}{(z+2)(z+3)}\right](t)-3\mathcal{L}^{-1}\left[\tfrac{e^{-6z}}{z(z+2)(z+3)}\right](t),\end{aligned}$$

y utilizando la propiedad de desplazamiento

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\tfrac{3+2z-3e^{-6z}}{z(z+2)(z+3)}\right](t)=3\mathcal{L}^{-1}\left[\tfrac{1}{z(z+2)(z+3)}\right](t)+2\mathcal{L}^{-1}\left[\tfrac{1}{(z+2)(z+3)}\right](t)-3\mathcal{L}^{-1}\left[\tfrac{1}{z(z+2)(z+3)}\right](t-6)\,h_6(t),$$

siendo $h_6(t)$ la función de Heaviside en el intervalo correspondiente $[6,\infty]$. Calculamos cada inversa mediante los residuos en las singularidades de las funciones correspondientes, que por ser funciones racionales son los ceros del denominador:

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\tfrac{1}{z(z+2)(z+3)}\right](t)=\operatorname{Res}\left(\tfrac{e^{zt}}{z(z+2)(z+3)},0\right)+\operatorname{Res}\left(\tfrac{e^{zt}}{z(z+2)(z+3)},-2\right)+\operatorname{Res}\left(\tfrac{e^{zt}}{z(z+2)(z+3)},-3\right),$$

este cálculo es directo

$$\begin{aligned}\operatorname{Res}\left(\tfrac{e^{zt}}{z(z+2)(z+3)},0\right) &= \lim_{z\to 0} z\tfrac{e^{zt}}{z(z+2)(z+3)}=\lim_{z\to 0}\tfrac{e^{zt}}{(z+2)(z+3)}=\frac{1}{6},\\ \operatorname{Res}\left(\tfrac{e^{zt}}{z(z+2)(z+3)},-2\right) &= \lim_{z\to -2}(z+2)\tfrac{e^{zt}}{z(z+2)(z+3)}=\lim_{z\to -2}\tfrac{e^{zt}}{z(z+3)}=\frac{e^{-2t}}{-2},\\ \operatorname{Res}\left(\tfrac{e^{zt}}{z(z+2)(z+3)},-3\right) &= \lim_{z\to -3}(z+3)\tfrac{e^{zt}}{z(z+2)(z+3)}=\lim_{z\to -3}\tfrac{e^{zt}}{(z+2)z}=\frac{e^{-3t}}{3},\end{aligned}$$

por tanto

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\tfrac{1}{z(z+2)(z+3)}\right](t)=\frac{1}{6}+\frac{e^{-3t}}{3}-\frac{e^{-2t}}{2}$$

Para el segundo término también utilizamos residuos

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\tfrac{1}{(z+2)(z+3)}\right](t)=\sum_{z_k}\operatorname{Res}\left(\tfrac{e^{zt}}{z(z+2)(z+3)},z_k\right)=\operatorname{Res}\left(\tfrac{e^{zt}}{(z+2)(z+3)},-2\right)+\operatorname{Res}\left(\tfrac{e^{zt}}{(z+2)(z+3)},-3\right)$$

siendo

$$\begin{aligned}\operatorname{Res}\left(\tfrac{e^{zt}}{(z+2)(z+3)},-2\right) &= \lim_{z\to -2}(z+2)\tfrac{e^{zt}}{(z+2)(z+3)}=\lim_{z\to -2}\tfrac{e^{zt}}{(z+3)}=e^{-2t}\\ \operatorname{Res}\left(\tfrac{e^{zt}}{(z+2)(z+3)},-3\right) &= \lim_{z\to -3}(z+3)\tfrac{e^{zt}}{(z+2)(z+3)}=\lim_{z\to -3}\tfrac{e^{zt}}{(z+2)}=-e^{-3t}\end{aligned}$$

y por tanto

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\tfrac{1}{(z+2)(z+3)}\right](t)=e^{-2t}-e^{-3t}$$

Para el último término usamos la propiedad de traslación

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\tfrac{e^{-6z}}{z(z+2)(z+3)}\right](t)=\mathcal{L}^{-1}\left[\tfrac{1}{z(z+2)(z+3)}\right](t-6)\,h_6(t)=\left(\frac{1}{6}+\frac{e^{-3(t-6)}}{3}-\frac{e^{-2(t-6)}}{2}\right)h_6(t)$$

y la función $y(t)$ se obtiene sumando todos los términos:

$$\begin{aligned} y(t) &= 3\left(\frac{1}{6}+\frac{e^{-3t}}{3}-\frac{e^{-2t}}{2}\right)+2\left(e^{-2t}-e^{-3t}\right)-3\left(\frac{1}{6}+\frac{e^{-3(t-6)}}{3}-\frac{e^{-2(t-6)}}{2}\right)h_6(t)= \\ &= \left(\frac{1}{2}-e^{-3t}+\frac{1}{2}e^{-2t}\right)-3\left(\frac{1}{6}+\frac{e^{-3(t-6)}}{3}-\frac{e^{-2(t-6)}}{2}\right)h_6(t) \end{aligned}$$

Podemos comprobar que se cumplen las condiciones iniciales, tanto en $y(0)$

$$\begin{aligned} y(0) &= \left(\frac{1}{2}-e^{-3\cdot 0}+\frac{1}{2}e^{-2\cdot 0}\right)-3\left(\frac{1}{6}+\frac{e^{-3(0-6)}}{3}-\frac{e^{-2(0-6)}}{2}\right)h_6(0) \\ &= \frac{1}{2}-1+\frac{1}{2}+0=0 \end{aligned}$$

como en $y'(0)$, primero derivando

$$y'(t)=\left(3e^{-3t}-e^{-2t}\right)-3\left(-e^{-3t+18}+e^{-2t+12}\right)h_6(t),$$

y evaluando en el punto $t=0$

$$\begin{aligned} y'(0) &= \left(3e^{-3\cdot 0}-e^{-2\cdot 0}\right)-3\left(-e^{-3\cdot 0+18}+e^{-2\cdot 0+12}\right)h_6(0) \\ &= 3-1-3\cdot 0=2. \end{aligned}$$

Se comprueba que $y(t)$ cumple la ecuación diferencial. Para ello tenemos que obtener la segunda derivada de $y(t)$

$$y''(t)=\left(-9e^{-3t}+2e^{-2t}\right)-3\left(3e^{-3t+18}-2e^{-2t+12}\right)h_6(t)$$

Y sustituyendo en la ecuación diferencial

$$\begin{aligned} y''(t)+5y'(t)+6y(t) &= \left(\left(-9e^{-3t}+2e^{-2t}\right)-3\left(3e^{-3t+18}-2e^{-2t+12}\right)h_6(t)\right) \\ &\quad +5\left(\left(3e^{-3t}-e^{-2t}\right)-3\left(-e^{-3t+18}+e^{-2t+12}\right)h_6(t)\right) \\ &\quad +6\left(\left(\frac{1}{2}-e^{-3t}+\frac{1}{2}e^{-2t}\right)-3\left(\frac{1}{6}+\frac{e^{-3(t-6)}}{3}-\frac{e^{-2(t-6)}}{2}\right)h_6(t)\right) \\ &= 3-3h_6(t)=3\left(h_0(t)-h_6(t)\right)=u(t) \end{aligned}$$