Matemáticas II
Grado Ingeniería Eléctrica/Electrónica Industrial y Automática

Examen de problemas, 5 de septiembre de 2012

1. **(1.5 ptos.)** Encuentre en $\mathbb{C}$ las singularidades de la siguiente función e indique su tipo:

$$f(z) = \frac{1}{5 + 3 \operatorname{sen} z}$$

Solución: Las singularidades de $f(z)$ son los ceros del denominador, debemos resolver la ecuación:

$$5 + 3 \operatorname{sen} z = 0$$

Para ello utilizamos la definición de $\operatorname{sen} z$ en términos de la función exponencial

$$5 + 3 \underbrace{\left(\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \right)}_{\operatorname{sen} z} = 0$$

Hacemos el cambio

$$e^{iz} = w$$

y como $w \neq 0$

$$e^{-iz} = \frac{1}{e^{iz}} = \frac{1}{w}$$

De esta forma se obtiene una ecuación en la nueva variable w

$$5 + 3 \frac{w - \dfrac{1}{w}}{2i} = 0 \Rightarrow 5 + 3 \frac{w^2 - 1}{2iw} = 0$$

Multiplicando por $2iw$ obtenemos una ecuación de segundo grado

$$10iw + 3\left(w^2 - 1\right) = 0 \Rightarrow 3w^2 + 10iw - 3 = 0$$

que podemos resolver mediante la correspondiente fórmula

$$w = \frac{-10i \pm \sqrt{(-10i)^2 - 4 \cdot (3)(-3)}}{2 \cdot 3} = \frac{-10i \pm \sqrt{-100 + 36}}{6} = \frac{-10i \pm \sqrt{-64}}{6} = \frac{-10i \pm 8i}{6}$$

lo que nos da dos soluciones

$$w_1 = \left(\frac{-10i + 8i}{6} \right) = \frac{-2i}{6} = -\frac{i}{3}$$

$$w_2 = \left(\frac{-10i - 8i}{6} \right) = -\frac{18i}{6} = -3i$$

Con estos valores para w_1 y w_2 y teniendo en cuenta el cambio que se hizo al principio del ejercicio obtendremos, mediante la definición de logaritmo complejo $e^{iz} = w \Rightarrow iz = \log w = \ln|w| + i \arg w$

$$iz_1 = \log\left(-\frac{i}{3}\right) = \ln\frac{1}{3} + i\left(\frac{3\pi}{2} + 2k\pi\right) \Rightarrow z_1 = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi + i\ln 3$$

$$iz_2 = \log(-3i) = \ln 3 + i\left(\frac{3\pi}{2} + 2k\pi\right) \Rightarrow z_2 = \left(\frac{3\pi}{2} + 2k\pi\right) - i\ln 3$$

De este resultado se deduce que hay infinitas singularidades. Son todas de tipo polo simple.

2. **(1.75 ptos.)** Encuentre, demostrando su existencia, una función $u(x,y)$, de manera que la función $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ sea entera y se cumpla $f(0) = 1$, siendo $v(x,y)$ definida por

$$\operatorname{Im}(f(z)) = v(x,y) = -2x^2 + 2y^2 + 6x^2y - 2y^3$$

Exprese f como función de z.

Solución: Como se dice en el enunciado que $f(x,y)$ debe ser entera, su parte imaginaria $v(x,y)$ debe ser una función armónica y cumplirá la ecuación de Laplace

$$v_{xx} + v_{yy} = 0 \tag{1}$$

Derivando $v(x,y)$ respecto x e y, una vez

$$\begin{aligned} v_x &= -4x + 12xy \\ v_y &= 4y + 6x^2 - 6y^2 \end{aligned}$$

y otra

$$\begin{aligned} v_{xx} &= -4 + 12y \\ v_{yy} &= 4 - 12y \end{aligned}$$

y al sustituir en 1

$$\underbrace{(-4 + 12y)}_{v_{xx}} + \underbrace{(4 - 12y)}_{v_{yy}} = 0$$

luego $v(x,y)$ es armónica.

Para el cálculo de $u(x,y)$, la parte real de $f(x,y)$, tendremos que aplicar las ecuaciones de Cauchy-Riemann:

$$\begin{aligned} u_x &= v_y \\ u_y &= -v_x \end{aligned}$$

De la primera de estas ecuaciones (aunque esta elección es indiferente para el resultado final):

$$u_x = v_y \Leftrightarrow u_x = 4y + 6x^2 - 6y^2$$

e integrando respecto a x obtenemos $u(x,y)$

$$u = \int 4y + 6x^2 - 6y^2 \; dx = 4xy + 2x^3 - 6y^2x + \varphi(y)$$

$\varphi\left(\mathrm{y}\right)$ es constante para x y para encontrar su expresión derivamos respecto de y

$$u_y = 4x - 12yx + \varphi'\left(y\right)$$

Por la segunda de las ecuaciones de Cauchy-Riemann, esta expresión debe coincidir con $-v_x = -\left(-4x + 12xy\right)$:

$$4x - 12yx + \varphi'\left(y\right) = 4x - 12xy$$

de donde se deduce que

$$\varphi'\left(y\right) = 0$$

e integrando respecto a y se obtiene

$$\varphi\left(y\right) = c \in \mathbb{R}$$

La expresión para $u\left(x,y\right)$ será

$$u\left(x,y\right) = 4xy + 2x^3 - 6y^2x + c$$

y la función $f\left(x,y\right)$

$$f\left(x,y\right) = \left(4xy + 2x^3 - 6y^2x + c\right) + i\left(-2x^2 + 2y^2 + 6x^2y - 2y^3\right)$$

Notar que si $z = x + iy$, entonces podemos expresar $f\left(x,y\right)$ como función de z de la forma

$$f\left(z\right) = 2z^3 - 2iz^2 + c$$

Como $f\left(0\right) = 1$, podemos comprobar que $c = 1$.

3. **(1.75 ptos.)** Calcule el desarrollo de Laurent de la función

$$f\left(z\right) = \frac{3z}{\left(2z+1\right)\left(z-1\right)}$$

en el anillo $A\left(0,\frac{1}{2},1\right) = \left\{z \in \mathbb{C} : \frac{1}{2} < |z| < 1\right\}$.

Indique la parte regular y esencial de dicho desarrollo.

Solución: La función puede expresarse como

$$f\left(z\right) = \frac{3z}{\left(2z+1\right)\left(z-1\right)} = \frac{3z}{2\left(z+1/2\right)\left(z-1\right)}$$

Como buscamos potencias de z la mejor descomposición en factores simples es la siguiente:

$$f\left(z\right) = \frac{3z}{2\left(z+1/2\right)\left(z-1\right)} = \frac{1}{2}\left(\frac{A}{z+1/2} + \frac{B}{z-1}\right)$$

Para la expresión entre paréntesis tenemos

$$\frac{A\left(z-1\right) + B\left(z+1/2\right)}{\left(z+1/2\right)\left(z-1\right)}$$

Por tanto

$$A\left(z-1\right) + B\left(z+1/2\right) = 3z$$

y dando a z los valores de las raíces

$$\left.\begin{array}{l} z=-\dfrac{1}{2}\Rightarrow A\left(-\dfrac{1}{2}-1\right)=-\dfrac{3}{2}\Rightarrow -\dfrac{3A}{2}=-\dfrac{3}{2}\Rightarrow A=1 \\ \\ z=1\Rightarrow B\left(1+1/2\right)=3\Rightarrow \frac{3}{2}B=3\Rightarrow B=2 \end{array}\right\}$$

La descomposición es

$$f\left(z\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{A}{z+1/2}+\frac{B}{z-1}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{z+1/2}+\frac{2}{z-1}\right)$$

El desarrollo de Laurent en el conjunto indicado $\frac{1}{2}<|z|<1$ de cada fracción se hace de forma independiente.

Para la primera fracción y como $\frac{1}{2}<|z|$, entonces $\frac{1}{2|z|}=\frac{1}{|2z|}<1$

$$\frac{1}{z+1/2}=\frac{1}{z}\frac{1}{1+\frac{1}{2z}}=\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{2z}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^n}\frac{1}{z^{n+1}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2^{n-1}}\frac{1}{z^n}\ \text{con}\ \left|\frac{1}{2z}\right|<1$$

Para la segunda fracción y como $|z|<1$ el desarrollo es

$$\frac{1}{z-1}=-\frac{1}{1-z}=-\sum_{n=0}^{\infty}z^n \qquad |z|<1$$

La función tendrá el siguiente desarrollo de Laurent

$$f\left(z\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{z+1/2}+\frac{2}{z-1}\right)=\frac{1}{2}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2^{n-1}}\frac{1}{z^n}-2\sum_{n=0}^{\infty}z^n\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2^n}\frac{1}{z^n}-\sum_{n=0}^{\infty}z^n$$

agrupando potencias negativas y positivas obtendremos las partes regular y singular:

$$f\left(z\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2^n}\frac{1}{z^n}-\sum_{n=0}^{\infty}z^n$$

y por tanto

$$\begin{array}{ll} \text{Parte Regular:} & -\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}z^n \\ \text{Parte Esencial:} & \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2^n}\frac{1}{z^n} \end{array}$$

4. Calcule las siguientes integrales utilizando la teoría de variable compleja.

   a) **1.5 ptos.**

$$\int_0^{2\pi}\frac{1}{26-10\cos t}dt$$

b) **1.75 ptos.**

$$\int_{\gamma} \left(\operatorname{Re}(z)^2 - \operatorname{Im} z\right) + i\left(5 \operatorname{Im} z - \operatorname{Re} z\right) dz, \quad \text{donde } \gamma(t) = t + it^2; \quad t \in [0,1]$$

Solución: La primera es una integral trigonométrica que hay que resolver haciendo los cambios correspondientes. Para la segunda integral hay que emplear la definición puesto que comprobaremos posteriormente la curva no es cerrada.

a) Haciendo los cambios correspondientes

$$\begin{aligned} e^{it} &= z \\ \cos t &= \frac{e^{it}+e^{-it}}{2} = \frac{z^2+1}{2z} \\ \operatorname{sen} t &= \frac{e^{it}-e^{-it}}{2i} = \frac{z^2-1}{2zi} \\ dt &= \frac{1}{iz} dz \end{aligned}$$

la integral queda

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{26 - 10\cos t} dt = \int_{\gamma} \frac{1}{26 - 10\left(\frac{z^2+1}{2z}\right)} \frac{1}{iz} dz = \frac{1}{i} \int_{\gamma} \frac{1}{26z - 5z^2 - 5} dz = i \int_{\gamma} \frac{1}{5(z-5)\left(z - \frac{1}{5}\right)} dz$$

siendo $\gamma(t) = e^{it}$, con $t \in [0, 2\pi]$, la circunferencia unidad. Para el cálculo de la integral mediante residuos, sólo se consideran las singularidades que están dentro de la curva, en este caso sólo es $z_1 = \frac{1}{5}$

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{26 - 10\cos t} dt = (2\pi i)\, i \operatorname{Res}\left(\frac{1}{5(z-5)\left(z-\frac{1}{5}\right)}, \frac{1}{5}\right) = 2\pi i^2 \frac{1}{5\left(\frac{1}{5} - 5\right)} = \frac{\pi}{12}$$

b) La función

$$f(z) = \left((\operatorname{Re} z)^2 - \operatorname{Im} z\right) + i\left(5 \operatorname{Im} z - \operatorname{Re} z\right) = \left(x^2 - y\right) + i\left(5y - x\right)$$

no es derivable en ningún punto, puesto que si planteamos las ecuaciones de Cauchy-Riemann

$$u = x^2 - y \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} u_x = 2x \\ u_y = -1 \end{array} \right.$$

$$v = 5y - x \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} v_x = -1 \\ v_y = 5 \end{array} \right.$$

vemos que la segunda ecuación $u_y = -v_x$, no se cumple nunca, además la curva no es cerrada puesto que

$$\left. \begin{array}{r} \gamma(0) = 0 \\ \gamma(1) = 1 + i \end{array} \right\} \Rightarrow \gamma(0) \neq \gamma(1)$$

y debemos utilizar la definición de integral a lo largo de una curva

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_a^b f(\gamma(t))\,\gamma'(t)\,dt$$

siendo en este caso

$$\begin{array}{rcl} \gamma & : & [0,1] \longrightarrow \mathbb{C} \\ \gamma(t) & = & t + it^2 \quad t \in [0,1] \Rightarrow \gamma'(t) = 1 + i2t \end{array}$$

Por tanto

$$\begin{array}{rl} & \displaystyle\int_\gamma \left((\operatorname{Re} z)^2 - \operatorname{Im} z\right) + i\,(5\operatorname{Im} z - \operatorname{Re} z)\,dz \\ = & \displaystyle\int\limits_0^1 \left\{\left((\operatorname{Re}\gamma(t))^2 - \operatorname{Im}\gamma(t)\right) + i\,(5\operatorname{Im}\gamma(t) - \operatorname{Re}\gamma(t))\right\}\gamma'(t)\,dt \end{array}$$

que para $\gamma(t)$

$$\begin{array}{rcl} \operatorname{Re}(\gamma(t)) & = & t \\ \operatorname{Im}(\gamma(t)) & = & t^2 \end{array}$$

La integral es

$$\int_0^1 \left\{\left(t^2 - t^2\right) + i\left(5t^2 - t\right)\right\}(1 + i2t)\,dt = \int_0^1 i\left(5t^2 - t\right)(1 + i2t)\,dt = i\int_0^1 \left(5t^2 + 10it^3 - t - i2t^2\right)dt$$

e integrando directamente

$$i\int_0^1 \left(5t^2 + 10it^3 - t - i2t^2\right)dt = i\left(5\frac{t^3}{3} + 10i\frac{t^4}{4} - \frac{t^2}{2} - i2\frac{t^3}{3}\right)\Bigg|_0^1 = i\left(\frac{5}{3} + \frac{10i}{4} - \frac{1}{2} - i\frac{2}{3}\right) = -\frac{11}{6} + \frac{7}{6}i$$

5. **(1.75 ptos.)** Resuelva mediante la transformada de Laplace el siguiente problema del valor inicial:

$$\begin{cases} y''(t) - 3y'(t) + 2y(t) = e^{4t} \qquad t \geq 0 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

Compruebe que la solución obtenida cumple las condiciones iniciales, así como la ecuación diferencial.

Solución: Para resolver la ecuación diferencial

$$y''(t) - 3y'(t) + 2y(t) = e^{4t}$$

junto con las condiciones iniciales $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$, aplicaremos la transformada $\mathcal{L}$ y sus propiedades: linealidad y desplazamiento

$$\mathcal{L}\left[y''(t) - 3y'(t) + 2y(t)\right](z) = \mathcal{L}\left[e^{4t}\right](z)$$

Primero la linealidad

$$\mathcal{L}\left[y''(t)\right](z)-3\mathcal{L}\left[y'(t)\right](z)+2\mathcal{L}\left[y(t)\right](z)=\mathcal{L}\left[e^{4t}\right](z)$$

y a continuación la propiedad de desplazamiento junto con las condiciones iniciales

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\left[y''(t)\right](z) &= z^2\mathcal{L}\left[y(t)\right](z)-zy(0)-y'(0)=z^2\mathcal{L}\left[y(z)\right](z)\\
\mathcal{L}\left[y'(t)\right](z) &= z\mathcal{L}\left[y(t)\right](z)-y(0)=z\mathcal{L}\left[u(t)\right](z)\\
\mathcal{L}\left[y(t)\right](z) &= \mathcal{L}\left[y(t)\right](z)
\end{aligned}$$

Sustituyendo en la ecuación

$$\begin{aligned}
z^2\mathcal{L}\left[y(t)\right](z)-3z\mathcal{L}\left[u(t)\right](z)+2\mathcal{L}\left[y(t)\right](z) &= \mathcal{L}\left[e^{4t}\right](z)\\
\left(z^2-3z+2\right)\mathcal{L}\left[y_n\right](z) &= \mathcal{L}\left[e^{4t}\right](z)
\end{aligned}$$

y despejando

$$\mathcal{L}\left(y_n\right)[z]=\frac{\mathcal{L}\left[e^{4t}\right](z)}{\left(z^2-3z+2\right)}$$

El valor de $\mathcal{L}\left[e^{4t}\right](z)$ lo obtenemos mediante la aplicació de las propiedades de la transformada

$$\mathcal{L}\left[e^{\omega t}\right](z)=\frac{1}{z-\omega}\qquad \text{si } \operatorname{Re} z>\operatorname{Re}\omega \Rightarrow \mathcal{L}\left[e^{4t}\right](z)=\frac{1}{z-4}\qquad \text{si } \operatorname{Re} z>4$$

o también de forma directa mediante la definición $\mathcal{L}$

$$\mathcal{L}\left[e^{4t}\right](z)=\int_0^\infty e^{4t}e^{-zt}dt=\int_0^\infty e^{(4-z)t}dt=\frac{1}{4-z}e^{(4-z)t}\Big|_{t=0}^{t=\infty}=\frac{1}{z-4}\qquad \text{si } \operatorname{Re}(z)>4$$

Sustituyendo obtenemos la transformada de $y(t)$

$$\mathcal{L}\left(y(t)\right)[z]=\frac{\mathcal{L}\left[e^{4t}\right](z)}{\left(z^2-3z+2\right)}=\frac{\frac{1}{z-4}}{\left(z^2-3z+2\right)}=\frac{1}{(z-4)\left(z^2-3z+2\right)}=\frac{1}{(z-4)(z-1)(z-2)}$$

Mediante la transformada inversa obtendremos el valor de $y(t)$

$$y(t)=\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{(z-4)(z-1)(z-2)}\right)$$

Mediante residuos:

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\tfrac{1}{(z-4)(z-1)(z-2)}\right)(t)=\operatorname{Res}\left(\tfrac{e^{zt}}{(z-4)(z-1)(z-2)},1\right)+\operatorname{Res}\left(\tfrac{e^{zt}}{(z-4)(z-1)(z-2)},2\right)+\operatorname{Res}\left(\tfrac{e^{zt}}{(z-4)(z-1)(z-2)},4\right)$$

Como son todos polos simples, este calculo es directo

$$\begin{aligned}
\operatorname{Res}\left(\tfrac{e^{zt}}{(z-4)(z-1)(z-2)},1\right) &= \lim_{z\to1}(z-1)\frac{e^{zt}}{(z-4)(z-1)(z-2)}=\lim_{z\to1}\frac{e^{zt}}{(z-4)(z-2)}=\frac{e^t}{3}\\
\operatorname{Res}\left(\tfrac{e^{zt}}{(z-4)(z-1)(z-2)},2\right) &= \lim_{z\to2}(z-2)\frac{e^{zt}}{(z-4)(z-1)(z-2)}=\lim_{z\to2}\frac{e^{zt}}{(z-4)(z-1)}=-\frac{e^{2t}}{2}\\
\operatorname{Res}\left(\tfrac{e^{zt}}{(z-4)(z-1)(z-2)},4\right) &= \lim_{z\to4}(z-4)\frac{e^{zt}}{(z-4)(z-1)(z-2)}=\lim_{z\to4}\frac{e^{zt}}{(z-1)(z-2)}=\frac{e^{4t}}{6}
\end{aligned}$$

por tanto

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{(z-4)(z-1)(z-2)}\right)=\frac{e^{t}}{3}-\frac{e^{2t}}{2}+\frac{e^{4t}}{6}$$

Podemos comprobar que se cumplen las condiciones iniciales

$$y(0)=\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{6}=0$$

y derivando

$$y'(t)=\frac{e^{t}}{3}-\frac{2e^{2t}}{2}+\frac{4e^{4t}}{6}=\frac{e^{t}}{3}-e^{2t}+\frac{2e^{4t}}{3}$$

que en el punto $t=0$

$$y'(0)=\frac{1}{3}-\frac{2}{2}+\frac{4}{6}=0$$

Y también la ecuación diferencial. Calculamos la segunda derivada de $y(t)$

$$y''(t)=\frac{e^{t}}{3}-2e^{2t}+\frac{8e^{4t}}{3}$$

y sustituyendo en la ecuación diferencial

$$y''(t)-3y'(t)+2y(t)=\left(\frac{e^{t}}{3}-2e^{2t}+\frac{8e^{4t}}{3}\right)-3\left(\frac{e^{t}}{3}-e^{2t}+\frac{2e^{4t}}{3}\right)+2\left(\frac{e^{t}}{3}-\frac{e^{2t}}{2}+\frac{e^{4t}}{6}\right)=e^{4t}$$