industriales
etsii UPCT

Curso 2016/2017
Grado en Ingeniería Eléctrica
Matemáticas II - Problemas
Funciones de variable compleja

1. Sea $B(0,2) = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 2\}$, la bola abierta de centro 0 y radio 2, calcula y representa el conjunto $f(D)$ para:

   a) $f(z) = 3 + i + z$ b) $g(z) = (1+i)z$ c) $h(z) = \dfrac{1}{z}$

2. Encuentra las partes real e imaginaria de las siguientes funciones:

   a) $f(z) = 3z^2 - iz$ b) $g(z) = \bar{z} + \dfrac{1}{z}$ c) $h(z) = z^3 + z + 1$ d) $k(z) = \cosh(z - i)$

   e) $k(z) = \dfrac{1-z}{1+z}$ f) $l(z) = z^2 + i$ g) $m(z) = \dfrac{1}{\bar{z}}$ h) $o(z) = \tan z$

3. Expresa en forma binómica las siguientes expresiones:

   a) $e^i + e^{i\pi}$ b) e^{-1+i} c) $\log(-7\pi i)$ d) $\log(-1-i)$

   e) $\operatorname{sen}(3i)$ f) $\operatorname{sen}(1+i)$ g) $\cos(-2i)$ h) $\log(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i)$

4. Estudia las singularidades de las siguientes funciones, indicando su tipo:

   a) $f(z) = \dfrac{1}{\operatorname{sen} z}$ b) $f(z) = \dfrac{1}{e^z + 1}$ c) $f(z) = \dfrac{1+z^2}{z-i}$

   d) $f(z) = e^{-1/z}$ e) $f(z) = \dfrac{z^5+1}{z^2+4}$ f) $f(z) = \dfrac{1}{(z^2+1)(z-3)}$

   g) $f(z) = \dfrac{2z+1}{z(z^2+1)}$ h) $f(z) = \dfrac{z^3+i}{z^2-3z+2}$ i) $f(z) = \dfrac{z^2+1}{(z+2)(z^2+2z+2)}$

5. Expresa en forma binómica las siguientes expresiones:

   a) $\left[\dfrac{\sqrt{2}}{2} - \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right]^i$ b) i^{i^i} c) $(1+i)^{e^{-i}}$ d) $i^{\log i}$

6. Calcula para $\theta = \frac{-2\pi}{3}, \frac{-\pi}{4}, 0, \pi$, el valor de los siguientes logaritmos:

   a) $L_\theta(3i)$ b) $L_\theta(-2i)$ c) $L_\theta(1+i)$ d) $L_\theta(-1-i)$ e) $L_\theta(-1)$

7. Resuelve en $\mathbb{C}$ las siguientes ecuaciones:

   a) $e^z + i = 0$ b) $4\cos z + 5 = 0$ c) $\operatorname{sen} z = 4$

   d) $2\cosh^2 z - \operatorname{senh}^2 z + \coth^2 z = 2$) e) $\cosh^2 z - 3\operatorname{senh} z + 1 = 0$ f) $2\operatorname{sen} z - i\cos z = i$

   g) $2\cos z - i\operatorname{sen} z = i$ h) $\cos z = 4$ i) $e^z = 1 + i$

8. Demuestra que si $z = x + iy$, entonces se cumplen las siguientes igualdades

$$\text{a) } |e^z| = e^x$$

$$\text{b) } \overline{e^z} = e^{\overline{z}}$$

9. Dado el número complejo $z \in \mathbb{C}$, prueba que: $ze^z + \overline{z}e^{\overline{z}} \in \mathbb{R}$.

10. Calcula los valores de α, β, $\gamma \in \mathbb{R}$ para que sea entera la función:

$$f(z) = \operatorname{Re} z + \alpha \cdot \operatorname{Im} z + i(\beta \cdot \operatorname{Re} z + \gamma \cdot \operatorname{Im} z)$$

    Identifícala como función de z.

11. Halla los puntos donde las siguientes funciones son derivables y calcula en ellos la derivada correspondiente:

    a) $f(z) = \left|\operatorname{Re}(z)^2 - \operatorname{Im}(z)^2\right| + 2\,i\,|\operatorname{Re}(z)\operatorname{Im}(z)|$ b) $f(z) = z\operatorname{Im}(z)$

12. (*) Sean $D = B(z_0, r)$, con $z_0 \in \mathbb{C}$ y $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ una función con $f(z)$ y $\bar{f}(z) \in H(D)$. Demuestra que f es constante en D.

13. Estudia los puntos donde las siguientes funciones son derivables y calcula en ellos la derivada correspondiente:

    a) $f(z) = \overline{z}\operatorname{Im} z$ b) $f(z) = z\operatorname{Im} z$ c) $f(x+iy) = e^{-y}e^{ix}$

    d) $f(z) = z \cdot \overline{z}$ e) $f(z) = (z^2 - 2)e^{-z}$ f) $f(x+iy) = e^{y}e^{ix}$

    g) $f(z) = (z^2 + \cos z)e^z$ h) $f(z) = 3x + y + i\,(3y - x)$ i) $f(x+iy) = xy + iy$

14. (*) Prueba que:

   a) Si v y V son armónicas conjugadas de una misma función u en D, entonces v y V difieren a los sumo en una constante.

   b) Si v es armónica conjugada de u en D y u es armónica conjugada de v, entonces u y v han de ser constantes en D.

15. Calcula utilizando las condiciones de Cauchy-Riemann, las derivadas de las siguientes funciones:

   a) $f(z) = e^z$ b) $f(z) = \operatorname{sen} z$

   c) $f(z) = \cos z$ d) $f(z) = ize^z$

16. Identifica como función $f(z)$ la función holomorfa

$$f(x + i \cdot y) = -2 - x^2 - y - 4xy + y^2 + i \cdot (1 + x + 2x^2 - 2xy - 2y^2).$$

17. Comprueba que las siguientes funciones son armónicas, encuentra sus armónicas conjugadas y expresa las correspondientes funciones $f(x + i \cdot y) = u(x, y) + i \cdot v(x, y)$ como funciones $f(z)$.

   a) $u(x, y) = 2x(1 - y)$

   b) $u(x, y) = 2x - x^3 + 3xy^2$

   c) $u(x, y) = 2e^x \cos y$

   d) $u(x, y) = y/(x^2 + y^2)$

   e) $u(x, y) = \log(x^2 + y^2)$

   f) $u(x, y) = \arctan y/x$

   g) $v(x, y) = 4x - 4x^2 - 3y - 2xy + 3x^2y + 4y^2 - y^3$

   h) $u\,(x, y) = \operatorname{senh} x \operatorname{sen} y$

18. Comprueba que las siguientes funciones son armónicas, encuentra sus armónicas conjugadas y expresa las correspondientes funciones $f(x + i \cdot y) = u(x, y) + i \cdot v(x, y)$ como funciones $f(z)$.

   a) $u(x, y) = x/(x^2 + y^2)$ con $f(\pi) = 1/\pi$

   b) $u(x, y) = x^2 - y^2 + 2x$ con $f(i) = 2i - 1$

   c) $u(x, y) = x^3 - 3xy^2$ con $f(1) = 1$

   d) $u(x, y) = x^2 - y^2 + 2xy - x + 3$ con $f(2 - i) = -8i$

   e) $u\,(x, y) = 2 \operatorname{sen} x \cosh y - x$ con $f\,(0) = 0$

19. Estudia qué valores de los parámetros $a, b \in R$ hacen que las siguientes funciones sean armónicas, cuando lo sean encuentra las correspondientes funciones holomorfas $f(x + i \cdot y) = u(x, y) + i \cdot v(x, y)$ e identifícalas como funciones $f(z)$.

a) $u(x, y) = a \cdot x^2 + b \cdot y^2 - xy + 2x + 3y - 1$

b) $v(x, y) = ax^3y - 4xy^3$

c) $u(x, y) = x^3 + axy^2$

d) $u(x, y) = y^3 + ax^2y$

e) $v(x, y) = ax^3 - 4xy^3$

(*) Ejercicios con dificultad especial.