1. Calcule las integrales $\int_\gamma f(z)\, dz$ en los siguientes casos:

   a) $f(z) = \mathrm{Re}(z)$ y γ el triángulo de vértices $\{0,\ 1+i,\ 2\}$ orientado negativamente.
   b) $f(z) = \bar{z}$ y γ la curva de la figura 1.
   c) $f(z) = |z|\,\overline{z}$ y γ la curva de la figura 1.

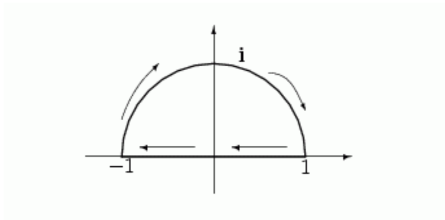

Figura 1

   d) $f(z) = z/\overline{z}\, dz$ y γ la curva de la figura 2.

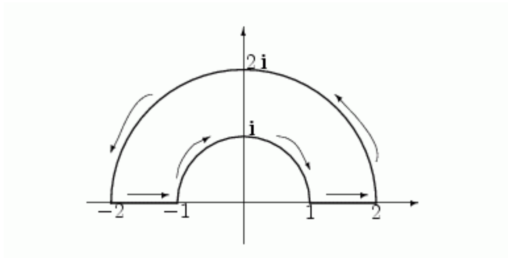

Figura 2

   e) $f(z) = z^4$ y γ la curva representada en la figura 3, que une los puntos $z_0 = -P + 0i$ y $z_1 = P + 0i$, siendo $P = 8\pi$.

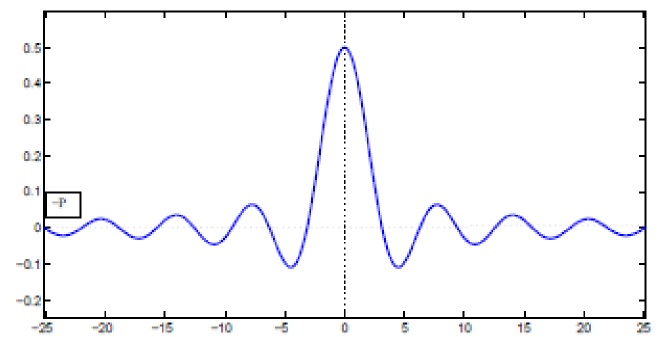

Figura 3

f) $f(z) = ze^z$ y $\gamma(t) = t^2 + it$, con $t \in \left[0, \frac{4}{3}\right]$.

g) $f(z) = \operatorname{sen}(\bar{z})$ y γ la curva representada en la figura 4.

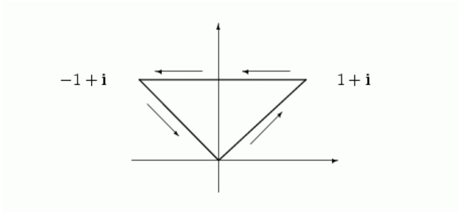

Figura 4

2. Calcule la integral $\int_\gamma \frac{1}{z - z_0}\, dz$, siendo $\gamma(t) = e^{i\,t}$, $t \in [0, 2\pi]$ en cada caso:

   a) Para $|z_0| > 1$

   b) Para $|z_0| < 1$

3. Calcule las siguientes integrales:

   a) $\displaystyle\int_\gamma \frac{\operatorname{sen}(\,e^z)}{z}\, dz,\ \gamma(t) = e^{i\,t}, \quad t \in [0, 2\pi].$

   b) $\displaystyle\int_\gamma \frac{e^{1/z}}{(z-1)^2}\, dz,\ \gamma(t) = 1 + \frac{e^{i\,t}}{2}, \quad t \in [0, 2\pi]$

   c) $\displaystyle\int_\gamma \frac{z\, e^z}{(z-i)^3}\, dz,\ \gamma(t) = i + e^{i\,t}, \quad t \in [0, 2\pi]$

4. Calcule para $r > 1$ el valor de la integral

$$\int_\gamma \frac{z}{z^4 - 1}\, dz, \qquad \gamma(t) = r + r\, e^{i\,t}, \quad t \in [0, 2\pi]$$

5. (*) Sea γ la elipse de ecuación $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Sabiendo que $\int_\gamma \dfrac{1}{z} dz = 2\pi i$ compruebe que

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{a^2 \cos^2 t + b^2 \operatorname{sen}^2(t)}\, dt = \frac{2\pi}{ab}$$

6. Calcule la integral

$$\int_\gamma \frac{e^z}{z\,(1-z)^3}\, dz$$

   a) Para $\gamma(t) = r\, e^{i\,t}$, $t \in [0, 2\pi]$ con $0 < r < 1$.

   b) Para $\gamma(t) = 1 + r\, e^{i\,t}$, $t \in [0, 2\pi]$ con $0 < r < 1$.

   c) Para $\gamma(t) = re^{i\,t}$, $t \in [0, 2\pi]$ con $1 < r$.

7. Calcule la integral:

$$\int_\gamma \frac{1}{z^2 + 9}\, dz$$

a) Para $\gamma(t) = 3\,i + e^{i\,t}$, $t \in [0, 2\pi]$

b) Para $\gamma(t) = -2\,i + 2\,e^{i\,t}$, $t \in [0, 2\pi]$

c) Para $\gamma(t) = 4\,e^{i\,t}$, $t \in [0, 2\pi]$

d) Para $\gamma(t) = e^{i\,t}$, $t \in [0, 2\pi]$

8. Calcule el valor de la integral $\displaystyle\int_\gamma \frac{1}{z}\,dz$ siendo γ la curva de la figura 5.

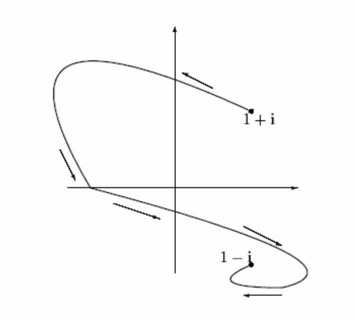

Figura 5

9. Sea γ el contorno del dominio entre $|z| = 4$ y el cuadrado cuyos lados están en las rectas $x = \pm 1$, e $y = \pm 1$. Suponiendo γ orientado positivamente, justifica que $\int_\gamma f\,(z)\,dz = 0$ para:

$$\text{a) } f\,(z) = \frac{1}{3z^2+1} \qquad \text{b) } f\,(z) = \frac{z+2}{\cos\frac{z}{2}} \qquad \text{c) } f\,(z) = \frac{z}{1-e^z}$$

10. Calcule el valor de la integral:

$$\int_\gamma \cos\left(\frac{1}{z+2i}\right)\,dz$$

donde γ es la elipse centrada en el origen de semiejes 2 y 1 y recorrida en sentido positivo.

11. Calcula el valor de la integral $\int_\gamma \overline{z}\,|z|^2\,dz$, siendo γ la curva de la figura 6.

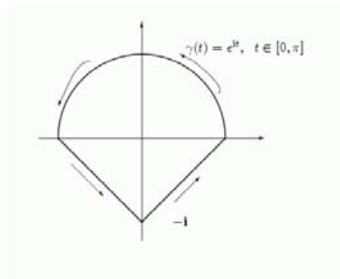

Figura 6

(*) Ejercicios con dificultad especial.