Capítulo 4

Cálculo diferencial de funciones de varias variables

4.1. Derivadas direccionales y parciales

Definición 4.1 *Sea $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, con A un conjunto abierto, sea $\overrightarrow{a} \in A$ y $\overrightarrow{v} \in \mathbb{R}^n$, con $\overrightarrow{v} \neq 0$. Llamamos* derivada de f en $\overrightarrow{a}$ en la dirección $\overrightarrow{v}$ (o según $\overrightarrow{v}$) *y expresamos como $D_{\overrightarrow{v}} f(\overrightarrow{a})$, al límite*

$$D_{\overrightarrow{v}} f(\overrightarrow{a}) = \lim_{t \to 0} \frac{f(\overrightarrow{a} + t\overrightarrow{v}) - f(\overrightarrow{a})}{t}$$

Si $\|\overrightarrow{v}\| = 1$, entonces la derivada anterior se denomina derivada direccional de f en $\overrightarrow{a}$ según $\overrightarrow{v}$.

Ejemplo 4.1 *Calcularemos la derivada de $f(x, y) = xy$ en el punto $\overrightarrow{a} = (1, 1)$ en la dirección $\overrightarrow{v} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$. Para ello, utilizamos la definición que acabamos de introducir*

$$\begin{aligned}
D_{\overrightarrow{v}} f(\overrightarrow{a}) &= D_{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)} f(1,1) = \lim_{t \to 0} \frac{f\left((1,1) + t\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right) - f(1,1)}{t} \\
&= \lim_{t \to 0} \frac{f\left(1 + \frac{t}{\sqrt{2}}, 1 + \frac{t}{\sqrt{2}}\right) - f(1,1)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{\left(1 + \frac{t}{\sqrt{2}}\right)\left(1 + \frac{t}{\sqrt{2}}\right) - 1}{t} \\
&= \lim_{t \to 0} \frac{1 + \frac{2t}{\sqrt{2}} + \frac{t^2}{2} - 1}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{\frac{2t}{\sqrt{2}} + \frac{t^2}{2}}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{2}{\sqrt{2}} + \frac{t}{2} = \frac{2}{\sqrt{2}}.
\end{aligned}$$

Luego

$$D_{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)} f(1,1) = \frac{2}{\sqrt{2}}.$$

En la imagen 4.1 vemos la interpretación geométrica de la derivada direccional: Es la variación que experimenta la función f en la dirección $\overrightarrow{v}$ en el punto $\vec{a}$.

Ejemplo 4.2 *Calculemos la derivada de $f(x, y) = xyz$ en el punto $\overrightarrow{a} = (1, 1, 1)$ en la dirección*

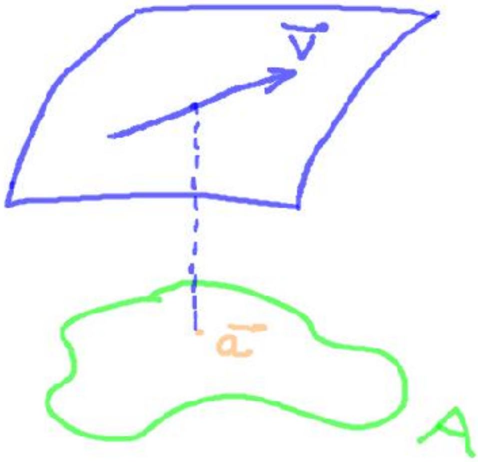


Figura 4.1: Interpretación geométrica de la derivada direccional.

$\overrightarrow{v} = (1, -1, 0)$.

$$\begin{aligned} D_{\overrightarrow{v}} f\left(\overrightarrow{a}\right) &= D_{(1,-1,0)} f(1,1,1) = \lim_{t\to 0} \frac{f((1,1,1) + t(1,-1,0)) - f(1,1,1)}{t} \\ &= \lim_{t\to 0} \frac{f(1+t, 1-t, 1) - f(1,1,1)}{t} \\ &= \lim_{t\to 0} \frac{(1+t)(1-t) - 1}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{1-t^2-1}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{-t^2}{t} = \lim_{t\to 0} -t = 0. \end{aligned}$$

Luego

$$D_{(1,-1,0)} f(1,1,1) = 0.$$

Definición 4.2 *Si tomamos como vector* $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{e_k} = \left(0, \ldots, \underbrace{1}_{k}, \ldots, 0\right)$, *el k–ésimo vector de la base canónica de $\mathbb{R}^n$, entonces $D_{\overrightarrow{e_k}} f\left(\overrightarrow{a}\right)$ es la llamada* derivada parcial de f *en $\overrightarrow{a}$ respecto a x_k y se escribe como $\frac{\partial f}{\partial x_k}\left(\overrightarrow{a}\right)$, también como $D_k f\left(\overrightarrow{a}\right)$ o como $f_{x_k}\left(\overrightarrow{a}\right)$, usando la definición por límites*

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}\left(\overrightarrow{a}\right) = \lim_{t\to 0} \frac{f\left(\overrightarrow{a} + t\overrightarrow{e_k}\right) - f\left(\overrightarrow{a}\right)}{t}$$

Ejemplo 4.3 *Vamos a obtener la expresión de las derivadas parciales para una función de dos variables. Sea $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$. Pondremos $\overrightarrow{a} = (x, y)$, las dos derivadas parciales serían:*

$$\text{En la dirección del eje } x \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \lim_{t\to 0} \frac{f((x,y) + t(1,0)) - f(x,y)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{f(x+t, y) - f(x,y)}{t},$$

$$\text{En la dirección del eje } y \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \lim_{t\to 0} \frac{f((x,y) + t(0,1)) - f(x,y)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{f(x, y+t) - f(x,y)}{t}.$$

Por ejemplo, supongamos que $f(x,y) = x^2 + y^2$*, entonces*

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= \lim_{t\to 0}\frac{f(x+t,y)-f(x,y)}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{(x+t)^2+y^2-\left(x^2+y^2\right)}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{x^2+t^2+2tx+y^2-\left(x^2+y^2\right)}{t} \\ &= \lim_{t\to 0}\frac{t^2+2tx}{t} = \lim_{t\to 0} t+2x = 2x\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= \lim_{t\to 0}\frac{f(x,y+t)-f(x,y)}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{x^2+(y+t)^2-\left(x^2+y^2\right)}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{x^2+t^2+2ty+y^2-\left(x^2+y^2\right)}{t} \\ &= \lim_{t\to 0}\frac{t^2+2ty}{t} = \lim_{t\to 0} t+2y = 2y\end{aligned}$$

Vemos que la derivada parcial de una función respecto de la variable x_k, se obtiene al considerar el resto de variables $x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}, x_{k+1}, \ldots, x_n$ como parámetros y tratar a la función f como una función de la variable x_k. Por ejemplo, sea $f(x,y) = xy$; su derivada parcial respecto de x se obtendrá considerando a la y como a una constante independiente de x, del mismo modo que si fuera un número real cualquiera, siendo por tanto

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}(xy) = y\frac{\partial}{\partial x}(x) = y\cdot 1 = y$$

mientras que, al calcular la derivada parcial de f respecto de y, es la variable x, la que se comporta como un parámetro

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}(xy) = x\frac{\partial}{\partial y}(y) = x\cdot 1 = x$$

Para el caso $n = 3$, utilizaremos como variables x, y, z y expresaremos las derivadas parciales como $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ y $\frac{\partial f}{\partial z}$. Por ejemplo para $f(x,y,z) = xyz$, se obtendrían las siguientes derivadas parciales:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = yz, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = xz, \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = xy$$

Ejemplo 4.4 *Calculemos las derivadas parciales de la función*

$$f(x,y) = e^{x^2+\operatorname{sen} y}$$

Para la variable x*, suponiendo que* y *es un parámetro*

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \left(e^{x^2+\operatorname{sen} y}\right)\frac{\partial}{\partial x}\left(x^2+\operatorname{sen} y\right) = 2xe^{x^2+\operatorname{sen} y}.$$

Mientras que para la derivada respecto variable y*, es* x *el que adquiere ahora el papel de parámetro:*

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \left(e^{x^2+\operatorname{sen} y}\right)\frac{\partial}{\partial y}\left(x^2+\operatorname{sen} y\right) = e^{x^2+\operatorname{sen} y}(0+\cos y) = e^{x^2+\operatorname{sen} y}\cos y$$

Ejemplo 4.5 *Calculemos las derivadas parciales de la función*

$$f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$$

Para la variable x, con y fija

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{y\left(x^2+y^2\right) - 2x\,(xy)}{\left(x^2+y^2\right)^2} = \frac{y^3 - x^2 y}{\left(x^2+y^2\right)^2}.$$

Mientras que para la variable y, con x fija

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{x\left(x^2+y^2\right) - 2y\,(xy)}{\left(x^2+y^2\right)^2} = \frac{x^3 - x y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}.$$

Ejemplo 4.6 *Calculemos las derivadas parciales de la función*

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3}{x^2+y^2} & si \quad (x,y) \neq (0,0) \\ \\ 0 & si \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Para $(x,y) \neq (0,0)$, la derivada parcial de f respecto de x es

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{3x^2\left(x^2+y^2\right) - 2x\left(x^3\right)}{\left(x^2+y^2\right)^2} = \frac{x^4 + 3x^2y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2},$$

mientras que la derivada parcial de f respecto de la variable y es

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{-2yx^3}{\left(x^2+y^2\right)^2}$$

Para el punto $(0,0)$ es necesario utilizar la definición de derivada parcial usando límites:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{t\to 0}\frac{f((0,0)+t(1,0)) - f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{f(t,0) - f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{\dfrac{t^3}{t^2+0^2} - 0}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{t^3}{t^3} = 1$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{t\to 0}\frac{f((0,0)+t(0,1)) - f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{f(0,t) - f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{\dfrac{0^3}{0^2+t^2} - 0}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{0}{t} = 0$$

Observación 4.1 *A diferencia del caso de funciones reales de una variable, una función $f(x_1,\ldots,x_n)$ puede tener derivadas parciales en un punto y sin embargo, no ser continua en ese punto.*

Ejemplo 4.7 *Vamos a comprobar que la función $f(x,y)$ definida como*

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & si \quad (x,y) \neq (0,0) \\ \\ 0 & si \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

tiene derivadas parciales en el punto $(0,0)$, pero no es continua en dicho punto.

Calculamos las derivadas parciales de $f(x,y)$ en $(0,0)$, usando la definición por límites

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{t\to 0}\frac{f((0,0)+t(1,0)) - f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{f(t,0) - f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{\dfrac{t\cdot 0}{t^2+0^2} - 0}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{0}{t} = 0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=\lim_{t\to 0}\frac{f\left((0,0)+t\,(0,1)\right)-f\,(0,0)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{f\,(0,t)-f\,(0,0)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{\dfrac{0\cdot t}{0^2+t^2}-0}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{0}{t}=0.$$

Ambos límites existen y son finitos y podemos decir por tanto que $f\,(x,y)$ tiene derivadas parciales en $(0,0)$ con valores

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=0$$

Sin embargo, $f\,(x,y)$ no es continua en $(0,0)$, para comprobarlo, vamos a calcular su límite en $(0,0)$ usando coordenadas polares

$$\lim_{r\to 0}f\,(r\cos\theta,r\operatorname{sen}\theta)=\lim_{r\to 0}\frac{(r\cos\theta)\,(r\operatorname{sen}\theta)}{r^2\cos^2\theta+r^2\operatorname{sen}^2\theta}=\lim_{r\to 0}\frac{r^2\cos\theta\operatorname{sen}\theta}{r^2}=\lim_{r\to 0}\cos\theta\operatorname{sen}\theta=\cos\theta\operatorname{sen}\theta.$$

que, como se comprueba, depende de θ y por tanto no existe; así que $f\,(x,y)$ no es continua en ese punto.

4.2. Derivadas parciales sucesivas

Sea $f : A\subseteq\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}$, con A un conjunto abierto y supongamos que f tiene derivadas parciales respecto de las variables x_k en todos los puntos de A, entonces, podemos definir la función *derivada parcial respecto a x_k* como

$$\begin{array}{cccc}\dfrac{\partial f}{\partial x_k}: & A\subseteq\mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}\\ & \overrightarrow{x} & \rightsquigarrow & \dfrac{\partial f}{\partial x_k}(\overrightarrow{x})\end{array}$$

Al ser una función de varias variables es suceptible de ser derivable de nuevo respecto de la misma variable x_k o también respecto de otra variable distinta x_j. Estas derivadas se denominan *derivadas parciales segundas, o de segundo orden (o de orden 2)* de f respecto de x_k y x_j

$$f_{x_kx_j}=\frac{\partial^2 f}{\partial x_k\partial x_j}=\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_k}\right)$$

Notar que con la notación usada el orden de derivación es de izquierda a derecha.

Podemos extender el concepto como sigue:

Definición 4.3 *Se llama* derivada parcial de orden k *respecto de las coordenadas $i_1,\ldots,i_k$ a la función*

$$f_{x_{i_1}\ldots x_{i_k}}=\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1}\ldots\partial x_{i_k}}=\frac{\partial}{\partial x_{i_k}}\left(\frac{\partial^{k-1}f}{\partial x_{i_1}\ldots\partial x_{i_{k-1}}}\right)$$

Definición 4.4 *Diremos que $f\in\mathcal{C}^k\,(A)$, si admite derivadas parciales de orden k respecto de todas las variables en todos los puntos de A y todas son continuas.*

Ejemplo 4.8 *Para encontrar las derivadas parciales de orden 2 de*

$$f\,(x,y)=x^2y+y^3,$$

derivamos en primer lugar respecto de cada una de las variables x e y:

$$\left\{\begin{array}{c}\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)=2xy\\[2ex] \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)=x^2+3y^2\end{array}\right.,$$

Cada derivada parcial obtenida se vuelve a derivar respecto de cada una de las variables

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=2xy \Longrightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)=\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right)=\dfrac{\partial}{\partial x}(2xy)=2y \\ \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y)=\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right)=\dfrac{\partial}{\partial y}(2xy)=2x \end{cases}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=x^2+3y^2 \Longrightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x,y)=\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right)=\dfrac{\partial}{\partial x}\left(x^2+3y^2\right)=2x \\ \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)=\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right)=\dfrac{\partial}{\partial y}\left(x^2+3y^2\right)=6y \end{cases}$$

Observemos que, en este caso, ocurre

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y)=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x,y)=2x$$

es decir el resultado obtenido es independiente del orden de derivación. Este resultado se puede extender mediante el siguiente teorema.

Teorema 4.1 (Teorema de Schwarz-Clairaut) *Sea $f: A\subseteq\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, con A un conjunto abierto y $f\in\mathcal{C}^1(A)$. Supongamos que existe la derivada parcial de segundo orden respecto de x_j y x_k, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_j\partial x_k}(\overrightarrow{a})$, y supongamos que es continua en $\overrightarrow{a}\in A \Longrightarrow$ Existe la derivada parcial de 2º orden respecto de x_k y x_j, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_k\partial x_j}(\overrightarrow{a})$ y además*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_k\partial x_j}(\overrightarrow{a})=\frac{\partial^2 f}{\partial x_j\partial x_k}(\overrightarrow{a})$$

La hipótesis de continuidad del teorema es esencial. Por ejemplo, consideremos la función

$$f(x,y)=\begin{cases} xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & \text{si} \quad (x,y)\neq(0,0) \\ \\ 0 & \text{si} \quad (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

Veamos que no se cumple el teorema de Schwarz-Clairaut. Primero calculamos las derivadas parciales primeras para puntos $(x,y)\neq(0,0)$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{\left(3x^2y-y^3\right)\left(x^2+y^2\right)-2x\left(x^3y-xy^3\right)}{\left(x^2+y^2\right)^2}=\frac{x^4y-y^5+4x^2y^3}{\left(x^2+y^2\right)^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\frac{\left(x^3-3xy^2\right)\left(x^2+y^2\right)-2y\left(x^3y-xy^3\right)}{\left(x^2+y^2\right)^2}=\frac{x^5-xy^4-4y^2x^3}{\left(x^2+y^2\right)^2}$$

mientras que para el punto $(0,0)$ se emplea la definición mediante límites

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\lim_{t\to 0}\frac{f(t,0)-f(0,0)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{t\cdot 0\dfrac{t^2-0^2}{t^2+0^2}-0}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{0}{t}=0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=\lim_{t\to 0}\frac{f(0,t)-f(0,0)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{0\cdot t\dfrac{0^2-t^2}{0^2+t^2}-0}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{0}{t}=0$$

Por último, vamos a calcular las derivadas parciales cruzadas en $(0,0)$, usando también la definición por límites

$$\frac{\partial f}{\partial x\partial y}(0,0)=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(0,0)=\lim_{t\to 0}\frac{\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,t)-\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{t}$$

como $(0,t)\neq(0,0)$ usaremos la expresión de $\frac{\partial f}{\partial x}$ que hemos calculado antes

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,t)=\frac{0^4\cdot t-t^5+4\cdot 0^2\cdot 0^3}{\left(0^2+t^2\right)^2}=-\frac{t^5}{t^4}=-t$$

por tanto

$$\frac{\partial f}{\partial x\partial y}(0,0)=\lim_{t\to 0}\frac{\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,t)-\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{-t-0}{t}=-1$$

Mientras que para la otra derivada cruzada

$$\frac{\partial f}{\partial y\partial x}(0,0)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(0,0)=\lim_{t\to 0}\frac{\dfrac{\partial f}{\partial y}(t,0)-\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{t}$$

y como $(t,0)\neq 0$, usamos la expresión de $\frac{\partial f}{\partial y}$, que hemos calculado antes

$$\frac{\partial f}{\partial y}(t,0)=\frac{t^5-t\cdot 0^4-4\cdot 0^2\cdot t^3}{\left(t^2+0^2\right)^2}=\frac{t^5}{t^4}=t$$

por tanto

$$\frac{\partial f}{\partial y\partial x}(0,0)=\lim_{t\to 0}\frac{\dfrac{\partial f}{\partial y}(t,0)-\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{t-0}{t}=1$$

¿Por qué no coinciden? La respuesta es sencilla, hay una hipótesis que falla y vamos a ver que es la de la continuidad. Si tomamos la derivada parcial segunda cruzada para puntos $(x,y)\neq(0,0)$

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x\partial y}(x,y) &= \frac{\left(x^4-5y^4+12x^2y^2\right)\left(x^2+y^2\right)^2-\left(x^4y-y^5+4x^2y^3\right)4y\left(x^2+y^2\right)}{\left(x^2+y^2\right)^4}\\ &= \frac{\left(x^2-y^2\right)\left(10x^2y^2+x^4+y^4\right)}{\left(x^2+y^2\right)^3}\end{aligned}$$

y calculando los límites iterados cuando $(x,y)\to(0,0)$

$$\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0}\frac{\left(x^2-y^2\right)\left(10x^2y^2+x^4+y^4\right)}{\left(x^2+y^2\right)^3}=\lim_{y\to 0}\frac{-y^6}{\left(y^2\right)^3}=-1,$$

$$\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0}\frac{\left(x^2-y^2\right)\left(10x^2y^2+x^4+y^4\right)}{\left(x^2+y^2\right)^3}=\lim_{x\to 0}\frac{x^6}{\left(x^2\right)^3}=1,$$

vemos que son valores distintos y por tanto el límite no existe, lo que hace que esta derivada parcial no sea continua y no se pueda aplicar el Teorema de Schwarz-Clairaut.

Definición 4.5 *Dada $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, con A un conjunto abierto y $\overrightarrow{a} \in A$. Supongamos que existe $\dfrac{\partial f}{\partial x_k}\left(\overrightarrow{a}\right)$. Llamamos gradiente de f en $\overrightarrow{a}$ y se expresa como $\nabla f\left(\overrightarrow{a}\right)$ al vector definido por*

$$\nabla f\left(\overrightarrow{a}\right) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\left(\overrightarrow{a}\right), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\left(\overrightarrow{a}\right)\right)$$

Definición 4.6 *Dada $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, con A un conjunto abierto y $\overrightarrow{a} \in A$. Supongamos que $f \in \mathcal{C}^2(A)$, definimos la* matriz Hessiana *de f en $\overrightarrow{a}$, a la matriz de $M_{n\times n}(R)$ definida por*

$$Hf\left(\overrightarrow{a}\right) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}\left(\overrightarrow{a}\right) & \cdots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}\left(\overrightarrow{a}\right) \\ \vdots & \ddots & \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}\left(\overrightarrow{a}\right) & \cdots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}\left(\overrightarrow{a}\right) \end{pmatrix}$$

Se denomina Hessiano *o* determinante Hessiano *de f en $\overrightarrow{a}$ al determinante de dicha matriz*

$$\det\left(Hf\left(\overrightarrow{a}\right)\right) = \left|Hf\left(\overrightarrow{a}\right)\right|.$$

Se llama menor Hessiano *de f de orden k en $\overrightarrow{a}$, $\Delta_k f\left(\overrightarrow{a}\right)$ al determinante de la submatriz que se obtiene tomando las k primeras filas y columnas de la matriz Hessiana.*

$$\Delta_k f\left(\overrightarrow{a}\right) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}\left(\overrightarrow{a}\right) & \cdots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_k}\left(\overrightarrow{a}\right) \\ \vdots & \ddots & \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_1}\left(\overrightarrow{a}\right) & \cdots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_k^2}\left(\overrightarrow{a}\right) \end{vmatrix}$$

Como la función es de clase $\mathcal{C}^2(A)$ y usando el teorema de Schwarz-Clairaut podemos decir que la matriz Hessiana es una matriz simétrica.

4.3. Diferencial de un campo escalar en un punto

Hemos visto que el hecho de que una función escalar tenga derivadas parciales, no implica que la función sea continua. En esta sección se define una propiedad que sí implica esta condición: el concepto de diferenciabilidad.

Definición 4.7 *Sea $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, con A un conjunto abierto y $\overrightarrow{a} \in A$. Diremos que f es diferenciable en $\overrightarrow{a} \Longleftrightarrow \exists \quad l : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, con l una aplicación lineal tal que se cumple*

$$\lim_{\left\|\overrightarrow{h}\right\| \to 0} \frac{f\left(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{h}\right) - f\left(\overrightarrow{a}\right) - l\left(\overrightarrow{h}\right)}{\left\|\overrightarrow{h}\right\|} = 0$$

siendo $\overrightarrow{h} \in \mathbb{R}^n$ y donde $\|\cdot\|$ es la norma euclídea, asociada al producto euclídeo en $\mathbb{R}^n$.

Si se cambia $\overrightarrow{x} = \overrightarrow{a} + \overrightarrow{h}$, el límite también puede reescribirse como

$$\lim_{\overrightarrow{x} \to \overrightarrow{a}} \frac{f\left(\overrightarrow{x}\right) - f\left(\overrightarrow{a}\right) - l\left(\overrightarrow{x} - \overrightarrow{a}\right)}{\left\|\overrightarrow{x} - \overrightarrow{a}\right\|} = 0$$

La aplicación lineal l, se denomina diferencial de f *en* $\overrightarrow{a}$ *y escribiremos*

$$L\left(\overrightarrow{h}\right) = df\left(\overrightarrow{a}\right)\cdot h = \left\langle df\left(\overrightarrow{a}\right); \overrightarrow{h}\right\rangle$$

recordemos que una aplicación lineal es de la forma

$$l\left(h_1,\ldots,h_n\right) = l_1 h_1 + \cdots + l_n h_n$$

con

$$l_k \in \mathbb{R}.$$

Observación 4.2 *La diferencial es más "fuerte", por exigente, que la derivada direccional, ya que en este caso el límite en un punto se toma siguiendo una dirección determinada, mientras que para la diferencial esto no ocurre.*

Observación 4.3 *En el caso $n = 1$, la diferencial de una función en un punto $a \in \mathbb{R}$, coincide con la derivada de la función $f'(a)$ en ese punto*

$$f'(a) = df(a)$$

puesto que si f es derivable en un punto a, entonces el siguiente límite existe

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'(a),$$

de forma que pasando el límite a la izquierda

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h) - f(a)}{h} - f'(a) = 0$$

y agrupando en un único denominador

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h) - f(a) - hf'(a)}{h} = 0$$

podemos comprobar que

$$L(h) = f'(a)\,h,$$

que es la aplicación lineal buscada, es decir, para funciones reales de variable real

$$df(a) = f'(a)$$

.

Proposición 4.2 *La diferencial de una función f en un punto $df\left(\overrightarrow{a}\right)$, si existe, es única.*

Teorema 4.3 *Sea $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, con A un conjunto abierto y $\overrightarrow{a} \in A$.*

$$f \text{ es diferenciable en } \overrightarrow{a} \Longrightarrow f \text{ es continua en } \overrightarrow{a}$$

Teorema 4.4 *Sea $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, con A un conjunto abierto y $\overrightarrow{a} \in A$. Si f es diferenciable en $\overrightarrow{a} \Rightarrow$ Existen las derivadas direccionales de f en $\overrightarrow{a}$ para cualquier vector $\overrightarrow{v} \in \mathbb{R}^n, \vec{v} \neq 0$ y además*

$$D_{\overrightarrow{v}} f\left(\overrightarrow{a}\right) = df\left(\overrightarrow{a}\right)\cdot\overrightarrow{v}$$

Demostración: Sea $\overrightarrow{v} \in \mathbb{R}^n$, $\overrightarrow{v} \neq 0$ y supongamos que $\|\overrightarrow{v}\| = 1$, en caso contrario se tomaría $\dfrac{\overrightarrow{v}}{\|\overrightarrow{v}\|}$. Como f es diferenciable en $\overrightarrow{a}$, entonces

$$\lim_{\|h\| \to 0} \frac{f\left(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{h}\right) - f\left(\overrightarrow{a}\right) - df\left(\overrightarrow{a}\right) \cdot \overrightarrow{h}}{\|h\|} = 0$$

de donde se deduce que

$$f\left(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{h}\right) - f\left(\overrightarrow{a}\right) - df\left(\overrightarrow{a}\right) \cdot \overrightarrow{h} = \alpha\left(\overrightarrow{h}\right) \left\|\overrightarrow{h}\right\|$$

con

$$\lim_{\left\|\overrightarrow{h}\right\| \to 0} \alpha\left(\overrightarrow{h}\right) = 0$$

Si ahora tomamos $\overrightarrow{h} = t\overrightarrow{v}$, entonces cuando $t \to 0 \Rightarrow \left\|\overrightarrow{h}\right\| \to 0$ y por tanto se cumple

$$f\left(\overrightarrow{a} + t\overrightarrow{v}\right) - f\left(\overrightarrow{a}\right) - df\left(\overrightarrow{a}\right) \cdot t\overrightarrow{v} = \alpha\left(t\overrightarrow{v}\right) \|t\overrightarrow{v}\|$$

es decir

$$f\left(\overrightarrow{a} + t\overrightarrow{v}\right) - f\left(\overrightarrow{a}\right) = df\left(\overrightarrow{a}\right) \cdot t\overrightarrow{v} + \alpha\left(t\overrightarrow{v}\right) \|t\overrightarrow{v}\|.$$

Dividiendo por t

$$\frac{f\left(\overrightarrow{a} + t\overrightarrow{v}\right) - f\left(\overrightarrow{a}\right)}{t} = df\left(\overrightarrow{a}\right) \cdot \overrightarrow{v} + \alpha\left(t\overrightarrow{v}\right) \frac{\|t\overrightarrow{v}\|}{t}$$

y tomando límites cuando $t \to 0$

$$\begin{aligned} \lim_{t \to 0} \frac{f\left(\overrightarrow{a} + t\overrightarrow{v}\right) - f\left(\overrightarrow{a}\right)}{t} &= \lim_{t \to 0} df\left(\overrightarrow{a}\right) \cdot \overrightarrow{v} + \alpha\left(t\overrightarrow{v}\right) \frac{\|t\overrightarrow{v}\|}{t} \\ &= \lim_{t \to 0} df\left(\overrightarrow{a}\right) \cdot \overrightarrow{v} + \alpha\left(t\overrightarrow{v}\right) \|\overrightarrow{v}\| \frac{|t|}{t} \\ & \quad \lim_{t \to 0} df\left(\overrightarrow{a}\right) \cdot \overrightarrow{v} + \|\overrightarrow{v}\| \lim_{t \to 0} \alpha\left(t\overrightarrow{v}\right) \frac{|t|}{t} \end{aligned}$$

está claro que

$$\lim_{t \to 0} \alpha\left(t\overrightarrow{v}\right) = 0$$

por otra parte $\dfrac{|t|}{t}$ está acotado ya que sólo toma valores -1 y 1, por tanto

$$\lim_{t \to 0} \alpha\left(t\overrightarrow{v}\right) \frac{|t|}{t} = 0$$

y se cumplirá

$$\lim_{t \to 0} \frac{f\left(\overrightarrow{a} + t\overrightarrow{v}\right) - f\left(\overrightarrow{a}\right)}{t} = df\left(\overrightarrow{a}\right) \cdot \overrightarrow{v}$$

pero el primer límite, es la definición de derivada direccional, luego se cumple

$$D_{\overrightarrow{v}} f\left(\overrightarrow{a}\right) = df\left(\overrightarrow{a}\right) \cdot \overrightarrow{v}.$$

4.3.1. Relación entre la diferencial y las derivadas parciales

Del apartado anterior se deduce que si f es diferenciable en $\overrightarrow{a}$, entonces

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}\left(\overrightarrow{a}\right) = df\left(\overrightarrow{a}\right) \cdot \overrightarrow{e_k} \quad k = 1, \ldots, n$$

puesto que una derivada parcial no es nada más que la derivada direccional respecto de un vector particular. Dado $\overrightarrow{v} \in \mathbb{R}^n$, como $\{\overrightarrow{e_k}\}_{k=1}^n$ es una base de $\mathbb{R}^n$, entonces se podrá poner como combinación lineal de esta base

$$v = v_1\overrightarrow{e_1} + \cdots + v_n\overrightarrow{e_n}$$

lo que conduce a

$$D_{\overrightarrow{v}} f\left(\overrightarrow{a}\right) = df\left(\overrightarrow{a}\right) \cdot \overrightarrow{v} = df\left(\overrightarrow{a}\right)\left(v_1\overrightarrow{e_1} + \cdots + v_n\overrightarrow{e_n}\right)$$

pero por definición $df\left(\overrightarrow{a}\right)$ es una función lineal, así que se cumple

$$\begin{aligned} df\left(\overrightarrow{a}\right)\left(v_1\overrightarrow{e_1} + \cdots + v_n\overrightarrow{e_n}\right) &= df\left(\overrightarrow{a}\right)\left(v_1\overrightarrow{e_1}\right) + \cdots + df\left(\overrightarrow{a}\right)\left(v_n\overrightarrow{e_n}\right) \\ &= v_1\frac{\partial f}{\partial x_1}\left(\overrightarrow{a}\right) + \cdots + v_n\frac{\partial f}{\partial x_n}\left(\overrightarrow{a}\right) \\ &= \sum_{k=1}^{n} v_k\frac{\partial f}{\partial x_k}\left(\overrightarrow{a}\right) \end{aligned}$$

y usando la definición de gradiente

$$df\left(\overrightarrow{a}\right) \cdot \overrightarrow{v} = \nabla f\left(\overrightarrow{a}\right) \cdot \overrightarrow{v}.$$

Finalmente, teniendo en cuenta el resultado del teorema obtendremos la relación entre las derivadas direccionales, las derivadas parciales y la diferencial de una función

$$D_{\overrightarrow{v}} f\left(\overrightarrow{a}\right) = df\left(\overrightarrow{a}\right) \cdot \overrightarrow{v} = \nabla f\left(\overrightarrow{a}\right) \cdot \overrightarrow{v}$$

Ejemplo 4.9 *Vamos a calcular la derivada direccional de la función* $f(x, y) = xy$ *en el punto* $\overrightarrow{a} = (1, 1)$ *en la dirección* $\overrightarrow{v} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$. *Para ello, sólo necesitamos calcular el gradiente*

$$\nabla f(x, y) = (y, x),$$

evaluar este gradiente en el punto $\overrightarrow{a} = (1, 1)$

$$\nabla f\left(\overrightarrow{a}\right) = \nabla f(1, 1) = (1, 1),$$

y realizar el producto escalar entre este vector y el vector $\overrightarrow{v} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

$$\nabla f\left(\overrightarrow{a}\right) \cdot \overrightarrow{v} = (1, 1) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}.$$

Expresión general de la diferencial de una función

Consideremos la función identidad restringida a la k–ésima coordenada, es decir, definimos la función $g_k(x_1,\ldots,x_n)$ como

$$g_k(x_1,\ldots,x_n)=x_k$$

Cómo sólo depende de x_k, y para simplificar, podemos poner

$$dg_k(\overrightarrow{a})=dx_k$$

con esta notación y usando las relaciones entre la diferencial y el gradiente

$$dx_k(\overrightarrow{v})=dg_k(\overrightarrow{a})\cdot\overrightarrow{v}=v_1\frac{\partial g_k}{\partial x_1}(\overrightarrow{a})+\ldots+v_1\frac{\partial g_k}{\partial x_n}(\overrightarrow{a})=v_k$$

Y finalmente podremos poner:

$$\begin{aligned} df(\overrightarrow{a})\cdot\overrightarrow{v} &= v_1\frac{\partial f}{\partial x_1}(\overrightarrow{a})+\cdots+v_1\frac{\partial f}{\partial x_n}(\overrightarrow{a}) \\ &= \frac{\partial f}{\partial x_1}(\overrightarrow{a})\,dx_1+\ldots+\frac{\partial f}{\partial x_n}dx_n \end{aligned}$$

El recíproco se cumple con continuidad.

Teniendo en cuenta estas relaciones podemos expresar la diferenciabilidad de una función en un punto usando las derivadas parciales.

Proposición 4.5 *Sea $f:A\subseteq\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}$, con A un conjunto abierto y $\overrightarrow{a}\in A$. Si f admite derivadas parciales primeras en $\overrightarrow{a}$ y se cumple*

$$\lim_{\overrightarrow{x}\to\overrightarrow{a}}\frac{f(\overrightarrow{x})-f(\overrightarrow{a})-\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_k}(\overrightarrow{a})(x_k-a_k)}{\|\overrightarrow{x}-\overrightarrow{a}\|}=0$$

entonces f es diferenciable en $\overrightarrow{a}$ y

$$df(\overrightarrow{a})=\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_k}(\overrightarrow{a})\,dx_k$$

Tomando $\overrightarrow{x}-\overrightarrow{a}=\overrightarrow{h}$, el límite se puede poner como

$$\lim_{\left\|\overrightarrow{h}\right\|\to0}\frac{f\left(\overrightarrow{a}+\overrightarrow{h}\right)-f(\overrightarrow{a})-\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_k}(\overrightarrow{a})\,h_k}{\left\|\overrightarrow{h}\right\|}=0$$

Proposición 4.6 *Sea $f:A\subseteq\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}$, con A un conjunto abierto y $\overrightarrow{a}\in A$. Si f admite todas las derivadas parciales y son continuas en $\overrightarrow{a}\Rightarrow f$ es diferenciable en $\overrightarrow{a}$.*

La diferenciabilidad de una función se comporta de la misma forma que la derivada ordinaria en lo que se refiere a las operaciones elementales suma, resta, producto y cociente.

Como resumen de los resultados anteriores tenemos:

Proposición 4.7 *Sea $f,g:A\subseteq\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}$, con A un conjunto abierto y $\overrightarrow{a}\in A$. Con f y g es diferenciable en $\overrightarrow{a}$.*

1. *La función* $f \pm g$ *es diferenciable y* $d(f \pm g)(\overrightarrow{a}) = df(\overrightarrow{a}) \pm dg(\overrightarrow{a})$.

2. *La función* $f \cdot g$ *es diferenciable y*

$$d(f \cdot g)(\overrightarrow{a}) = df(\overrightarrow{a})\, g(\overrightarrow{a}) + dg(\overrightarrow{a})\, f(\overrightarrow{a}).$$

3. *Si* $g(\overrightarrow{a}) \neq 0$, $\dfrac{f}{g}$ *es diferenciable y*

$$d\left(\frac{f}{g}\right)(\overrightarrow{a}) = \frac{g(\overrightarrow{a})\, df(\overrightarrow{a}) - f(\overrightarrow{a})\, dg(\overrightarrow{a})}{g(\overrightarrow{a})^2}.$$

4.4. Diferencial de una campo vectorial

Podemos extender el concepto de diferenciabilidad a funciones o campos vectoriales.

Definición 4.8 *Sea* $F : A \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$, *con* A *un conjunto abierto y* $\overrightarrow{a} \in A$. F *es diferenciable en* $\overrightarrow{a} \Longleftrightarrow \exists\ L : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$, *una aplicación lineal tal que*

$$\lim_{\left\|\overrightarrow{h}\right\| \to 0} \frac{F\left(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{h}\right) - F(\overrightarrow{a}) - L\left(\overrightarrow{h}\right)}{\left\|\overrightarrow{h}\right\|} = \overrightarrow{0} \in \mathbb{R}^m.$$

Como antes pondremos

$$L \equiv dF(\overrightarrow{a}),$$

que en este caso sería una matriz.

Proposición 4.8 *Sea* $F : A \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$, *con* A *un conjunto abierto y* $\overrightarrow{a} \in A$. *Si* $F = (f_1, \ldots, f_m)$

$$F \text{ es diferenciable en } \overrightarrow{a} \Longleftrightarrow f_k \text{ es diferenciable en } \overrightarrow{a} \text{ como campo escalar, } k = 1, \ldots, m$$

La diferencial viene dada por la llamada matriz Jacobiana, *que escribimos* JF *o* ∇F

$$dF(\overrightarrow{a}) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\overrightarrow{a})\right)_{\substack{i=1,\ldots,m \\ j=1,\ldots,n}} = \frac{\partial (f_1 \cdots f_m)}{\partial (x_1 \cdots x_n)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\overrightarrow{a}) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\overrightarrow{a}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(\overrightarrow{a}) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(\overrightarrow{a}) \end{pmatrix}$$

Cuando la matriz Jacobiana es cuadrada, su determinante recibe el nombre de determinante Jacobiano.

Ejemplo 4.10 *Dado el campo vectorial* $F : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$$F(x, y, z) = \left(x + y + z, x^2 - yz + z^2, xyz\right)$$

entonces su matriz Jacobiana está definido por

$$JF(x, y, z) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2x & -z & 2z - y \\ yz & xz & xy \end{pmatrix}$$

Ejemplo 4.11 *Dado el campo vectorial* $F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^4$

$$F(x,y) = \left(x^2 - y, 0, \operatorname{sen}(xy), e^{2y}\right)$$

entonces su matriz Jacobiana está definido por

$$JF(x,y) = \begin{pmatrix} 2x & -1 \\ 0 & 0 \\ y\cos(xy) & x\cos(xy) \\ 0 & 2e^{2y} \end{pmatrix}$$

4.5. Teoremas importantes

4.5.1. Cambios de variable

Definición 4.9 *Se dice que la aplicación* $\varphi : A \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$*, con* A *un abierto es un cambio de variable si cumple:*

1. φ *es inyectiva.*
2. $\varphi \in \mathcal{C}^1(A)$*.*
3. *La matriz Jacobiana de* φ *es no singular, es decir el Jacobiano es distinto de* 0

$$\det\left(J\varphi(x_1,\ldots,x_n)\right) \neq 0,\ \forall (x_1,\ldots,x_n) \in A$$

Cambio de coordenadas en 2 variables: Rectangulares vs Polares

Definimos el siguiente campo vectorial

$$\varphi : A = [0,\infty[\times [0,2\pi[\longrightarrow \mathbb{R}^2$$

como

$$\varphi(r,\theta) = (r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta)$$

Veamos que φ es un cambio de variable.

1. ¿φ es inyectiva?: Supongamos que tenemos dos valores (r_1,θ_1) y (r_2,θ_2) tales que

$$\varphi(r_1,\theta_1) = \varphi(r_2,\theta_2)$$

es decir

$$(r_1\cos\theta_1, r_1\operatorname{sen}\theta_1) = (r_2\cos\theta_2, r_2\operatorname{sen}\theta_2) \Rightarrow \begin{cases} r_1\cos\theta_1 = r_2\cos\theta_2 \\ \\ r_1\operatorname{sen}\theta_1 = r_2\operatorname{sen}\theta_2 \end{cases}$$

Elevando al cuadrado y sumando

$$\begin{cases} r_1^2\cos^2\theta_1 = r_2^2\cos^2\theta_2 \\ \\ r_1^2\operatorname{sen}^2\theta_1 = r_2^2\operatorname{sen}^2\theta_2 \end{cases} \Leftrightarrow r_1^2 = r_2^2$$

pero como $r_1, r_2 \geq 0$

$$r_1 = r_2$$

por tanto

$$\begin{aligned} r_1 \cos\theta_1 &= r_2 \cos\theta_2 \Rightarrow \cos\theta_1 = \cos\theta_2 \\ r_1 \operatorname{sen}\theta_1 &= r_2 \operatorname{sen}\theta_2 \Rightarrow \operatorname{sen}\theta_1 = \operatorname{sen}\theta_2 \end{aligned}$$

pero $\theta_1, \theta_2 \in [0, 2\pi]$, por tanto de la primera ecuación se obtiene que o bien $\theta_2 = \theta_1$ o bien $\theta_2 = 2\pi - \theta_1$, mientras que de la segunda ecuación, debería ocurrir que, o bien $\theta_2 = \theta_1$ o bien $\theta_2 = \theta_1 + \pi$; como se deben cumplir las dos condiciones, la única opción es que

$$\theta_1 = \theta_2$$

2. ¿φ es de clase $\mathcal{C}^1(A)$?: Sí, de hecho es de clase $\mathcal{C}^\infty(A)$.

3. ¿$|J\varphi(r,\theta)| \neq 0$?

$$\det(J\varphi(r,\theta)) = \begin{vmatrix} \frac{\partial\varphi_1}{\partial r} & \frac{\partial\varphi_1}{\partial\theta} \\ \frac{\partial\varphi_2}{\partial r} & \frac{\partial\varphi_2}{\partial\theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r\cos^2\theta + r\operatorname{sen}^2\theta = r \neq 0$$

Observación 4.4 *Normalmente los cambios de variable se representan como*

$$\begin{aligned} x &= x(u,v) \\ y &= y(u,v) \end{aligned}$$

y la matriz Jacobiana como

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix}$$

Cambio de coordenadas en 3 variables: Rectangulares vs Esféricas

Uno de los cambios de coordenadas más habituales en $\mathbb{R}^3$ es el cambio de coordenadas rectangulares a coordenadas esférica y que viene dado por el campo vectorial

$$\begin{array}{rccl} \varphi: & (0,r)\times(0,2\pi)\times(-\pi,\pi) & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (r,\theta,\phi) & \rightsquigarrow & (r\operatorname{sen}\phi\cos\theta, r\operatorname{sen}\phi\operatorname{sen}\theta, r\cos\phi) \end{array}$$

que vemos representado en la figura 4.5.1

El Jacobiano sería

$$J = \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,\phi)} = \begin{pmatrix} \operatorname{sen}\phi\cos\theta & -r\operatorname{sen}\phi\operatorname{sen}\theta & r\cos\phi\cos\theta \\ \operatorname{sen}\phi\operatorname{sen}\theta & r\operatorname{sen}\phi\cos\theta & r\cos\phi\operatorname{sen}\theta \\ \cos\phi & 0 & -r\operatorname{sen}\phi \end{pmatrix} \Rightarrow |\det(J)| = r^2\operatorname{sen}\phi$$

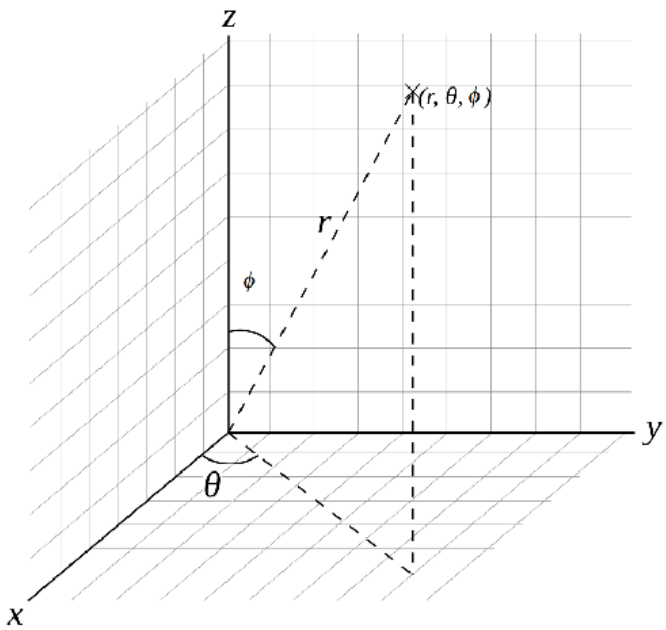
Cambio de coordenadas en 3 variables: Rectangulares vs cilíndricas

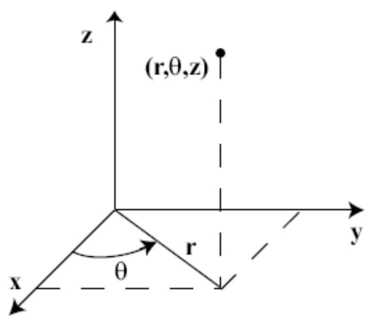
Otro de los cambios de coordenadas habituales en $\mathbb{R}^3$ es el cambio a coordenadas rectangulares a coordenadas cilíndricas que viene dado por

$$\begin{array}{rccl} \phi: & (0,r)\times(0,2\pi)\times(-\pi,\pi) & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (r,\theta,z) & \rightsquigarrow & (r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta, z) \end{array}$$

que vemos representado en la figura 4.5.1 de forma que el Jacobiano sería

$$J = \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,z)} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\operatorname{sen}\theta & 0 \\ \operatorname{sen}\theta & r\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow |\det(J)| = r$$





4.5.2. Teorema de la función compuesta

Teorema 4.9 (Teorema de la función compuesta - Regla de la Cadena) *Sea $F : U \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$; $G : V \subseteq \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^p$, con U y V abiertos de $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{R}^m$, respectivamente. Si F es diferenciable en $\overrightarrow{a} \in U$ y G diferenciable en $F(\overrightarrow{a}) \in V \Rightarrow G \circ F : U \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$, es diferenciable en $\overrightarrow{a}$ y además*

$$d(G \circ F)(\overrightarrow{a}) = dG(F(\overrightarrow{a})) \cdot dF(\overrightarrow{a})$$

que es una aplicación lineal de R^n en R^p.

Usando la matrices Jacobianas

$$J(G \circ F)(\overrightarrow{a}) = JG(F(\overrightarrow{a})) \cdot JF(\overrightarrow{a})$$

que es un producto de matrices.

Veamos el caso particular en el que $p = 1$, es decir, sea $F : U \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$; $g : V \subseteq \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}$, con U y V abiertos de $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{R}^m$, respectivamente, vamos a calcular $J(g \circ F)(\overrightarrow{a})$, entonces si para

$\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ *y* $\vec{u} = (u_1, \ldots, u_m) \in \mathbb{R}^m$

$$\begin{aligned} F(\vec{x}) &= (f_1(\vec{x}), \ldots, f_m(\vec{x})) \\ &\Rightarrow JF(\vec{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\vec{x}) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\vec{x}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(\vec{x}) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(\vec{x}) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

mientras que

$$g(\vec{u}) \Rightarrow Jg(\vec{u}) = \nabla g(\vec{u}) = \left(\frac{\partial g}{\partial u_1}(\vec{u}), \ldots, \frac{\partial g}{\partial u_m}(\vec{u}) \right)$$

La matriz Jacobiana de la función compuesta $h : g \circ F : U \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ *será*

$$\begin{aligned} dh(x_1, \ldots, x_n) &= \left(\frac{\partial g}{\partial u_1}(F(\vec{x})), \ldots, \frac{\partial g}{\partial u_m}(F(\vec{x})) \right) \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\vec{x}) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\vec{x}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(\vec{x}) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(\vec{x}) \end{pmatrix} \\ &= \left(\sum_{j=1}^m \frac{\partial g}{\partial u_j}(F(\vec{x})) \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\vec{x}), \ldots, \sum_{j=1}^m \frac{\partial g}{\partial u_j}(F(\vec{x})) \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\vec{x}) \right) = \nabla g(F(\vec{x})) JF(\vec{x}). \end{aligned}$$

Ejemplo 4.12 *Sea* $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ *con* $f(x, y, z) = \left(x^2 z - 3\cos y, 3 - zy\right)$ *y sea* $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ *con* $f(u, v) = ue^{-5v}$. *Calcularemos el valor de* $J(g \circ f)(x, y, z)$.

Vamos a obtener el resultado de dos formas distintas. La primera es a través del teorema de la función compuesta y para ello necesitamos las matrices Jacobianas de cada una de las funciones

$$Jf = \begin{pmatrix} 2xz & 3\operatorname{sen} y & x^2 \\ 0 & -z & -y \end{pmatrix}$$

$$Jg(u, v) = \left(e^{-5v}, -5ue^{-5v}\right)$$

así por el teorema de la función compuesta, tendremos

$$J(g \circ f)(x, y, z) = Jg(f(x, y, z)) Jf(x, y, z)$$

es decir

$$\begin{aligned} Jg(f(x, y, z)) Jf(x, y, z) &= Jg\left(\left(\underbrace{x^2 z - 3\cos y}_{u}, \underbrace{3 - zy}_{v} \right) \right) Jf(x, y, z) \\ &= \left(e^{-5(3-zy)}, -5\left(x^2 z - 3\cos y\right) e^{-5(3-zy)} \right) \begin{pmatrix} 2xz & 3\operatorname{sen} y & x^2 \\ 0 & -z & -y \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2xze^{-5(3-zy)} \\ \\ 3\operatorname{sen} y e^{-5(3-zy)} + 5z\left(x^2 z - 3\cos y\right) e^{-5(3-zy)} \\ \\ x^2 e^{-5(3-zy)} + 5y\left(x^2 z - 3\cos y\right) e^{-5(3-zy)} \end{pmatrix}^T \end{aligned}$$

(por claridad y espacio se ha puesto el resultado final en forma de transpuesta).

La otra forma es construir la función compuesta

$$\begin{aligned}(g \circ f)(x,y,z) &= g(f(x,y,z)) = g\left(\underbrace{x^2z-3\cos y}_{u},\underbrace{3-zy}_{v}\right)\\ &= \left(x^2z-3\cos y\right)e^{-5(3-zy)}\end{aligned}$$

y calcular su matriz Jacobiana directamente

$$J(g \circ f) = \begin{pmatrix} (2xz)\,e^{-5(3-zy)} \\ 3\operatorname{sen} y e^{-5(3-zy)} + 5z\left(x^2z-3\cos y\right)e^{-5(3-zy)} \\ x^2e^{-5(3-zy)} + 5y\left(x^2z-3\cos y\right)e^{-5(3-zy)} \end{pmatrix}^T$$

Ejemplo 4.13 *Sea $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ con $f(x,y) = (2x+3y, 3y-3)$ y sea $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ con $f(u,v) = uv$. Calcularemos el valor de $J(g \circ f)(x,y,z)$.*

Como en el ejemplo anterio, vamos a obtener el resultado de dos formas distintas. La primera es a través del teorema de la función compuesta. Para ello necesitamos las matrices Jacobianas de cada una de las funciones

$$Jf = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$Jg(u,v) = (v,u)$$

$$\begin{aligned}Jg(f(x,y,z))\,Jf(x,y,z) &= Jg\left(\left(\underbrace{2x+3y}_{u},\underbrace{3y-3}_{v}\right)\right)Jf(x,y,z)\\ &= (3y-3, 2x+3y)\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\\ &= (6y-6, 18y+6x-9)\end{aligned}$$

La otra forma es construir la función compuesta

$$\begin{aligned}(g \circ f)(x,y,z) &= g(f(x,y,z)) = g\left(\underbrace{2x+3y}_{u},\underbrace{3y-3}_{v}\right)\\ &= (2x+3y)(3y-3)\end{aligned}$$

y calcular la matriz Jacobiana de esta función.

$$J(g \circ f) = (2(3y-3), 3(3y-3)+3(2x+3y)) = (6y-6, 18y+6x-9)$$

El teorema de la función compuesta se emplea para realizar cambios de variables en ecuaciones en derivadas parciales, que es una ecuación en la que se relaciona un campo escalar con sus derivadas parciales.

Ejemplo 4.14 *Sea $u \equiv u(t,x)$ una función de dos variables y consideremos la siguiente ecuación en derivadas parciales*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t,x) - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x) = 0$$

Vamos a calcular la expresión de esta ecuación al hacer el cambio de variables

$$\begin{aligned} \alpha &= x + ct, \\ \beta &= x - ct. \end{aligned}$$

El objetivo es expresar la ecuación en derivadas parciales inicial en términos de las variables α y β. El cambio de variables viene dado por la función:

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (t,x) &\rightsquigarrow & \varphi(t,x) = \left(\underbrace{x+ct}_{\alpha}, \underbrace{x-ct}_{\beta} \right) \end{aligned}$$

En primer lugar, debemos conocer si el cambio de coordenadas es válido, para ello calculamos su Jacobiano

$$J\varphi = \begin{pmatrix} 1 & c \\ 1 & -c \end{pmatrix} \Longrightarrow |J\varphi| = -c - c = -2c \neq 0; \quad \forall c \neq 0$$

Por tanto si $c \neq 0$, el cambio es válido.

Para obtener la ecuación en las nuevas variables, hay que buscar la expresión de las derivadas parciales de (t,x) frente a las variables (α, β), haciendo uso de la regla de la cadena, puesto que

$$u(t,x) = u(\alpha(t,x), \beta(t,x))$$

Con el objetivo de simplificar las expresiones prescindiremos de las variables, de este modo tendremos,

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial \alpha}\frac{\partial \alpha}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial \beta}\frac{\partial \beta}{\partial t} = c\frac{\partial u}{\partial \alpha} - c\frac{\partial u}{\partial \beta}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= \frac{\partial}{\partial t}\left(c\frac{\partial u}{\partial \alpha} - c\frac{\partial u}{\partial \beta} \right) = c\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u}{\partial \alpha}\right) - c\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u}{\partial \beta}\right) \\ &= c\left(\frac{\partial}{\partial \alpha}\left(\frac{\partial u}{\partial \alpha}\right)\frac{\partial \alpha}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \beta}\left(\frac{\partial u}{\partial \beta}\right)\frac{\partial \beta}{\partial t} \right) - c\left(\frac{\partial}{\partial \alpha}\left(\frac{\partial u}{\partial \beta}\right)\frac{\partial \alpha}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \beta}\left(\frac{\partial u}{\partial \beta}\right)\frac{\partial \beta}{\partial t} \right) \\ &= c\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2}c - \frac{\partial^2 u}{\partial \alpha \partial \beta}c \right) - c\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \beta \partial \alpha}c - \frac{\partial^2 u}{\partial \beta^2}c \right) \\ &= c^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2} - 2\frac{\partial^2 u}{\partial \alpha \partial \beta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \beta^2} \right) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \alpha}\frac{\partial \alpha}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \beta}\frac{\partial \beta}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \alpha} + \frac{\partial u}{\partial \beta}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial \alpha}+\frac{\partial u}{\partial \beta}\right)= \\
&= \frac{\partial}{\partial \alpha}\left(\frac{\partial u}{\partial \alpha}+\frac{\partial u}{\partial \beta}\right)\frac{\partial \alpha}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial \beta}\left(\frac{\partial u}{\partial \alpha}+\frac{\partial u}{\partial \beta}\right)\frac{\partial \beta}{\partial x} \\
&= \frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2}+2\frac{\partial^2 u}{\partial \alpha\partial \beta}+\frac{\partial^2 u}{\partial \beta^2}
\end{aligned}$$

y sustituyendo en la ecuación en derivadas parciales inicial

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= 0 \Longrightarrow c^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2}-2\frac{\partial^2 u}{\partial \alpha\partial \beta}+\frac{\partial^2 u}{\partial \beta^2}\right)-c^2\frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2}+2\frac{\partial^2 u}{\partial \alpha\partial \beta}+\frac{\partial^2 u}{\partial \beta^2}=0 \\
-4c^2\frac{\partial^2 u}{\partial \alpha\partial \beta} &= 0
\end{aligned}$$

como $c \neq 0$, o de lo contrario el cambio no sería válido, tendremos:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \alpha\partial \beta}=0.$$

que es una ecuación bastante más sencilla que la inicial.

4.5.3. Teorema de la función inversa

Teorema 4.10 (Teorema de la función inversa) *Sea el campo vectorial $F : A \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$; $F \in \mathcal{C}^q(A)$ y sea $\overrightarrow{a} \in \mathbb{R}^n$. Supongamos $|JF(\overrightarrow{a})| \neq 0 \Rightarrow$*

1. *$\exists U_{\overrightarrow{a}}$ tal que $F : U_{\overrightarrow{a}} \longrightarrow F(U_{\overrightarrow{a}})$ es una biyección.*
2. *$F(U_{\overrightarrow{a}})$ es un abierto.*
3. *$\exists\ F^{-1} : F(U_{\overrightarrow{a}}) \longrightarrow U_{\overrightarrow{a}}$ con $F^{-1} \in \mathcal{C}^q(A)$.*
4. *Si $\vec{x}_0 \in U_{\overrightarrow{a}}$, $\vec{y}_0 = F(\vec{x}_0) \in F(U_{\overrightarrow{a}}) \Rightarrow JF^{-1}(\vec{y}_0) = \left(JF\left(F^{-1}(\vec{y}_0)\right)\right)^{-1}$, es decir, $JF^{-1}(F(\vec{x}_0)) = (JF(\vec{x}_0))^{-1}$.*

El teorema de la función inversa nos indica que, bajo ciertas condiciones, un campo vectorial tiene asociado un campo vectorial inverso que es derivable hasta el mismo orden que F y además su matriz Jacobiana es la matriz inversa de la matriz Jacobiana de F.

Ejemplo 4.15 *Consideremos el cambio entre coordenadas cartesianas y coordenadas polares*

$$\left\{\begin{array}{c} x = r\cos\theta \\ \\ y = r\,\mathrm{sen}\,\theta \end{array}\right\} \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{c} r = \sqrt{x^2+y^2} \\ \\ \theta = \arctan\frac{y}{x} \end{array}\right\}$$

La función φ, correspondiente al cambio de variable, está definida como

$$\begin{array}{ccc} [0,\infty[\times[0,2\pi[& \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (r,\theta) & \rightsquigarrow & \varphi(r,\theta) = (r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\,\theta) \end{array}$$

de forma que (hay que tener en cuenta que $x = x(r,\theta)$ e $y = y(r,\theta)$ del mismo modo que $r = r(x,y)$ y $\theta = \theta(x,y)$)

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial x}{\partial r} = \cos\theta \\ \\ \dfrac{\partial x}{\partial \theta} = -r\,\mathrm{sen}\,\theta \end{array}\right. \quad y \quad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial y}{\partial r} = \mathrm{sen}\,\theta \\ \\ \dfrac{\partial y}{\partial \theta} = r\cos\theta \end{array}\right.$$

$$J\varphi = \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\,\mathrm{sen}\,\theta \\ \mathrm{sen}\,\theta & r\cos\theta \end{pmatrix}$$

es la matriz Jacobiana que es regular, puesto que

$$\det(J\varphi) = r\cos^2\theta + r\,\mathrm{sen}^2\,\theta = r \neq 0$$

y su inversa es

$$J\varphi^{-1} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\,\mathrm{sen}\,\theta \\ \mathrm{sen}\,\theta & r\cos\theta \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \mathrm{sen}\,\theta \\ -\dfrac{\mathrm{sen}\,\theta}{r} & \dfrac{\cos\theta}{r} \end{pmatrix}.$$

Podemos comprobar como, efectivamente, si usamos el cambio inverso, es decir, de cartesianas a polares y calculamos su matriz Jacobiana

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial r}{\partial x} = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = \dfrac{x}{r} = \dfrac{r\cos\theta}{r} = \cos\theta \\ \\ \dfrac{\partial r}{\partial y} = \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \dfrac{y}{r} = \dfrac{r\,\mathrm{sen}\,\theta}{r} = \mathrm{sen}\,\theta \end{array}\right. \quad y \quad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial \theta}{\partial x} = \dfrac{-\dfrac{y}{x^2}}{1+\left(\dfrac{y}{x}\right)^2} = -\dfrac{y}{x^2+y^2} = -\dfrac{r\,\mathrm{sen}\,\theta}{r^2} = -\dfrac{\mathrm{sen}\,\theta}{r} \\ \\ \dfrac{\partial \theta}{\partial y} = \dfrac{\dfrac{1}{x}}{1+\left(\dfrac{y}{x}\right)^2} = \dfrac{x}{x^2+y^2} = \dfrac{r\cos\theta}{r^2} = \dfrac{\cos\theta}{r} \end{array}\right.$$

obtenemos la misma Jacobiana.

4.5.4. Teorema de la función implícita

Algunas veces las funciones están expresadas en forma implícita, es decir, mediante ecuaciones de la forma

$$F(x_1, \ldots, x_n) = 0$$

como por ejemplo la ecuación de una circunferencia de centro $(0,0)$ y radio $r = 1$, que viene dada por la ecuación

$$x^2 + y^2 - 1 = 0$$

En estos casos, cabe pensar si una o varias variables se pueden expresar como función de las restantes, por ejemplo, en la ecuación de la circunferencia, podemos poner a y como función de x del siguiente modo

$$y = \pm\sqrt{1-x^2},$$

aunque también podríamos poner a x en función de y

$$x = \pm\sqrt{1-y^2}.$$

De esta forma podríamos comprobar las propiedades de una variable respecto de la otra. Notar que, en cada uno de estos dos casos, hay dos elecciones posibles que corresponden con cada uno de los signos de la raíz cuadrada. Para poder definir una función de forma unívoca tenemos que quedarnos solo con una de las dos opciones, pero para realizar esta elección es necesario tener información adicional sobre las variables; por ejemplo, si se conoce que la función pasa por el punto $(0,1)$, entonces la elección para y en el primer caso debe ser $y=+\sqrt{1-x^2}$.

A veces no es tan sencillo, e incluso imposible, encontrar una expresión explícita de un variable respecto de otra, por ejemplo, de la ecuación

$$x^4+x^2y^2+y^3+y^4-2=0,$$

no es posible obtener de forma explícita ninguna de las variables en función de la otra. No obstante, podríamos intentar establecer una relación entre ambas variables, ya que dando un valor a una de ellas, podríamos obtener el valor (o valores) de la otra, usando para ello la ecuación. Por ejemplo, si tomamos $x=\sqrt[4]{2}$, entonces sustituyendo en la ecuación

$$2+\sqrt{2}y^2+y^3+y^4-2=0\Rightarrow\sqrt{2}y^2+y^3+y^4=0\Rightarrow y^2\left(y^2+y+\sqrt{2}\right)=0$$

obtenemos como única solución $y=0$, y de esta forma podemos decir que el par $\left(\sqrt[4]{2},0\right)$ resuelve la ecuación y podemos poner $y\left(\sqrt[4]{2}\right)=0$. Al dar más valores a la variable x, que actúa como variable independiente, podemos ir obteniendo valores para la variable y, que sería la variable dependiente, dando lugar a una función. Cabe preguntarse ahora si la función construida de esta forma es continua, derivable, etc. Para la circunferencia, una vez despejada la variable y en función de la x, podemos calcular directamente el valor de la función y emplear las reglas de derivación para calcular el valor de la derivada en cualqueir punto, por ejemplo tomando $x=\frac{1}{2}$, obtenemos

$$y\left(x\right)=\sqrt{1-x^2}\Rightarrow y\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{1-\frac{1}{4}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

para la función, mientras que

$$y'\left(x\right)=\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}\Rightarrow y\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{-\frac{1}{2}}{\sqrt{1-\frac{1}{4}}}=-\frac{\sqrt{3}}{3}$$

es su derivada. También podíamos haber utilizado la ecuación directamente, sin necesidad de despejar la variable y

$$x^2+y^2-1=0\Rightarrow\left(x=\frac{1}{2}\right)\Rightarrow\frac{1}{4}+y^2-1=0\Longleftrightarrow y^2=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}\Rightarrow y=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

y derivando respecto a x en la ecuación, teniendo en cuenta que $y=y\left(x\right)$ es función de x, el valor de su derivada en ese mismo punto

$$x^2+y^2-1=0\Rightarrow\left(x^2+y^2-1\right)'=0\Rightarrow 2x+2y\left(x\right)y'\left(x\right)=0$$

y evaluando en $x=\frac{1}{2}$

$$2\frac{1}{2}+2y\left(\frac{1}{2}\right)y'\left(\frac{1}{2}\right)=0\Leftrightarrow 1+\sqrt{3}y'\left(\frac{1}{2}\right)=0\Leftrightarrow\sqrt{3}y'\left(\frac{1}{2}\right)=-1\Leftrightarrow y'\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{\sqrt{3}}=-\frac{\sqrt{3}}{3}$$

igual que antes.

El resultado que nos permite realizar este tipo de operaciones es el teorema de la función implícita que se indica a continuación.

Teorema 4.11 (Teorema de la función implícita) *Consideremos el sistema de m ecuaciones*

$$\left\{\begin{array}{c}\varphi_1(x_1,\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_m)=0\\ \vdots\\ \varphi_m(x_1,\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_m)=0\end{array}\right.$$

con $\varphi_k : A \subseteq \mathbb{R}^{n+m} \longrightarrow \mathbb{R}$, funciones diferenciables en A, un abierto de $\mathbb{R}^{n+m}$ y $m > 1$. Sea $\overrightarrow{a} = (a_1,\ldots,a_n,b_1,\ldots,b_m) \in A$ un punto donde se cumplen las ecuaciones

$$\varphi_k(\overrightarrow{a}) = 0; \quad k = 1,\ldots,m$$

y tal que el determinante definido como

$$\left|\frac{\partial(\varphi_1,\ldots,\varphi_m)}{\partial(y_1,\ldots,y_m)}(\overrightarrow{a})\right| = \left|\begin{array}{ccc}\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial y_1}(\overrightarrow{a}) & \cdots & \dfrac{\partial\varphi_1}{\partial y_m}(\overrightarrow{a})\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \dfrac{\partial\varphi_m}{\partial y_1}(\overrightarrow{a}) & \cdots & \dfrac{\partial\varphi_m}{\partial y_m}(\overrightarrow{a})\end{array}\right| \neq 0$$

entonces existe un entorno del punto $\overrightarrow{a}$, $U_{\overrightarrow{a}}$, tal que las variables $y_1,\ldots,y_m$ son funciones de las variables $x_1,\ldots,x_n$, en forma implícita mediante las expresiones de las funciones $\varphi_1,\ldots,\varphi_m$, además se cumple

$$\frac{\partial(y_1,\ldots,y_m)}{\partial(x_1,\ldots,x_n)}(b_1,\ldots,b_m) = -\left(\frac{\partial(\varphi_1,\ldots,\varphi_m)}{\partial(y_1,\ldots,y_m)}(\overrightarrow{a})\right)^{-1}\left(\frac{\partial(\varphi_1,\ldots,\varphi_m)}{\partial(x_1,\ldots,x_n)}(\overrightarrow{a})\right)$$

Ejemplo 4.16 *Vamos a estudiar si el sistema de ecuaciones definido por*

$$\left.\begin{array}{c}x+y+z=3\\ \\ x^2+y^2+z^2=9\end{array}\right\}$$

define a las variables z e y como funciones implícitas de x en el punto $\vec{a} = (0,0,3)$. Notar que en este caso tendremos $m = 2$ y las funciones que definen las ecuaciones son

$$\begin{aligned}\varphi_1(x,y,z) &= x+y+z-3\\ \\ \varphi_2(x,y,z) &= x^2+y^2+z^2-9\end{aligned}$$

1. *Primero comprobaremos que el punto $\vec{a}$ es solución del sistema. Para ello sustituimos el valor $\vec{a}$ en el sistema*

$$\begin{aligned}\varphi_1(0,0,3) &= 0+0+3-3=0\\ \\ \varphi_2(0,0,3) &= x^2+y^2+z^2-9=0^2+0^2+3^2-9=0\end{aligned}$$

2. *En segundo lugar calculamos el determinante Jacobiano de las funciones φ_k respecto de las variables dependientes, que en este caso son y y z*

$$\frac{\partial(\varphi_1,\varphi_2)}{\partial(y,z)} = \left(\begin{array}{cc}\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial y} & \dfrac{\partial\varphi_1}{\partial z}\\ \dfrac{\partial\varphi_2}{\partial y} & \dfrac{\partial\varphi_2}{\partial z}\end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc}1 & 1\\ 2y & 2z\end{array}\right) \Rightarrow \left|\frac{\partial(\varphi_1,\varphi_2)}{\partial(y,z)}\right| = \left|\begin{array}{cc}1 & 1\\ 2y & 2z\end{array}\right|$$

y evaluando en $\vec{a} = (0,0,3)$

$$\left|\frac{\partial(\varphi_1,\varphi_2)}{\partial(y,z)}(\overrightarrow{a})\right| = \left|\begin{array}{cc} 1 & 1 \\ 0 & 6 \end{array}\right| = 6 \neq 0$$

Se cumplen, por tanto, las dos hipótesis del teorema y podemos considerar a y *y* z *como funciones de la variable* x*. Según el teorema de la función implícita podemos calcular las derivadas primeras* $y'(x)$ *y* $z'(x)$ *de forma directa, puesto que*

$$\frac{\partial(y,z)}{\partial(x)}(\overrightarrow{a}) = -\left(\frac{\partial(\varphi_1,\varphi_2)}{\partial(y,z)}(\overrightarrow{a})\right)^{-1}\left(\frac{\partial(\varphi_1,\varphi_2)}{\partial(x)}(\overrightarrow{a})\right)$$

donde sólo nos falta por calcular $\frac{\partial(\varphi_1,\varphi_2)}{\partial(x)}(\overrightarrow{a})$*. Este valor se obtiene directamente de las expresiones de las funciones* φ_k

$$\frac{\partial(\varphi_1,\varphi_2)}{\partial(x)} = \left(\begin{array}{c} \frac{\partial\varphi_1}{\partial x} \\ \frac{\partial\varphi_2}{\partial x} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c} 1 \\ 2x \end{array}\right) \Rightarrow \frac{\partial(\varphi_1,\varphi_2)}{\partial(x)}(\overrightarrow{a}) = \left(\begin{array}{c} 1 \\ 0 \end{array}\right)$$

de donde

$$\begin{aligned} \frac{\partial(y,z)}{\partial(x)}(\overrightarrow{a}) &= -\left(\frac{\partial(\varphi_1,\varphi_2)}{\partial(y,z)}(\overrightarrow{a})\right)^{-1}\left(\frac{\partial(\varphi_1,\varphi_2)}{\partial(x)}(\overrightarrow{a})\right) \\ &= -\left(\begin{array}{cc} 1 & 1 \\ 0 & 6 \end{array}\right)^{-1}\left(\begin{array}{c} 1 \\ 0 \end{array}\right) = -\left(\begin{array}{cc} 1 & -\frac{1}{6} \\ 0 & \frac{1}{6} \end{array}\right)\left(\begin{array}{c} 1 \\ 0 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c} -1 \\ 0 \end{array}\right) \end{aligned}$$

por tanto

$$\frac{\partial(y,z)}{\partial(x)}(\overrightarrow{a}) = \left(\begin{array}{c} -1 \\ 0 \end{array}\right)$$

o en coordenadas

$$\frac{\partial(y,z)}{\partial(x)}(\overrightarrow{a}) = \left(\begin{array}{c} \frac{\partial y}{\partial x}(\overrightarrow{a}) \\ \frac{\partial z}{\partial x}(\overrightarrow{a}) \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c} y'(0) \\ z'(0) \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c} -1 \\ 0 \end{array}\right)$$

Existe otro método para calcular estos valores y consiste en derivar directamente las ecuaciones del sistema, teniendo en cuenta que $y = y(x)$ *y* $z = z(x)$*. Hay que tener en cuenta que el término de la derecha de la ecuación es* 0 *y por tanto la derivada será cero:*

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x}(\varphi_1(x,y,z)) &= 0 \Longrightarrow \frac{\partial}{\partial x}(x + y(x) + z(x) - 3) = 0 \Longrightarrow 1 + y'(x) + z'(x) = 0 \\ \frac{\partial}{\partial x}(\varphi_2(x,y,z)) &= 0 \Longrightarrow \frac{\partial}{\partial x}\left(x^2 + y^2(x) + z^2(x) - 9\right) = 0 \Longrightarrow 2x + 2y(x)\,y'(x) + 2z(x)\,z'(x) = 0 \end{aligned}$$

Y ahora evaluamos ambas ecuaciones en $x = 0$*; teniendo en cuenta que*

$$\begin{aligned} y(0) &= 0 \\ z(0) &= 3 \end{aligned}$$

puesto que las ecuaciones pasan por el punto $(0,0,3)$, *obteniendose el mismo resultado que antes*

$$\left.\begin{array}{c} 1+y'(0)+z'(0)=0 \\ \\ 0+y(0)\,y'(0)+z(0)\,z'(0)=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{c} 1+y'(0)+z'(0)=0 \\ \\ 6z'(0)=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{c} y'(0)=-1 \\ \\ z'(0)=0 \end{array}\right\}$$

Este último método es útil cuando, además de las primeras derivadas, necesitamos calcular derivadas de orden superior. Por ejemplo, supongamos que queremos obtener los valores $y''(0)$ *y* $z''(0)$, *tendremos que derivar la ecuación dos veces*

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\varphi_1(x,y,z)\right) &= 0 \Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\varphi_1(x,y,z)\right)\right)=0 \Rightarrow \frac{\partial}{\partial x}\big(1+y'(x)+z'(x)\big)=0 \\ &\Rightarrow y''(x)+z''(x)=0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\varphi_2(x,y,z)\right) &= 0 \Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\varphi_2(x,y,z)\right)\right)=0 \Rightarrow \frac{\partial}{\partial x}\big(x+y(x)\,y'(x)+z(x)\,z'(x)\big)=0 \\ &\Rightarrow 1+\big(y'(x)\big)^2+y(x)\,y''(x)+\big(z'(x)\big)^2+z(x)\,z''(x)=0 \end{aligned}$$

que junto con los datos calculados $y(0)=0$, $z(0)=3$, $y'(0)=-1$ *y* $z'(0)=0$, *se obtiene*

$$\left.\begin{array}{c} y''(0)+z''(0)=0 \\ \\ 1+(y'(0))^2+y(0)\,y''(0)+(z'(0))^2+z(0)\,z''(0)=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{c} y''(0)+z''(0)=0 \\ \\ 2+3z''(0)=0 \end{array}\right\}$$

sistema que tiene por solución

$$\begin{aligned} z''(0) &= -\frac{2}{3} \\ y''(0) &= \frac{2}{3} \end{aligned}$$

Ejemplo 4.17 *Vamos a comprobar que la ecuación*

$$x^2+y^2+z^2-1=0$$

define a z *como función implícita de* (x,y), *en un entorno del punto* $\vec{a}=(0,0,1)$. *También calcularemos las derivadas parciales hasta el segundo orden de* z *en el punto* $(0,0)$.

En este caso $m=1$ *y tenemos una sola ecuación.*

$$\varphi_1(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-1$$

Por una parte

$$\varphi_1(\vec{a})=\varphi_1(0,0,1)=0^2+0^2+1^2-1=0$$

y en el punto $\vec{a}$ *se cumple la ecuación dada. Para este ejemplo, la matriz* $\frac{\partial(\varphi_1,\ldots,\varphi_m)}{\partial(x_{n+1},\ldots,x_{n+m})}(\overrightarrow{a})$ *está dada por un sólo elemento, ya que tenemos una sola ecuación y una sola variable dependiente*

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial z}(x,y,z)=2z$$

y su determinante en el punto $\vec{a}$ es no nulo, puesto que

$$\det\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}(0,0,1)\right) = \frac{\partial\varphi}{\partial z}(0,0,1) = 2 \neq 0$$

se puede decir que $z = z(x,y)$ es función implícita de (x,y) en el entorno del punto $(0,0)$ donde además se cumple $z(0,0) = 1$ puesto que φ_1 pasa por el punto $(0,0,1)$.

Calculamos las derivadas parciales de $z = z(x,y)$ como función de x e y, derivando directamente sobre la ecuación:

$$\begin{aligned} \frac{\partial\varphi_1}{\partial x}(x,y,z) &= 0 \Longrightarrow \frac{\partial}{\partial x}\left(x^2+y^2+z(x,y)^2-1\right) = 0 \\ 2x + 2z(x,y)\frac{\partial z}{\partial x}(x,y) &= 0 \Longrightarrow x + z(x,y)\frac{\partial z}{\partial x}(x,y) = 0 \end{aligned}$$

y evaluando en el punto $(0,0)$, teniendo en cuenta que $z(0,0) = 1$

$$0 + z(0,0)\frac{\partial z}{\partial x}(0,0) = 0 \Longleftrightarrow \frac{\partial z}{\partial x}(0,0) = 0$$

La derivada parcial respecto a y

$$\begin{aligned} \frac{\partial\varphi_1}{\partial y}(x,y,z) &= 0 \Longrightarrow \frac{\partial}{\partial y}\left(x^2+y^2+z(x,y)^2-1\right) = 0 \\ 2y + 2z(x,y)\frac{\partial z}{\partial y}(x,y) &= 0 \Longrightarrow y + z(x,y)\frac{\partial z}{\partial y}(x,y) = 0, \end{aligned}$$

y evaluando en $(0,0)$, con $z(0,0) = 1$

$$0 + z(0,0)\frac{\partial z}{\partial y}(0,0) = 0 \Longleftrightarrow \frac{\partial z}{\partial y}(0,0) = 0.$$

Las derivadas segundas $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$ y $\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$ se obtienen derivando las ecuaciones obtenidas respecto de la derivada correspondiente

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2\varphi_1}{\partial x^2}(x,y,z) &= 0 \Longrightarrow \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}(x,y,z)\right) = 0 \Rightarrow \frac{\partial}{\partial x}\left(x + z\frac{\partial z}{\partial x}\right) = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \quad 1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + z\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0, \end{aligned}$$

y evaluando en $(0,0)$

$$1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}(0,0)\right)^2 + z(0,0)\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(0,0) = 0.$$

Sustituyendo el valor de $\frac{\partial z}{\partial x}(0,0) = 0$ que hemos encontrado en el apartado anterior

$$1 + \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(0,0) = 0 \Rightarrow \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(0,0) = -1$$

Del mismo modo, se calcula la derivada segunda respecto de y

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial y^2}(x,y,z) &= 0 \Longrightarrow \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial y}(x,y,z)\right)=0 \Rightarrow \frac{\partial}{\partial y}\left(y+z\frac{\partial z}{\partial y}\right)=0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow\ 1+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2+z\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0\end{aligned}$$

que en el punto $(0,0)$*, y usando que* $z(0,0)=1$ *y* $\frac{\partial z}{\partial y}(0,0)=0$

$$1+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(0,0)=0 \Rightarrow \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(0,0)=-1$$

Finalmente buscaremos las dos derivadas cruzadas $\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$ *y* $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$ *y comprobaremos que coinciden tal y como dice la tesis del teorema de Schwarz. esdsd*

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial x\partial y}(x,y,z) &= 0 \Longrightarrow \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}(x,y,z)\right)=0 \Rightarrow \frac{\partial}{\partial y}\left(x+z\frac{\partial z}{\partial x}\right)=0 \Rightarrow \\ &\Longrightarrow\ \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial z}{\partial x}+z\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=0 \\ \frac{\partial^2\varphi_1}{\partial y\partial x}(x,y,z) &= 0 \Longrightarrow \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial y}(x,y,z)\right)=0 \Rightarrow \frac{\partial}{\partial x}\left(y+z\frac{\partial z}{\partial y}\right)=0 \Rightarrow \\ &\Longrightarrow\ \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y}+z\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=0\end{aligned}$$

e igualando en $(0,0)$*, con* $\frac{\partial z}{\partial x}(0,0)=\frac{\partial z}{\partial y}(0,0)=0$ *y* $z(0,0)=1$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}(0,0)=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}(0,0)=0.$$

Observación 4.5 *La hipótesis de que la derivada no se anule es fundamental; por ejemplo, si tenemos la ecuación*

$$x^2+y^2=1$$

vamos a ver que no define a función implícita en el punto $\vec{a}=(1,0)$*. La función es* $\varphi(x,y)=x^2+y^2-1$ *y la primera hipótesis se cumple ya que* $\varphi(1,0)=1^2+0^2-1=0$*. Para probar la segunda hipótesis necesitamos* $\frac{\partial\varphi}{\partial y}=2y$*, pero* $\frac{\partial\varphi}{\partial y}(\vec{a})=\frac{\partial\varphi}{\partial y}(1,0)=0$*, y no se cumple, de hecho podemos comprobar que la derivada* $y'(1)$ *no existe. Si derivamos la ecuación directamente*

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}(x,y)=0 \Rightarrow \frac{\partial}{\partial x}\left(x^2+y^2-1\right)=0 \Rightarrow 2x+2y(x)\,y'(x)=0$$

y al sustituir en el punto $x=1$*, sabiendo que* $y(1)=0$*, obtendremos*

$$2\cdot 1+2y(1)\,y'(1)=0 \Rightarrow 2=0$$

lo que obviamente, es imposible.

4.6. Operadores diferenciales

4.6.1. Gradiente

Hemos visto la definición del gradiente de una función escalar

$$\begin{array}{rlcl} f: & A\subseteq\mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & \overrightarrow{x} & \rightsquigarrow & f\left(\overrightarrow{x}\right)=f\left(x_1,\ldots,x_n\right) \end{array}$$

siendo

$$\nabla f\left(x_1,\ldots,x_n\right)=\left(\frac{\partial f}{\partial x_1},\ldots,\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)$$

Esta definición se puede extender a funciones vectoriales

$$\begin{array}{rlcl} F: & A\subseteq\mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}^m \\ & \overrightarrow{x} & \rightsquigarrow & F\left(\overrightarrow{x}\right)=\left(f_1\left(x_1,\ldots,x_n\right),\ldots,f_n\left(x_1,\ldots,x_n\right)\right) \end{array}$$

y en este caso coincide con el Jacobiano

$$\nabla F\left(x_1,\ldots,x_n\right)=JF\left(x_1,\ldots,x_n\right)=\left(\begin{array}{ccc} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}\left(\overrightarrow{a}\right) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}\left(\overrightarrow{a}\right) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial fm}{\partial x_1}\left(\overrightarrow{a}\right) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}\left(\overrightarrow{a}\right) \end{array}\right)$$

Ejemplo 4.18 *Calcula el gradiente de los siguientes campos vectoriales*

$$\vec{F}\left(x,y\right)=\left(x^2-y^2,xy\right),\quad \vec{G}\left(x,y,z\right)=\left(x^2y^2,e^{xyz},\operatorname{sen}\left(x+yz\right)\right).$$

Como hemos dicho, se calcula la Jacobiana de cada función

$$JF=\left(\begin{array}{cc} 2x & -2y \\ y & x \end{array}\right)$$

$$JG=\left(\begin{array}{lll} 2xy^2 & 2x^2y & 0 \\ yze^{xyz} & xze^{xyz} & xye^{xyz} \\ \cos\left(x+yz\right) & z\cos\left(x+yz\right) & y\cos\left(x+yz\right) \end{array}\right)$$

4.6.2. Divergencia

Sea

$$\begin{array}{rlcl} F: & A\subseteq\mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ & \overrightarrow{x} & \rightsquigarrow & F\left(\overrightarrow{x}\right)=\left(f_1\left(x_1,\ldots,x_n\right),\ldots,f_n\left(x_1,\ldots,x_n\right)\right) \end{array}$$

un campo vectorial, definimos la *divergencia del campo vectorial* F a

$$\nabla\cdot F=\operatorname{div}\left(F\right)=\frac{\partial f_1}{\partial x_1}\left(\overrightarrow{a}\right)+\frac{\partial f_2}{\partial x_2}\left(\overrightarrow{a}\right)+\cdots+\frac{\partial f_n}{\partial x_n}\left(\overrightarrow{a}\right)$$

que se puede representar como

$$\operatorname{div}\left(F\right)=\left\langle\left(\frac{\partial}{\partial x_1},\frac{\partial}{\partial x_2},\ldots,\frac{\partial}{\partial x_n}\right);\left(f_1,f_2,\cdots,f_n\right)\right\rangle$$

También se define la *divergencia de un campo tensorial* (matriz cuyas entradas son funciones escalares) haciendo la divergencia de cada una de las filas de la matriz y colocando el resultado como un vector.

Ejemplo 4.19 *Calcula la divergencia de los siguientes tensores*

$$I = \begin{pmatrix} m\left(y^2+z^2\right) & -mxy & -mxz \\ -mxy & m\left(x^2+z^2\right) & -myz \\ -mxz & -myz & m\left(x^2+y^2\right) \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} xyz & y & x^2+z^2 \\ xy & 0 & 1 \\ x^2+y^2 & z^2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Usando la definición de divergencia de campo tensorial

$$\begin{aligned} \nabla I &= \left(\frac{\partial f_{11}}{\partial x}+\frac{\partial f_{12}}{\partial y}+\frac{\partial f_{13}}{\partial z}, \frac{\partial f_{21}}{\partial x}+\frac{\partial f_{22}}{\partial y}+\frac{\partial f_{23}}{\partial z}, \frac{\partial f_{31}}{\partial x}+\frac{\partial f_{32}}{\partial y}+\frac{\partial f_{33}}{\partial z}\right) \\ &= (0-mx-mx, -my+0-my, -mz-mz+0) \\ &= (-2mx, -2my-2mz) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \nabla A &= \left(\frac{\partial f_{11}}{\partial x}+\frac{\partial f_{12}}{\partial y}+\frac{\partial f_{13}}{\partial z}, \frac{\partial f_{21}}{\partial x}+\frac{\partial f_{22}}{\partial y}+\frac{\partial f_{23}}{\partial z}, \frac{\partial f_{31}}{\partial x}+\frac{\partial f_{32}}{\partial y}+\frac{\partial f_{33}}{\partial z}\right) \\ &= (yz+1+2z, y+0+0, 2x+0+0) \\ &= (1+yz+2z, y, 2x) \end{aligned}$$

4.6.3. Rotacional

Dado un campo vectorial en $\mathbb{R}^3$

$$\begin{array}{rccl} F: & A\subseteq\mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (x,y,z) & \rightsquigarrow & F(x,y,z) = (f_1(x,y,z), f_2(x,y,z), f_3(x,y,z)) \end{array}$$

definimos el *rotacional de* F, como el campo vectorial definido por

$$\nabla\times F = \mathrm{rot}(F) = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ f_1 & f_2 & f_3 \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial f_3}{\partial y}-\frac{\partial f_2}{\partial z}\right)\overrightarrow{i} + \left(\frac{\partial f_1}{\partial z}-\frac{\partial f_3}{\partial x}\right)\overrightarrow{j} + \left(\frac{\partial f_2}{\partial x}-\frac{\partial f_1}{\partial y}\right)\overrightarrow{k}$$

donde $\left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$ es la base canónica de $\mathbb{R}^3$.

4.6.4. Laplaciano

Dado un campo escalar en $\mathbb{R}^n$

$$\begin{array}{rccl} f: & A\subseteq\mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,y,z) & \rightsquigarrow & f(x_1,\ldots,x_n) \end{array}$$

definimos el *Laplaciano de* f a

$$\Delta f = \nabla^2 f = \nabla\cdot(\nabla f) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}+\cdots+\frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}$$

El operador Laplaciano se utiliza para plantear la llamada ecuación de Laplace (también llamada ecuación del potencial) bidimensional homogénea que en coordenadas cartesianas es

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$$

donde $f(x, y)$ es un campo escalar de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$.

Ejercicio 4.1 *Calcula el gradiente y la divergencia del gradiente del siguiente campo vectorial*

$$\vec{u}(x, y, z) = \left(\frac{M}{2EI} \left(z^2 + \nu \left(x^2 - y^2 \right) \right), \frac{\nu M}{2EI} xy, -\frac{M}{2EI} xz \right),$$

donde ν, E, I son constantes. Hay que calcular $\nabla \vec{u}$ y $\nabla \cdot \nabla \vec{u}$.