Capítulo 8

Ecuaciones lineales de orden superior

8.1. Ecuación diferencial lineal de segundo orden con coeficientes constantes

Definición 8.1 *Una EDO lineal de segundo orden con coeficientes constantes es de la forma*

$$y''(x) + ay(x) + by(x) = r(x)$$

Con $a, b \in \mathbb{R}$. La EDO se dice homogénea si $r(x) = 0$, en caso contrario será no homogénea.

Definición 8.2 *Definimos el* polinomio característico *de una edo lineal de segundo orden con coeficientes constantes a*

$$p(\lambda) = \lambda^2 + a\lambda + b$$

Como el polinomio característico es un polinomio de segundo grado, sus dos raíces pueden ser de 3 tipos:

1. Las dos raíces son reales y distintas: $\exists \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, con $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Entonces la solución general de la EDO homogénea es de la forma

   $$y_h(x) = Ae^{\lambda_1 x} + Be^{\lambda_2 x}$$

   donde A,$B \in \mathbb{R}$.

2. Hay una raíz real doble: $\exists \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, con $\lambda_1 = \lambda_2$. Entonces la solución general de la EDO homogénea es de la forma

   $$y_h(x) = Ae^{\lambda_1 x} + Bxe^{\lambda_1 x}$$

   donde A,$B \in \mathbb{R}$.

3. Las raíces son complejas conjugadas: $\exists \alpha \pm i\beta \in \mathbb{C}$, con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Entonces la solución general de la EDO homogénea es de la forma

   $$y_h(x) = Ae^{ax} \cos \beta x + Be^{\alpha x} \operatorname{sen} \beta x$$

   donde A,$B \in \mathbb{R}$.

Ejemplo 8.1 *Resuelve la siguiente EDO*

$$y'' - 5y' + 6y = 0$$

Su polinomio característico es

$$p(\lambda) = \lambda^2 - 5\lambda + 6$$

y sus raíces

$$p(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0 \Leftrightarrow \lambda = \frac{5 \pm \sqrt{25-24}}{2} = \frac{5 \pm 1}{2} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = \frac{5+1}{2} = 3 \\ \lambda_2 = \frac{5-1}{2} = 2 \end{cases}$$

son raíces reales distintas, luego la solución general de EDO es

$$y_h(x) = Ae^{3x} + Be^{2x}.$$

Ejemplo 8.2 *Resuelve la siguiente EDO*

$$y'' - 4y' + 4y = 0$$

Su polinomio característico es

$$p(\lambda) = \lambda^2 - 4\lambda + 4$$

y sus raíces

$$p(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0 \Leftrightarrow \lambda = \frac{4 \pm \sqrt{16-16}}{2} = \frac{4 \pm 0}{2} \Rightarrow \left\{ \lambda_1 = \lambda_2 = \frac{4}{2} = 2 \right.$$

son raíces reales e iguales, luego la solución general de EDO es

$$y_h(x) = Ae^{2x} + Bxe^{2x}.$$

Ejemplo 8.3 *Resuelve la siguiente EDO*

$$y'' - 2y' + 2y = 0$$

Su polinomio característico es

$$p(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda + 2$$

y sus raíces

$$p(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0 \Leftrightarrow \lambda = \frac{2 \pm \sqrt{4-8}}{2} = \frac{2 \pm 2i}{2} = 1 + i \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 1 + i \\ \lambda_2 = 1 - i \end{cases}$$

son raíces complejas conjugadas, luego la solución general de EDO es

$$y_h(x) = Ae^{x} \cos x + Be^{x} \operatorname{sen} x.$$

Para resolver la ecuación no homogénea, necesitamos resolver la ecuación homogénea y encontrar una solución particular $y_p(x)$ de la no homogénea, de este modo, la solución general de la solución no homogénea será

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x).$$

La pregunta es ¿cómo podemos encontrar la solución particular $y_p(x)$? En algunos casos es posible utilizar el método de los coeficientes indeterminados, que consiste en usar una solución particular en función de cómo sea el término $r(x)$ y determinar los coeficientes. En la siguiente tabla se indican las soluciones particulares que se proponen para cada uno de los valores de $r(x)$

$r(x)$	$y_p(x)$
$C \in \mathbb{R}$	$K \in \mathbb{R}$
$Ce^{\alpha x}$, $C \in \mathbb{R}$	$Ke^{\alpha x}$, $K \in \mathbb{R}$
Cx^n, $C \in \mathbb{R}$	$K_0 + K_1 x + K_2 x^2 + \cdots + K_n x^n$, $K_j \in \mathbb{R}$
$C\cos(\lambda x)$, $C, \lambda \in \mathbb{R}$	$K_1 \cos\lambda x + K_2 \operatorname{sen}\lambda x,\ K_1, K_2 \in \mathbb{R}$
$C\operatorname{sen}(\lambda x)$, $C, \lambda \in \mathbb{R}$	$K_1 \cos\lambda x + K_2 \operatorname{sen}\lambda x,\ K_1, K_2 \in \mathbb{R}$
$Ce^{\mu x}\cos(\lambda x)$, $C, \lambda, \mu \in \mathbb{R}$	$K_1 e^{\mu x}\cos\lambda x + K_2 e^{\mu x}\operatorname{sen}\lambda x,\ K_1, K_2 \in \mathbb{R}$
$Ce^{\mu x}\operatorname{sen}(\lambda x)$, $C, \lambda, \mu \in \mathbb{R}$	$K_1 e^{\mu x}\cos\lambda x + K_2 e^{\mu x}\operatorname{sen}\lambda x,\ K_1, K_2 \in \mathbb{R}$
$P_n(x)\, e^{\mu x}\cos(\lambda x)$	$e^{\mu x}\left(Q_n(x)\cos(\lambda x) + R_n(x)\operatorname{sen}(\lambda x)\right)$
$P_n(x)\, e^{\mu x}\operatorname{sen}(\lambda x)$	$e^{\mu x}\left(Q_n(x)\cos(\lambda x) + R_n(x)\operatorname{sen}(\lambda x)\right)$

Para encontrar los coeficientes adecuados, se sustituye la solución particular adecuada en la ecuación diferencial no homogénea. Si $y_p(x)$ es solución de la ecuación homogénea, entonces se prueba con $xy_p(x)$ o $x^2 y_p(x)$, en el caso de raíces reales distintas o dobles, respectivamente.

Ejemplo 8.4 *Resuelve la siguiente EDO*

$$y'' + 3y' + 2y = 2x^2$$

Primero resolvemos la EDO homogénea

$$y'' + 3y' + 2y = 0$$

Su polinomio característico es

$$p(\lambda) = \lambda^2 + 3\lambda + 2$$

y sus raíces

$$p(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0 \Leftrightarrow \lambda = \frac{-3 \pm \sqrt{9-8}}{2} = \frac{-3 \pm 1}{2} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = -1 \\ \lambda_2 = -2 \end{cases}$$

son raíces reales y distintas, luego la solución general de EDO es

$$y_h(x) = Ae^{-x} + Be^{-2x}.$$

Para encontrar la solución particular miramos el término independiente que es un polinomio de segundo grado, por tanto tenemos que probar con

$$y_p(x) = K_0 + K_1 x + K_2 x^2$$

y la sustituimos en el EDO no homogénea. Necesitamos y_p' e y_p''

$$y_p' = K_1 + 2K_2 x$$

$$y_p'' = 2K_2$$

por tanto

$$\underbrace{(2K_2)}_{y_p''} + 3\underbrace{(K_1 + 2K_2x)}_{y_p'} + 2\underbrace{\left(K_0 + K_1x + K_2x^2\right)}_{y_p} = 2x^2$$

de donde

$$\begin{aligned} 2K_2 + 3K_1 + 6K_2x + 2K_0 + 2K_1x + 2K_2x^2 &= 2x^2 \\ (2K_2 + 3K_1 + 2K_0) + (6K_2 + 2K_1)\,x + 2K_2x^2 &= 2x^2 \end{aligned}$$

e igualando coeficientes

$$\begin{aligned} 2K_2 &= 2 \\ 6K_2 + 2K_1 &= 0 \\ 2K_2 + 3K_1 + 2K_0 &= 0 \end{aligned}$$

que tiene por solución

$$\begin{aligned} K_2 &= 1 \\ K_1 &= -3 \\ K_0 &= \frac{7}{2} \end{aligned}$$

La solución particular es

$$y_p\,(x) = \frac{7}{2} - 3x + x^2$$

y la solución general de la EDO no homogénea sería

$$y\,(x) = y_h\,(x) + y_p\,(x) = Ae^{-x} + Be^{-2x} + \frac{7}{2} - 3x + x^2$$

8.2. Ecuación diferencial lineal de orden n con coeficientes constantes

Definición 8.3 *Una EDO lineal de orden n con coeficientes constantes es de la forma*

$$y^{(n)}\,(x) + a_{n-1}y^{(n-1)}\,(x) + \cdots + a_1y'\,(x) + a_0y\,(x) = r\,(x)$$

Con $a_k \in \mathbb{R}$. La EDO se dice homogénea si $r\,(x) = 0$, en caso contrario será no homogénea.

Por ejemplo

$$y^{iv} - y''' + y'' + y = 0$$

es una EDO lineal de orden 4 con coeficientes constantes.

Definición 8.4 *Definimos el* polinomio característico *de una edo lineal de orden n con coeficientes constantes a*

$$p\,(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0$$

Para resolver la EDO lineal de orden n con coeficientes constantes homogénea, se procede como en el caso de las de segundo orden. Tenemos que encontrar las raíces del polinomio característico. Estas raíces pueden ser reales o complejas y pueden ser simples o múltiples y para cada tipo se añade el término correspondiente

1. Si $\lambda_k \in \mathbb{R}$, con multiplicidad $m(\lambda_k) = m$, entonces la solución general de la homogénea lleva un término de la forma

$$y_k(x) = C_1 e^{\lambda_k x} + C_2 x e^{\lambda_k x} + \cdots + C_m x^{m-1} e^{\lambda_k x}$$

donde $C_j \in \mathbb{R}$.

2. Si $\alpha_k + i\beta_k \in \mathbb{C}$, y junto con su compleja conjugada, tiene multiplicidad $m(a_k + i\beta) = m$, entonces la solución general de la homogénea lleva un término de la forma

$$y_k(x) = e^{\alpha_k x}\left(C_1^1 \cos\beta x + C_1^2 \operatorname{sen}\beta x\right) + x e^{\alpha_k x}\left(C_2^1 \cos\beta x + C_2^2 \operatorname{sen}\beta x\right) + \cdots + x^{m-1} e^{\alpha_k x}\left(C_m^1 \cos\beta x + C_m^2 \operatorname{sen}\beta\right.$$

donde $C_j^1, C_j^2 \in \mathbb{R}$.

Ejemplo 8.5 *Resuelve la EDO*

$$y^{(6)} - 3y^{(5)} - 2y^{(4)} - 4y''' + 72y'' - 128y' + 64y = 0$$

El polinomio característico es

$$p(\lambda) = \lambda^6 - 3\lambda^5 - 2\lambda^4 - 4\lambda^3 + 72\lambda^2 - 128\lambda + 64$$

Usando Ruffini podemos determinar que $p(\lambda)$ tiene 6 raíces:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 1 \textit{ simple} \\ \lambda_2 &= 2 \textit{ con multiplicidad } 3 \\ \lambda_3 &= -2 \pm 2i \textit{ simple} \end{aligned}$$

La solución general de la EDO tiene los siguientes términos.

Raíz	*Multiplicidad*	*Término*
$\lambda_1 = 1$	1	Ae^x
$\lambda_2 = 2$	3	$Be^{2x} + Cxe^{2x} + Dx^2e^{2x}$
$\alpha_1 \pm i\beta_1 = -2 \pm 2i$	1	$e^{-2x}(E\cos 2x + F\operatorname{sen} 2x)$

es decir la solución será

$$y(x) = Ae^x + Be^{2x} + Cxe^{2x} + Dx^2e^{2x} + e^{-2x}(E\cos 2x + F\operatorname{sen} 2x)$$

Para resolver la EDO lineal de orden n con coeficientes constantes no homogénea, se procede como en el caso de orden 2, la solución general será de la forma

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x)$$

donde $y_h(x)$ es la solución general de la EDO homogéna e $y_p(x)$ es una solución particular que se determina mediante el método de los coeficientes indeterminados, según el término independiente $r(x)$, la tabla coincide con la tabla incluida en la sección correspondiente a las EDO de segundo orden.

Si $r(x)$es suma de varios de los términos, $y_p(x)$ será la suma de los términos correspondientes.

Ejemplo 8.6 *Calcula la solución de la siguiente EDO*

$$y'' - 2y' - 3y = 2e^x - 10 \operatorname{sen} x$$

Primero resolvemos la EDO homogénea

$$y'' - 2y' - 3y = 0$$

Su polinomio característico es

$$p(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda - 3$$

y sus raíces

$$p(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0 \Leftrightarrow \lambda = \frac{2 \pm \sqrt{4+12}}{2} = \frac{2 \pm 4}{2} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 3 \\ \\ \lambda_2 = -1 \end{cases}$$

son raíces reales y distintas, luego la solución general de la EDO homogénea es

$$y_h(x) = Ae^{3x} + Be^{-x}.$$

Para encontrar la solución particular miramos el término independiente que está formado por una exponencial y una función trigonométrica, por tanto tenemos que probar con una suma de los dos términos una función exponencial y una combinación lineal de funciones trigonométricas

$$y_p(x) = Ce^x + D\cos x + E \operatorname{sen} x$$

que sustituimos en el EDO no homogénea. Necesitamos y_p' e y_p''

$$y_p' = Ce^x - D \operatorname{sen} x + E\cos x$$

$$y_p'' = Ce^x - D\cos x - E \operatorname{sen} x$$

por tanto

$$\underbrace{(Ce^x - D\cos x - E \operatorname{sen} x)}_{y_p''} - 2\underbrace{(Ce^x - D \operatorname{sen} x + E\cos x)}_{y_p'} - 3\underbrace{(Ce^x + D\cos x + E \operatorname{sen} x)}_{y_p} = 2e^x - 10 \operatorname{sen} x$$

de donde

$$e^x(C - 2C - 3C) + \cos x(-D - 2E - 3D) + \operatorname{sen} x(-E + 2D - 3E) = 2e^x - 10 \operatorname{sen} x$$

$$e^x(-4C) + \cos x(-4D - 2E) + \operatorname{sen} x(-4E + 2D) = 2e^x - 10 \operatorname{sen} x$$

e igualando coeficientes

$$\begin{aligned} -4C &= 2 \\ -4D - 2E &= 0 \\ -4E + 2D &= -10 \end{aligned}$$

que tiene por solución

$$\begin{aligned} C &= -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2} \\ D &= -1 \\ E &= 2 \end{aligned}$$

La solución particular es

$$y_p(x) = -\frac{1}{2}e^x - \cos x + 2\,\mathrm{sen}\, x$$

y la solución general de la EDO no homogénea sería

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = Ae^{3x} + Be^{-x} - \frac{1}{2}e^x - \cos x + 2\,\mathrm{sen}\, x$$

Ejemplo 8.7 *Calcula la solución de la siguiente EDO*

$$y'' + 3y = e^{2x}\cos 3x$$

Primero resolvemos la EDO homogénea

$$y'' + 3y = 0$$

Su polinomio característico es

$$p(\lambda) = \lambda^2 + 3$$

y sus raíces

$$p(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 + 3 = 0 \Leftrightarrow \lambda = \pm\sqrt{3}i \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = \sqrt{3}i \\ \\ \lambda_2 = -\sqrt{3}i \end{cases}$$

son raíces complejas conjugadas, luego la solución general de la EDO homogénea es

$$y_h(x) = A\cos\sqrt{3}x + B\,\mathrm{sen}\,\sqrt{3}x.$$

Para encontrar la solución particular miramos el término independiente que está formado por el producto de una función exponencial y una función trigonométrica, así que hay que probar con una función del mismo tipo, incluyendo ambas funciones trigonométricas

$$y_p(x) = e^{2x}(C\cos 3x + D\,\mathrm{sen}\, 3x)$$

que sustituimos en el EDO no homogénea. Necesitamos y_p' e y_p''

$$y_p' = 2e^{2x}(C\cos 3x + D\,\mathrm{sen}\, 3x) + e^{2x}(-3C\,\mathrm{sen}\, 3x + 3D\cos x) = e^{2x}((2C+3D)\cos 3x + (2D-3C)\,\mathrm{sen}\, 3x)$$

$$\begin{aligned} y_p'' &= 2e^{2x}((2C+3D)\cos 3x + (2D-3C)\,\mathrm{sen}\, 3x) + \\ &\quad e^{2x}(-3(2C+3D)\,\mathrm{sen}\, 3x + 3(2D-3C)\cos 3x) \\ &= e^{2x}((2(2C+3D) + 3(2D-3C))\cos 3x + (2(2D-3C) - 3(2C+3D))\,\mathrm{sen}\, 3x) \\ &= e^{2x}((12D-5C)\cos 3x + (-5D-12C)\,\mathrm{sen}\, 3x) \end{aligned}$$

por tanto

$$\underbrace{e^{2x}((12D-5C)\cos 3x + (-5D-12C)\,\mathrm{sen}\, 3x)}_{y_p''} + 3\underbrace{e^{2x}(C\cos 3x + D\,\mathrm{sen}\, 3x)}_{y_p} = e^{2x}\cos 3x$$

de donde

$$\begin{aligned} e^{2x}((12D-5C+3C)\cos 3x + (-5D-12C+3D)\,\mathrm{sen}\, 3x) &= e^{2x}\cos 3x \\ e^{2x}((12D-2C)\cos 3x + (-12C-2D)\,\mathrm{sen}\, 3x) &= e^{2x}\cos 3x \end{aligned}$$

e igualando coeficientes

$$\begin{aligned} 12D - 2C &= 1 \\ -12C - 2D &= 0 \Rightarrow D = -6C \end{aligned}$$

que tiene por solución

$$\begin{aligned} C &= -\frac{1}{74} \\ D &= \frac{3}{37} \end{aligned}$$

La solución particular es

$$y_p\left(x\right) = e^{2x}\left(-\frac{1}{74}\cos 3x + \frac{3}{37}\operatorname{sen} 3x\right) = \frac{e^{2x}}{74}\left(-\cos 3x + 6\operatorname{sen} 3x\right)$$

y la solución general de la EDO no homogénea sería

$$y\left(x\right) = y_h\left(x\right) + y_p\left(x\right) = A\cos\sqrt{3}x + B\operatorname{sen}\sqrt{3}x + \frac{e^{2x}}{74}\left(-\cos 3x + 6\operatorname{sen} 3x\right)$$

8.2.1. Sistemas de ecuaciones diferenciales

8.2.2. Ejercicios