Capítulo 9

Resolución de ecuaciones e interpolación

9.1. Ecuaciones y sistemas de ecuaciones no lineales

Denominamos *ecuación no lineal* a una ecuación del tipo

$$f(x) = 0$$

donde f es una función real de variable real no lineal. La función f puede ser polinomial, trascendente (aparecen en su expresión funciones exponenciales, logarítmicas y trigonométricas) e incluso puede ocurrir que no se disponga de una expresión explícita de $f(x)$, pero que se conozcan las reglas para su cálculo, por ejemplo, una función descrita mediante una ecuación diferencial.

Definición 9.1 *Llamamos* ***raíz*** *o* ***solución*** *de una ecuación no lineal $f(x) = 0$ a un valor r tal que $f(r) = 0$. También se dice que r es un* ***cero*** *de f.*

En general, las raíces de una ecuación no lineal no pueden ser calculadas de forma exacta. El objetivo de este capítulo consiste en ofrecer métodos numéricos que permitan obtener aproximaciones numéricas de las mismas.

En un proceso de cálculo de raíces de una ecuación no lineal pueden distinguirse tres fases:

1. **Localización**

   Interesa conocer la zona en la que se encuentran las raíces. En general, podemos obtener esta información bien a partir de una tabla de valores de la función, bien mediante un estudio analítico, o incluso mediante una representación gráfica aproximada cuando la función sea demasiado compleja. En la mayoría de los casos las ecuaciones provienen de un problema técnico o científico, cuyo conocimiento nos puede ayudar en la localización de las raíces.

2. **Separación**

   A veces, dos raíces diferentes de una ecuación están muy próximas. En estos casos, antes de aplicar un método numérico, conviene separar las raíces; es decir, conviene determinar intervalos que contengan una y sólo una raíz de la ecuación.

3. **Aproximación numérica**

El objetivo de esta fase es construir una sucesión de valores que converja hacia la raíz buscada. Esta sucesión se construye normalmente de forma iterativa a partir de ciertos valores o aproximaciones iniciales que supondremos están suficientemente cerca de la raíz buscada. A partir de los valores $x_k, x_{k-1}, \ldots, x_{k-m}$, obtenemos el valor de x_{k+1}, mediante una expresión del tipo $x_{k+1} = G(x_k, x_{k-1}, \ldots, x_{k-m})$.

Uno de los teorema más importantes utilizados en esta parte del cálculo numérico es el teorema de Bolzano que nos da condiciones suficientes para la existencia de una raíz en un intervalo.

Teorema 9.1 (Teorema de los ceros de Bolzano) *Sea* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, $f \in \mathcal{C}([a,b])$ *con* $f(a) \cdot f(b) < 0 \Rightarrow \exists\ r \in [a,b]$ *donde* $f(r) = 0$.

El siguiente resultado nos proporciona la unicidad de la solución en un intervalo (separación de raíces).

Teorema 9.2 *Sea* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, $f \in \mathcal{C}^1([a,b])$ *con* $f(a) \cdot f(b) < 0$, *si además* $f'(x) > 0$ *(o* $f'(x) > 0$*);* $\forall x \in (a,b) \Longrightarrow \exists^{\circ} r \in (a,b)$ *con* $f(r) = 0$.

Proposición 9.3 *Sea* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, $f \in \mathcal{C}^1([a,b])$ *y supongamos que* $\exists m > 0 \in \mathbb{R}$, *con* $|f'(x)| \geq m$ $\forall x \in [a,b]$. *Entonces si* r *es una raíz de* $f(x)$ *en* $[a,b]$ *y* α *es una aproximación de* r, *se cumple*

$$|r - \alpha| \leq \frac{|f(\alpha)|}{m}$$

Ejemplo 9.1 *Consideremos la función* $f(x) = x^2 - e^x$ *en el intervalo* $[-1, 0]$. *Vamos a comprobar que existe una única raíz de* $f(x)$ *en ese intervalo, para ello evaluamos la función en los extremos del intervalo*

$$f(-1) = -1 + e^{-1} = -1 + \frac{1}{e} \simeq -0{,}632\,12... < 0$$

$$f(1) = 0 + e^0 = 0 + 1 = 1 > 0$$

puesto que toma valores de signo contrario en los extremos del intervalo y la función es claramente continua, el teorema de Bolzano nos garantiza la existencia de una raíz de $f(x)$ *en ese intervalo. Por otra parte, la derivada de la función es*

$$f'(x) = 1 + e^x > e^x > 0$$

luego $f(x)$ *es creciente y la raíz es única.*

9.1.1. Método de aproximaciones sucesivas

Supongamos $f(x) \in \mathcal{C}([a,b])$ y supongamos que $\exists^{\circ} r \in [a,b]$ tal que $f(r) = 0$. Definimos la función $g(x)$ como

$$g(x) = x - f(x)$$

si r es una raíz de $f(x)$, entonces

$$g(r) = r - f(r) = r - 0 = r$$

lo que hace que r sea un punto fijo de la función $g(x)$.

Tomemos $x_0 \in [a,b]$ y construyamos la sucesión $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, definida como

$$x_{n+1} = g(x_n) = x_n - f(x_n)$$

Nos preguntamos en primer lugar si la sucesión así construida es convergente y en caso afirmativo, cuál sería su límite. Supongamos que $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tiene límite

$$\lim_{n\to\infty} x_n = s$$

como $g(x)$ es continua (ya que está definida a partir de $f(x)$, que es continua por hipótesis) se cumplirá

$$\lim_{n\to\infty} g(x_n) = g\left(\lim_{n\to\infty} x_n\right) = g(s)$$

Como cualquier subsucesión de x_n tendría su mismo límite, se cumpliría

$$\lim_{n\to\infty} x_{n+1} = s$$

pero teniendo en cuenta la construcción de la sucesión

$$s = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} g(x_n)$$

y por tanto se debería cumplir

$$s = \lim_{n\to\infty} g(x_n) = g\left(\lim_{n\to\infty} x_n\right) = g(s)$$

luego si la sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tiene límite s, ese límite es un punto fijo de la función $g(x)$ y por tanto también será una raíz de $f(x)$

$$g(s) = s - f(s) = s \Rightarrow f(s) = 0$$

Si la función $f(x)$ solamente tuviera una raíz, entonces está claro que debería ocurrir $r = s$ y el problema estaría resuelto.

El método de *aproximaciones sucesivas* se basa en la construcción, de forma recursiva, de una sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ a partir de un cierto valor inicial $x_0 \in [a,b]$. A partir de este valor inicial calculamos x_1, el siguiente elemento de la sucesión, usando la función $g(x)$, como $x_1 = g(x_0)$; y en general se calculará x_{n+1} a partir de x_n utilizando la función $g(x)$ como $x_{n+1} = g(x_n)$. Si la sucesión así construida es convergente, lo hará a un punto fijo de la función $g(x)$, es decir, a una raíz de la función $f(x)$.

La sucesión $\{x_n\}$ puede no ser convergente y en este caso hay que detener la producción de valores de la sucesión según un criterio dado. El algoritmo del método se podría desarrollar como sigue:

1. Tomamos $k = 0$, $\varepsilon > 0$ y $x_0 \in [a,b]$ y N, un valor para el número máximo de iteraciones.
2. Calcularmos $x_{k+1} = g(x_k) = x_k - f(x_k)$
3. Si la diferencia entre x_{k+1} y x_k es suficientemente pequeña, es decir, si $|x_{k+1} - x_k| < \varepsilon$, entonces x_{k+1} será la aproximación a la solución buscada, en caso contrario procedemos a comprobar si el número de iteraciones, es decir, si el número de términos de la sucesión excede un valor prefijado. Si $(k+1) > N$ entonces hemos superado el número máximo permitido de términos de la sucesión y el algoritmo se detiene. Si $(k+1) <= N$ entonces cambiamos k por $k+1$ y volvemos al punto 2.

La superación del número máximo de iteraciones suele ocurrir por dos motivos: primero, puede suceder que el número máximo de iteraciones sea insuficiente; en este caso podemos solucionar el problema aumentando el valor de ese número máximo. En segundo lugar puede ocurrir que la sucesión no converja a ningún punto fijo, en este caso la solución de este problema pasa por la existencia o no de la raíz. Si se ha demostrado la existencia de la raíz, podemos intentar cambiar el valor del término inicial x_0, y comprobar si la sucesión iniciada en ese punto es ahora convergente o no.

Los siguientes resultados garantizan el éxito del método de aproximaciones sucesivas.

Definición 9.2 *Sea $g : [a, b] \to \mathbb{R}$, diremos que g es* contractiva *si y sólo si $\exists\, 0 < L < 1 \in \mathbb{R}$ tal que*

$$\forall x, y \in [a, b] \Rightarrow |g(x) - g(y)| \leq L\,|x - y|$$

Ejemplo 9.2 *Vamos a demostrar, usando la definición, que la función $g\left(x\right) = x^2$ es contractiva en el intervalo $\left[0, \frac{1}{4}\right]$. Para ello tomamos $x, y \in \left[0, \frac{1}{4}\right]$, es decir, se cumple*

$$0 \leq x, y \leq \frac{1}{4}$$

Entonces

$$|g\left(x\right) - g\left(y\right)| = \left|x^2 - y^2\right| = |\left(x - y\right)\left(x + y\right)| = |\left(x - y\right)| \cdot |\left(x + y\right)|$$

usando la desigualdad triangular

$$\left|x^2 - y^2\right| \leq |\left(x - y\right)| \cdot \left(|x| + |y|\right)$$

pero como $x, y \geq 0$

$$\left|x^2 - y^2\right| \leq |\left(x - y\right)| \cdot \left(x + y\right)$$

y como $x, y \leq \frac{1}{4}$, entonces $x + y \leq \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$, luego

$$\left|x^2 - y^2\right| \leq \frac{1}{2}\left|\left(x - y\right)\right|$$

y la constante de Lipschitz es $\frac{1}{2}$.

Si la función es derivable, entonces podemos obtener una condición tipo Lipschitz más sencilla, utilizando la primera derivada.

Teorema 9.4 *Sea $g(x) \in \mathcal{C}^n([a, b])$*

$$\text{Si } \exists\ L \text{ tal que } \left|g'(x)\right| \leq L < 1 \Longrightarrow \forall x, y \in [a, b] : |g(x) - g(y)| \leq L\,|x - y|$$

es decir la función g es contractiva.

Demostración: Para demostrar esta implicación se utiliza el teorema del valor medio. Si tomamos $x, y \in [a, b]$, entonces utilizamos el teorema del valor medio

$$|g(x) - g(y)| = \left|g'\left(\xi\right)\left(x - y\right)\right| = \left|g'\left(\xi\right)\right| \cdot |\left(x - y\right)| \leq L\,|x - y|$$

Ejemplo 9.3 *Vamos a demostrar, usando el teorema anterior, que la función $g\left(x\right) = x^2$ es lipschitziana en el intervalo $\left[0, \frac{1}{4}\right]$. Calculamos la derivada*

$$g'\left(x\right) = 2x$$

que es una recta con pendiente positiva, luego la función es creciente y alcanza el máximo en el extremo superior del intervalo, es decir

$$g'\left(x\right) \leq g'\left(\frac{1}{4}\right) = 2\frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

como además $x \geq 0$, entonces $g'\left(x\right) = 2x > 0$ y por tanto $\left|g'\left(x\right)\right| = g'\left(x\right)$ para $x \in \left[0, \frac{1}{4}\right]$, luego se cumple

$$\left|g'\left(x\right)\right| \leq \frac{1}{2}.$$

Teorema 9.5 (Convergencia del método del punto fijo o teorema de la aplicación contractiva) *Sea $g : [a,b] \to [a,b]$ continua, entonces*

1.- *La función $g(x)$ tiene al menos un punto fijo.*

2.- *Si g es contractiva en $[a,b]$, entonces tiene un único punto fijo. El punto fijo se puede obtener como el límite de*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = r$$

siendo x_n la sucesión obtenida como

$$\begin{aligned} x_0 &\in [a,b] \\ x_{n+1} &= g(x_n) \end{aligned}$$

c.- *Se cumplen las siguientes desigualdades*

$$|x_n - r| \leq \frac{L}{1-L}|x_n - x_{n-1}| \leq \frac{L^n}{1-L}|x_1 - x_0|$$

Teorema 9.6 (Convergencia local) *Sean $g,\ g' \in \mathcal{C}[a,b]$ y supongamos que $g(x)$ tiene un punto fijo r en $[a,b]$. Entonces si $|g'(r)| < 1 \Rightarrow$*

$$\exists \varepsilon > 0 : \forall x_0 \in [r-\varepsilon, r+\varepsilon] \Rightarrow \{Si\ x_n = g(x_{n-1}) \Rightarrow \{x\}_{n=0}^{\infty}\ \textit{converge a } r\}$$

9.1.2. Método de bipartición

El teorema de Bolzano asegura que, si $f(x)$ es continua en $[a,b]$ y $f(a)f(b) < 0$, entonces existe un punto $r \in (a,b)$ que verifica $f(r) = 0$. En principio, podría existir más de una raíz dentro del intervalo $[a,b]$, pero supondremos que sólo existe una, entendiendo que previamente se habrán efectuado procesos de localización y separación.

El método de bipartición construye una sucesión de intervalos encajados

$$(a_0,b_0) \supset (a_1,b_1) \supset \ldots \supset (a_k,b_k) \supset \ldots$$

de manera que cada intervalo contenga a la raíz buscada, mientras que la amplitud de cada uno de ellos es la mitad de la del anterior. Cuando la amplitud del intervalo sea suficientemente pequeña como para satisfacer la precisión con la que queremos hallar la raíz, podremos considerar como una buena aproximación de ésta, el punto medio de dicho intervalor.

La construcción del método consiste en dividir en cada iteración el intervalo por la mitad. Tomemos $p = \frac{a+b}{2}$ y calculemos el valor de la función en ese punto. Puede ocurrir que $f(p) = 0$, en tal caso habremos encontrado el punto fijo. Por el contrario si $f(p) \neq 0$, entonces o bien $f(a)f(p) < 0$ y elegimos como nuevo intervalo $[a_1,b_1] = [a,p]$, o bien $f(b)f(p) < 0$ y en este caso elegimos como nuevo intervalo $[a_1,b_1] = [p,b]$. En cualquiera de estos dos caso se habrá reducido la longitud del nuevo intervalo a la mitad. Este mecanismo se repite con el nuevo intervalo, se construye así la sucesión de intervalos indicada al principio de la sección.

El algoritmo sería el siguiente: A partir de una función $f : [a,b] \to \mathbb{R}$; con $f \in \mathcal{C}([a,b])$ y $f(a)f(b) < 0$ y con una única raíz en el intervalo $[a,b]$, llamamos $a_0 = a$ y $b_0 = b$

1. Tomamos $k = 0$, $\varepsilon > 0$, $N \in \mathbb{N}$

2. Es $k > N$, el algoritmo termina indicando que se han superado el número de iteraciones máximas.
3. Elegimos
$$p = \frac{a_k + b_k}{2}$$
4. Si $f(p) = 0 \Rightarrow p$ es la raíz de $f(x)$
5. Si $f(p) \neq 0 \Rightarrow$
   a) Si $f(a)f(p) < 0 \Rightarrow [a_{k+1}, b_{k+1}] = [a_k, p]$
   b) Si $f(p)f(b) < 0 \Rightarrow [a_{k+1}, b_{k+1}] = [p, b_k]$
6. Si la longitud del intervalo es suficientemente pequeña, es decir, si $|b_{k+1} - a_{k+1}| < \varepsilon \Rightarrow$ Podemos tomar como raíz de la función f, cualquiera de los puntos: a_{k+1}, b_{k+1} o $p = \frac{a_{k+1}+b_{k+1}}{2}$. En caso contrario se cambia k por $k + 1$ y volvemos al punto 2.

Mediante este algoritmo se construyen dos sucesiones de puntos $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$. Por construcción, la sucesión $\{a_n\}$ es creciente y está acotada superiormente, por cualquiera de los elementos b_n, mientras que la sucesión $\{b_n\}$ es decreciente y acotada inferiormente por cualquiera de los elementos a_n, por tanto, ambas sucesiones tienen límite: α y β, respectivamente. También por la construcción de los diferentes intervalos tenemos que la longitud del intervalo $[a_n, b_n]$ es $\frac{b-a}{2^n}$. Por una parte tenemos

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \alpha \\ \\ \lim\limits_{n\to\infty} b_n = \beta \end{array}\right\} \Longrightarrow \alpha - \beta = \lim_{n\to\infty} (b_n - a_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{2^n} = 0$$

y por tanto $\alpha = \beta$. Teniendo en cuenta que se han elegido los extremos del intervalo de forma que la función $f(x)$ tome valores de signo contrario en ellos

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n)f(b_n) \leq 0$$

Por otra parte como $f(x) \in \mathcal{C}([a, b])$ y $\alpha = \beta$

$$0 \geq \lim_{n\to\infty} f(a_n) \cdot f(b_n) = f(\lim_{n\to\infty} a_n) \cdot f(\lim_{n\to\infty} b_n) = f(\alpha) \cdot f(\beta) = f(\alpha)^2 \geq 0$$

expresión de la que se extrae
$$f(\alpha) = 0$$

Análisis del error en el método de bipartición

En este algoritmo podemos determinar la cota de error absoluto que cometeremos al elegir un punto como aproximación de la solución de la ecuación. Si r es la raíz de la función f en el intervalo $[a, b]$, entonces el error cometido según el punto elegido será

$$\left.\begin{array}{l} r - a_n \leq b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n} \\ \\ b_n - r \leq b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n} \end{array}\right\} \Longleftrightarrow \text{Si elegimos como solución algún extremo del intervalo}$$

$$\left| r - \frac{a_n + b_n}{2} \right| \leq \frac{b_n - a_n}{2} \leq \frac{b-a}{2^{n+1}} \Longleftrightarrow \text{Si elegimos como solución el punto medio del intervalo}$$

Si queremos determinar el número de iteraciones necesarias para alcanzar una precisión predeterminada $\varepsilon > 0$, bastará con elegir la longitud del intervalo final de forma que

$$|r - x_n| \leq \frac{b-a}{2^{n+1}} < \varepsilon \Longrightarrow 2^{n+1} > \frac{b-a}{\varepsilon}$$

y tomando logaritmos en ambos lados

$$(n+1)\log 2 = \log \frac{b-a}{\varepsilon} \Longrightarrow n \geq \frac{\log(b-a) - \log(\varepsilon)}{\log 2}$$

9.1.3. Método de Newton-Raphson

Se trata de hallar la única raíz de $f(x) = 0$ en $[a, b]$ donde $f(a) \cdot f(b) < 0$, siendo $f(x)$ derivable en (a, b). La idea de este método consiste en sustituir la función $f(x)$ por la tangente a la misma en uno de sus extremos. Si elegimos, por ejemplo, la tangente en el extremo superior, su ecuación toma la forma

$$y - f(b) = f'(b)(x - b)$$

Buscamos ahora el punto intersección entre esta recta y el eje $\overline{OX}$, donde $y = 0$, y lo llamamos x_1.

$$-f(b) = f'(b)(x_1 - b)$$

despejando x_1

$$x_1 = b - \frac{f(b)}{f'(b)}$$

Tomamos ahora ese nuevo punto, como partida para obtener el siguiente elemento de la sucesión. De forma general si queremos calcular el punto x_{n+1} a partir de x_n utilizamos la expresión recursiva

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

En este caso la función $g(x)$ es

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

Teorema 9.7 (Teorema de la convergencia local) *Si $f''(x)$ es continua y $f'(x)$ no se anula en algún intervalo que contega a una raíz r de $f(x) = 0$, entonces $\exists \varepsilon > 0$ tal que el método de Newton es convergente $\forall x_0$ tal que $|x_0 - r| \leq \varepsilon$.*

Teorema 9.8 (Teorema de la convergencia global) *Si $f(x) \in \mathcal{C}^2([a, b])$ verificando*

1. $f(a) \cdot f(b) < 0$
2. $\forall x \in [a, b] \Longrightarrow f'(x) \neq 0$ (monótona estricta)
3. $\forall x \in [a, b] \Longrightarrow f''(x)$ no cambia de signo ($f''(x) \cdot f''(y) > 0$, $\forall x, y \in [a, b]$)

   Entonces, eligiendo como x_0 el extremo del intervalo que cumpla que f y f'' tienen el mismo signo, la sucesión de valores $\{x_n\}$ obtenida mediante el método de Newton-Raphson

   $$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

   converge a la única solución de la ecuación $f(x) = 0$ en $[a, b]$.

9.2. Interpolación polinomial

El problema de la interpolación consiste en evaluar el valor de una función en un punto cuando, o bien no se conoce la expresión explícita de dicha función, o bien no es fácil evaluar la expresión de dicha función en ese punto. Una posible solución para este problema es, por ejemplo, construir una función más sencilla de evaluar y que coincida con la función objeto del problema en los datos que conocemos sobre esta.

Generalmente, se obtienen los datos como un conjunto de puntos discretos, sin embargo a veces se requieren estimaciones de puntos entre esos valores discretos. Trataremos alguna técnica de ajuste de curvas de manera que con tales datos se obtengan aproximaciones intermedias. Además, a veces se requiere una versión simplificada de una función complicada. Una forma de hacerlo es calcular los valores de la función en un conjunto de datos discreto a lo largo del rango de interés, después se obtiene un función más simple utilizando estos valores.

También, en problemas reales, es normal tener un conjunto finito (discreto) de puntos en los cuales de un modo experimental, se ha observado el valor de una función, y siendo conveniente obtener una aproximación a dicha función, a partir de los datos conocidos. A esta idea se la conoce como interpolar, y para el caso más sencillo, la interpolación polinómica, consiste en calcular polinomios que se ajusten a los datos conocidos y nos proporcionen valores aproximados a la función en otros puntos.

Básicamente hay que concretar dos cuestiones en un problema de interpolación:

1. Los datos que se desea que sean comunes a la función dada y a la función interpolante.

2. El tipo de función que se va a utilizar como función interpoladora o función de interpolación.

9.2.1. Interpolación polinomial de Lagrange

Supongamos que conocemos los valores de una función $f(x)$ en $(n+1)$ puntos distintos, $\{x_k\}_{k=0}^{n}$, dentro del intervalo $[a,b]$; el problema de la interpolación polinomial de Lagrange consiste en hallar, si existe, un polinomio $P_n(x)$ de grado $\leq n$ tal que coincida con la función $f(x)$ en los puntos x_k, es decir, que ocurra

$$P_n(x_k) = f_k \qquad k = 0, \ldots, n$$

donde se ha utilizado la notación

$$f_k = f(x_k)$$

El caso más sencillo de interpolación se nos presenta cuando sólamente tenemos un punto, x_0, y se conoce el valor de la función en dicho punto $f_0 = f(x_0)$, obviamente este caso es trivial y el único polinomio de grado 0 que pasa por ese punto es el polinomio constante $P_0(x) = f_0$.

9.2.2. Interpolación lineal

El caso más sencillo de interpolación no trivial es el de interpolación lineal. Supongamos que conocemos el valor de una función $f(x)$ en dos puntos distintos x_0 y x_1, tendremos por tanto dos puntos en el plano

$$(x_0, f(x_0)) \text{ y } (x_1, f(x_1))$$

La ecuación de la recta que pasa por esos dos puntos tiene la siguiente forma

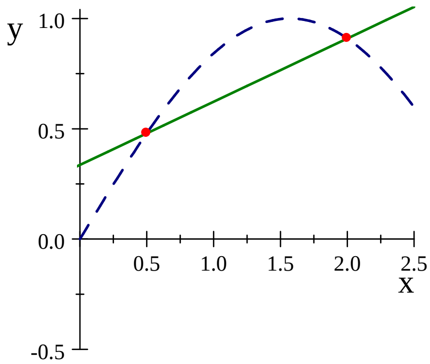
$$\frac{y - f(x_0)}{f(x_1) - f(x_0)} = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0},$$

despejando la variable y obtenemos

$$y = f(x_0) + \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}(x - x_0) \tag{9.1}$$

Esta recta es un polinomio de grado 1 y pasa por los puntos $(x_0, f(x_0))$ y $(x_1, f(x_1))$, cumple por tanto con la definición de polinomio interpolador, $y = P_1(x)$.

En la gráfica 9.2.2 se ha representado la interpolación lineal (en verde) entre dos puntos (en rojo) obtenidos a partir de la función $\sin(x)$ (que podemos ver azul y línea discontinua), como se puede apreciar este tipo de interpolación no es muy preciso.



Interpolación lineal.

Ejemplo 9.4 *Supongamos que conocemos el valor de una función $f(x)$ en los siguientes puntos*

$$\begin{aligned} f(0) &= 2 \\ f(3) &= 5 \end{aligned}$$

y nos piden encontrar un valor aproximado para $f(2)$ utilizando el polinomio interpolador de grado 1 adecuado.

Para ello utilizaremos la ecuación 9.1, es decir, la ecuación de la recta que pasa por los puntos $(0,2)$ y $(3,5)$. Sustituyendo en el lugar correspondiente se obtiene

$$\begin{aligned} P_1(x) &= f(0) + \frac{f(3) - f(0)}{3 - 0}(x - 0) = 2 + \frac{5 - 2}{3 - 0}x \\ P_1(x) &= 2 + x \end{aligned}$$

y el valor aproximado de la función en el punto 2 utilizando esta interpolación será

$$f(2) \simeq P_1(2) = 2 + 2 = 4$$

Para la construcción del polinomio interpolador de primer grado es posible utilizar un método alternativo. Este método es el siguiente: Sabiendo que el polinomio que pasa por $(x_0, f_0), (x_1, f_1)$ tiene que ser de grado ≤ 1, entonces tiene que tener la forma

$$P_1(x) = a_0 + a_1 x$$

Si ahora utilizamos las hipótesis que tiene que cumplir $P_1(x)$, es decir, que debe coincidir con la función $f(x)$ en los puntos x_0 y x_1, obtendremos

$$\begin{aligned} P_1(x_0) &= f_0 \\ P_1(x_1) &= f_1 \end{aligned}$$

y al utilizar la expresión para $P_1(x)$ resultará el siguiente sistema lineal

$$\left.\begin{array}{l} a_0 + a_1 x_0 = f_0 \\ \\ a_0 + a_1 x_1 = f_1 \end{array}\right\} \tag{9.2}$$

en las incógnitas a_0 y a_1. Resolviendo el sistema 9.2 obtendremos los coeficientes a_0 y a_1 y por tanto la expresión del polinomio de interpolación.

El sistema lineal tendrá solución si y sólo si el determinante de la matriz de coeficientes es no nulo

$$\begin{vmatrix} 1 & x_0 \\ 1 & x_1 \end{vmatrix} = x_1 - x_0 \neq 0 \Longleftrightarrow x_1 \neq x_0$$

es decir, los puntos han de ser diferentes, tal y como se ha planteado en las hipótesis iniciales.

Ejemplo 9.5 *Vamos a repetir el ejemplo anterior utilizando este método alternativo. El sistema que se obtiene es*

$$\left.\begin{array}{r} a_0 + a_1 * 0 = 2 \\ \\ a_0 + a_1 * 3 = 5 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} a_0 = 2 \\ \\ a_0 + a_1 * 3 = 5 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} a_0 = 2 \\ \\ a_1 = 1 \end{array}\right\}$$

y de nuevo obtenemos

$$P_1(x) = a_0 + a_1 x = 2 + x$$

Si tenemos un conjunto de puntos diferentes, $\{x_k\}_{k=0}^{n}$, y conocemos el valor de una determinada función $f(x)$ en esos puntos, es posible aplicar interpolación lineal entre cada par de puntos para obtener una función polinomial a trozos de primer grado que aproxime a la función. No obstante, la otra opción es mejorar esta aproximación mediante polinomios de grado superior a uno, ofreciendo además la derivabilidad del polinomio interpolador en todos los puntos, hecho que no sucede si consideramos el polinomio interpolador lineal a trozos, ya que en este caso el polinomio resultante, no será derivable en ninguno de los puntos x_k.

9.2.3. Interpolación cuadrática

En la línea de la sección anterior, tratamos ahora de buscar un polinomio $P_2(x)$ de grado ≤ 2 que pase por tres puntos diferentes x_0, x_1 y x_2, para los cuales conocemos el valor de una determinada función $f(x)$. Llamaremos polinomio de interpolación cuadrática o *parábola de interpolación* asociada a $f(x)$ a una función $P_2(x)$ que pasa por los puntos:

$$(x_0, f(x_0)), (x_1, f(x_1)), (x_2, f(x_2))$$

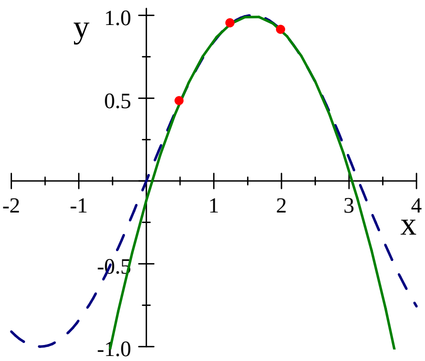
al polinomio $P_2(x)$ dado por

$$P_2(x) = \tfrac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} f(x_0) + \tfrac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} f(x_1) + \tfrac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} f(x_2) \tag{9.3}$$

Es sencillo comprobar que $P_2(x_k) = f(x_k)$ para $k = 0, 1, 2$, por ejemplo para $k = 0$

$$\begin{aligned} P_2(x_0) &= \tfrac{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} f(x_0) + \tfrac{(x_0-x_0)(x_0-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} f(x_1) + \tfrac{(x_0-x_0)(x_0-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} f(x_2) \\ &= 1 \cdot f(x_0) + 0 \cdot f(x_1) + 0 \cdot f(x_2) \\ &= f(x_0) \end{aligned}$$

de forma completamente análoga se comprueba para los puntos x_1 y x_2. En la gráfica 9.2.3 se ha representado la interpolación lineal (en verde) entre tres puntos (en rojo) obtenidos a partir de la función $\sin(x)$ (que podemos ver azul y línea discontinua), como se puede apreciar este tipo de interpolación mejora considerablemente la interpolación lineal.



Interpolación cuadrática.

Ejemplo 9.6 *Calcularemos en este ejemplo el polinomio interpolador cuadrático que pasa por*

$$\begin{aligned} f(0) &= 1 \\ f(2) &= 3 \\ f(5) &= 2 \end{aligned}$$

y utilizaremos dicho polinomio para obtener el valor aproximado de $f(x)$ en los puntos $x = 1$ y $x = 4$.

Utilizamos fórmula 9.3 para obtener

$$\begin{aligned} P_2(x) &= \frac{(x-2)(x-5)}{(0-2)(0-5)}1 + \frac{(x-0)(x-5)}{(2-0)(2-5)}3 + \frac{(x-0)(x-2)}{(5-0)(5-2)}2 \\ &= \frac{(x-2)(x-5)}{10} + \frac{x(x-5)}{-2} + \frac{x(x-2)}{15}2 \\ &= -\frac{4}{15}x^2 + \frac{23}{15}x + 1 \end{aligned}$$

El valor de la función en los puntos pedidos es

$$\begin{aligned} f(1) &\cong P_2(1) = \frac{34}{15} \\ f(4) &\cong P_2(4) = \frac{43}{15} \end{aligned}$$

Si ahora tenemos en cuenta el razonamiento efectuado para el caso lineal, es posible obtener la parábola de interpolación otro modo. Procediendo como antes, en primer lugar tenemos en cuenta que el polinomio $P_2(x)$ debe ser de grado ≤ 2, por tanto tendrá la forma

$$P_2(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$$

En segundo lugar como ha de pasar por los puntos (x_0, f_0), (x_1, f_1) y (x_2, f_2), se deben cumplir las siguientes relaciones

$$\left.\begin{array}{l} P_2(x_0) \equiv f_0 = a_0 + a_1 x_0 + a_2 x_0^2 \\ \\ P_2(x_1) \equiv f_1 = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^2 \\ \\ P_2(x_2) \equiv f_2 = a_0 + a_1 x_2 + a_2 x_2^2 \end{array}\right\} \tag{9.4}$$

Y la solución del problema pasa por resolver el sistema lineal 9.4 en las incógnitas a_0, a_1 y a_2. El sistema tendrá solución única siempre que el determinante de la matriz de coeficientes sea distinto de 0

$$\begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 \\ 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \end{vmatrix} = (x_2 - x_0)(x_1 - x_0)(x_2 - x_1) \neq 0$$

condición que de nuevo es equivalente a tomar todos los puntos distintos dos a dos.

Ejemplo 9.7 *Para los datos del ejemplo anterior se obtiene el siguiente sistema*

$$\left.\begin{array}{r} a_0 + a_1 0 + a_2 0^2 = 1 \\ \\ a_0 + a_1 2 + a_2 2^2 = 3 \\ \\ a_0 + a_1 5 + a_2 5^2 = 2 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{c} a_0 = 1 \\ \\ a_0 + 2a_1 + 4a_2 = 3 \\ \\ a_0 + 5a_1 + 25a_2 = 2 \end{array}\right\}$$

cuyo matriz de coeficientes es

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 5 & 25 \end{vmatrix}$$

y cuya solución es

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 5 & 25 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 23/15 \\ -4/15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

y el polinomio es

$$P_2(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 = 1 + \frac{23}{15}x - \frac{4}{15}x^2$$

que, como no podía ser de otra forma, coincide con el encontrado anteriormente.

9.2.4. Interpolación polinómica general. Polinomio de Lagrange.

Siguiendo con la idea anterior podemos buscar ahora, para un conjunto de puntos distintos $\{x_k\}_{k=0}^n$, en los cuales es conocido el valor de una función $f(x)$,$\{f_k = f(x_k)\}_{k=0}^n$, el polinomio interpolador de grado $\leq n$ que pasa por todos. Tendremos el siguiente teorema

Teorema 9.9 *Sea* $\{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ *un conjunto de* $(n+1)$ *puntos distintos dos a dos. Supongamos que conocemos el valor de una función* $f(x)$ *en esos puntos* $\Longrightarrow \exists^{\circ}$ $P_n(x)$ *polinomio interpolador de grado* $\leq n$ *que pasa por los puntos*

$$(x_0, f(x_0)), (x_1, f(x_1)), \ldots, (x_n, f(x_n))$$

y puede expresarse como.

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f(x_i) \prod_{j \neq k} \frac{(x - x_j)}{(x_k - x_j)}$$

Dicho polinomio se llama Polinomio interpolador de Lagrange de grado n *que pasa por los puntos* $\{(x_k, f(x_k))\}_{k=0}^{n}$.

Demostración: La existencia de dicho polinomio es inmediata, puesto que por la construcción de $P_n(x)$, es fácil comprobar que se trata de un polinomio de a lo sumo grado n. Además también podemos comprobar, sin más que evaluar el polinomio en x_k, que pasa por los puntos $(x_k, f(x_k))$ $k = 0$, 1,..., n.

Para la unicidad, vamos a suponer que existe otro polinomio $Q_n(x)$ también de grado $\leq n$ y que también pase por los puntos $\{x_k\}_{k=0}^{n} \Rightarrow Q_n(x_k) = f_k \ \forall k = 0, 1, \ldots, n$. Construimos el polinomio

$$R_n(x) = P_n(x) - Q_n(x)$$

Por las hipótesis sobre $P_n(x)$ y $Q_n(x)$, la función $R_n(x)$ también es un polinomio de grado $\leq n$. Si ahora evaluamos dicho polinomio en los puntos $\{x_k\}_{k=0}^{n}$ se obtiene

$$R_n(x_k) = P_n(x_k) - Q_n(x_k) = f_k - f_k = 0 \quad k = 1, \ldots, n$$

y $R_n(x)$ es un polinomio de grado $\leq n$ que tiene $(n+1)$ raíces, pero recordando el Teorema Fundamental del Álgebra, un polinomio de grado n tiene exactamente n raíces, pero $R_n(x)$ es de grado $\leq n$ y tiene $(n+1)$, así que la única opción válida es que $R_n(x)$ sea el polinomio nulo, es decir, $R_n(x) = 0$, de aquí se obtiene que los polinomios $P_n(x)$ y $Q_n(x)$ son en realidad el mismo polinomio.

Definición 9.3 *Sea el conjunto* $\{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$*, una familia de* $(n+1)$ *puntos distintos dos a dos y supongamos que conocemos el valor de una función* $f(x)$ *en esos puntos. Definimos los* polinomios de Lagrange *de grado n asociados a* $\{x_k\}_{k=1}^{n}$ *,al polinomio* $L_k(x)$ *para* $k = 0, \ldots, n$*, definido como*

$$\begin{aligned} L_k(x) &= \prod_{j=0; j \neq k} \frac{(x - x_j)}{(x_k - x_j)} \\ &= \frac{(x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_{k-1})(x - x_{k+1}) \cdots (x - x_n)}{(x_k - x_0)(x_k - x_1) \cdots (x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1}) \cdots (x_k - x_n)} \end{aligned}$$

Se comprueba fácilmente que los polinomios $L_k(x)$ *tienen la siguiente propiedad*

$$L_k(x_j) = \begin{cases} 0 \ si \ k \neq j \\ \\ 1 \ si \ k = j \end{cases}$$

Luego el polinomio interpolador $P_n(x)$ *de los puntos* $\{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ *se puede expresar como*

$$P_n(x) = f_0 L_0(x) + \cdots + f_n L_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f_k L_k(x)$$

Igual que en los dos casos anteriores es posible encontrar el polinomio interpolador resolviendo el sistema lineal que resulta de aplicar la hipótesis del grado a $P_n(x)$ y a su paso por los puntos $(x_k, f(x_k))_{k=0}^n$.

Por una parte, como $P_n(x)$ tiene grado $\leq n$, podrá expresarse de la forma

$$P_n(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$$

y por otra, como $P_n(x)$ pasa por los puntos $(x_k, f(x_k))$ para $k = 0, \ldots n$, resulta $P_n(x_j) = f(x_j)$, es decir

$$\left.\begin{array}{c} P_n(x_0) \equiv f_0 = a_0 + +a_1 x_0 + \cdots + a_n x_0^n = f_0 \\ \\ P_n(x_1) \equiv f_1 = a_0 + +a_1 x_1 + \cdots + a_n x_1^n = f_1 \\ \vdots \\ P_n(x_n) \equiv f_n = a_0 + +a_1 x_n + \cdots + a_n x_n^n = f_n \end{array}\right\}$$

que es un sistema lineal cuya matriz de coeficientes es la llamada *matriz de Vandermonde*

$$\begin{pmatrix} 1 & x_0 & \ldots & x_0^n \\ 1 & x_1 & \ldots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & \ldots & x_n^n \end{pmatrix}$$

y su determinante el *determinante de Vandermonde* y que es distinto de 0 si todos los puntos $\{x_k\}_{k=0}^n$ son distintos dos a dos.

Ejemplo 9.8 *Calcularemos el polinomio interpolador de Lagrange para el siguiente conjunto de puntos*

$$\begin{aligned} f(0) &= 1 \\ f(2) &= 1 \\ f(4) &= 2 \\ f(6) &= 0 \end{aligned}$$

Después utilizaremos dicho polinomio para obtener un valor aproximado para $f(1)$ y $f(3)$.

Como hay 4 puntos, el polinomio interpolador será como mucho de grado 3 y puede expresarse como

$$P_3(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$$

Como $f(x)$ y $P_3(x)$ deben coincidir en los puntos dados.

$$\left.\begin{array}{r} a_0 + a_1 \cdot 0 + a_2 \cdot 0^2 + a_3 \cdot 0^3 = 1 \\ \\ a_0 + a_1 \cdot 2 + a_2 \cdot 2^2 + a_3 \cdot 2^3 = 1 \\ \\ a_0 + a_1 \cdot 4 + a_2 \cdot 4^2 + a_3 \cdot 4^3 = 2 \\ \\ a_0 + a_1 \cdot 6 + a_2 \cdot 6^2 + a_3 \cdot 6^3 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 4 & 16 & 64 \\ 1 & 6 & 36 & 216 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Resolviendo el sistema se obtienen los valores de los coeficientes del polinomio a_k

$$\begin{aligned} a_0 &= 1 \\ a_1 &= -\frac{11}{12} \\ a_2 &= \frac{5}{8} \\ a_3 &= -\frac{1}{12} \end{aligned}$$

El polinomio resulta

$$P_3(x) = 1 - \frac{11}{12}x + \frac{5}{8}x^2 - \frac{1}{12}x^3$$

y el valor en los puntos pedidos se obtiene sustituyendo directamente

$$\begin{aligned} f(1) &\simeq P_3(1) = 1 - \frac{11}{12} + \frac{5}{8} - \frac{1}{12} = \frac{5}{8} \\ f(3) &\simeq P_3(3) = 1 - \frac{11}{12}3 + \frac{5}{8}9 - \frac{1}{12}27 = \frac{13}{8} \end{aligned}$$

9.2.5. Estimación del error de Interpolación

Cuando la función $f(x)$ es conocida, entonces podemos encontrar una expresión para el error cometido entre el verdadero valor de la función en un punto y el valor que el polinomio de interpolación correspondiente toma en dicho punto.

Proposición 9.10 *Sean $\{x_k\}_{k=0}^n \in [a,b]$, $n+1$ puntos distintos. Supongamos que $f \in \mathcal{C}^{n+1}([a,b])$. Entonces*

$$\forall x \in [a,b]; \exists \theta_x \in [a,b] : E_n(x) = f(x) - P_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\theta_x)}{(n+1)!}\prod_{k=0}^{n}(x - x_k)$$

Demostración: Consideremos un valor $x \neq x_j$; $j = 0, \ldots n$. Para ese valor fijo, construímos la función

$$g(t) = f(t) - P_n(t) - (f(x) - P_n(x))\prod_{i=0}^{n}\frac{(t - x_i)}{(x - x_i)}$$

que por construcción, es de clase $\mathcal{C}^{n+1}([a,b])$, además

$$\begin{aligned} g(x_k) &= 0 \quad k = 0, \ldots, n \\ g(x) &= 0 \end{aligned}$$

y tiene por tanto $n+2$ raíces distintas en $[a,b]$. Utilizamos ahora el teorema de Rolle generalizado (aplicando sucesivamente el teorema de Rolle). A partir de estos $(n+2)$ ceros de $f(x)$, se deduce que la derivada $(n+1)$–ésima de $f(x)$ tendrá 1 cero, es decir, existirá un cierto $\theta_x \in [a,b]$ tal que $g^{n+1}(\theta_x) = 0$, es decir

$$0 = g^{(n+1)}(\theta_x) = f^{(n+1)}(\theta_x) - P_n^{(n+1)}(\theta_x) - (f(x) - P_n(x))\frac{d^{(n+1)}}{dt^{n+1}}\left[\prod_{i=0}^{n}\frac{(t - x_i)}{(x - x_i)}\right]_{t=\theta_x}$$

Como $P_n(t)$ es de grado $n \Rightarrow P_n^{(n+1)}(x) = 0$.
Por otra parte como

$$\prod_{i=0}^{n} \frac{(t-x_i)}{(x-x_i)} = \frac{1}{\prod_{i=0}^{n}(x-x_i)} t^{n+1} + \left(b_n t^n + b_{n-1} t^{n-1} + \cdots + b_1 t + b_0\right)$$

su derivada $(n+1)$–ésima será

$$\frac{d^{(n+1)}}{dt^{n+1}} \left[\prod_{i=0}^{n} \frac{(t-x_i)}{(x-x_i)} \right]_{t=\theta_x} = \frac{(n+1)!}{\prod_{i=0}^{n}(x-x_i)}$$

y sustituyendo en la ecuación correspondiente

$$0 = f^{(n+1)}(\theta_x) - (f(x) - P_n(x)) \frac{(n+1)!}{\prod_{i=0}^{n}(x-x_i)}$$

despejando, se obtiene ahora el resultado pedido.

Según el teorema de Rolle si $f(x) \in \mathcal{C}^1([a,b])$ y $f(a) = f(b)$ entonces $\exists \xi \in [a,b]$ tal que $f'(\xi) = 0$. Por tanto entre cada dos ceros consecutivos de $f(x)$, su derivada $f'(x)$ tiene uno. Por tanto, si $f(x)$ tiene n ceros diferentes $\Rightarrow f'(x)$ tendrá $(n-1)$ ceros y si ahora $f(x) \in \mathcal{C}^2[a,b]$, entonces $f''(x)$ tendrá $n-2$ ceros diferentes y así sucesivamente.

Corolario 9.11 *En las condiciones del teorema anterior $f^{(n+1)}(\theta_x) = (n+1)! \cdot g(x)$, siendo*

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{f(x) - P_n(x)}{L(x)} & x \neq x_k \\ \dfrac{f'(x) - P_n'(x)}{L(x)} & x = x_k \end{cases}$$

con $L(x) = (x-x_0) \cdots (x-x_n)$

Demostración: Trivial si $x \neq x_k$ y utilizando la regla de L'Hôpital para $x = x_k$.