509101011-Matemáticas II - Grado en Ingeniería Química Industrial
21 de abril de 2021
Examen Parcial 1 - Duración: 150 minutos

APELLIDOS y NOMBRE: DNI:

Firma:

TIPO EXAMEN: [X] PARCIAL 1 [ ] PARCIAL 2 [ ] GLOBAL [ ] PROBLEMAS MESA:

OBSERVACIONES Y REQUISITOS

- Coloca el DNI o equivalente encima de la mesa. Rellena y entrega la hoja del enunciado. Pon tu nombre en cada folio de respuesta. Indica en la cabecera del enunciado el número de mesa que usas.
- Usa bolígrafo azul o negro, **nunca en lápiz, ni en color rojo**. **Escribe con claridad**.
- Está prohibido el uso de móviles. **NO** se puede usar calculadora programable. **NO** se permite ningún tipo de material bibliográfico. **NO** se permite la comunicación entre los asistentes al examen. **NO** se puede abandonar el examen durante la primera media hora. **NO** se puede salir del aula durante la realización del examen. **Cualquier violación de estas reglas o una acción irregular realizada durante la prueba será motivo de expulsión y una calificación final de 0 en la asignatura.**
- Los resultados obtenidos sin el razonamiento matemático adecuado serán puntuados con 0.

A. PRIMER PARCIAL (35 %)

1. (2 puntos) Determina si son convergentes o no las siguientes integrales impropias calculando su valor:

$$\text{a)} \int_1^{\infty} \frac{\operatorname{sen}\frac{\pi}{x}}{x^2}dx \qquad \text{b)} \int_0^3 \frac{x^3}{\sqrt{9-x^2}}dx$$

Solución:

a) La integral es impropia de primera especie puesto que es una integral definida sobre un intervalo no acotado, para comprobar su convergencia y calcular, en su caso, su valor hay que tener en cuenta que

$$\lim_{t\to\infty} \int_1^{t} \frac{\operatorname{sen}\frac{\pi}{x}}{x^2}dx$$

La primitiva es reducible a una inmediata de la forma

$$\int f'(x)\operatorname{sen} f(x)\,dx$$

con $f(x) = \frac{\pi}{x}$ y $f'(x) = -\frac{\pi}{x^2}$, para ello solo es necesario multiplicar y dividir por $-\pi$

$$\int_1^{t} \frac{\operatorname{sen}\frac{\pi}{x}}{x^2}dx = \int_1^{t} \frac{1}{x^2}\operatorname{sen}\frac{\pi}{x}dx = -\frac{1}{\pi}\int_1^{t} -\frac{\pi}{x^2}\operatorname{sen}\frac{\pi}{x}dx = \frac{1}{\pi}\cos\frac{\pi}{x}\Big|_{x=1}^{x=t} = \frac{1}{\pi}\left(\cos\frac{\pi}{t}-\cos\frac{\pi}{1}\right) = \frac{1}{\pi}\left(\cos\frac{\pi}{t}+1\right)$$

y tomando límites cuando $t\to\infty$

$$\lim_{t\to\infty} \int_1^{t} \frac{\operatorname{sen}\frac{\pi}{x}}{x^2}dx = \lim_{t\to\infty}\frac{1}{\pi}\left(\cos\frac{\pi}{t}+1\right) = \frac{1}{\pi}(\cos 0+1) = \frac{2}{\pi}\in\mathbb{R}.$$

luego

$$\int_1^{\infty} \frac{\operatorname{sen}\frac{\pi}{x}}{x^2}dx = \frac{2}{\pi}.$$

b) La integral es impropia de segunda especie puesto que en el extremo superior el denominador del integrando se anula y la función no es acotada en ese punto:

$$\lim_{t\to 3^-} \frac{x^3}{\sqrt{9-x^2}} = +\infty$$

El cálculo de la integral se hace tomando límite lateral a la izquierda de 3

$$\lim_{t\to 3^-} \int_0^t \frac{x^3}{\sqrt{9-x^2}} dx$$

La primitiva se encuentra muy fácilmente con el cambio

$$x = 3\,\text{sen}\,u \Rightarrow x^2 = 9\,\text{sen}^2\,u \Rightarrow 9 - x^2 = 9 - 9\,\text{sen}^2\,u = 9\left(1 - \text{sen}^2\,u\right) = 9\cos^2 u$$

$$dx = 3\cos u du$$

En este caso los extremos de integración son

$$\text{Para el extremo inferior, } x = 0 \Rightarrow 0 = 3\,\text{sen}\,u \Rightarrow \text{sen}\,u = 0 \Rightarrow u = 0$$

$$\text{Para el extremo superior, } x = 3 \Rightarrow 3 = 3\,\text{sen}\,u \Rightarrow \text{sen}\,u = 1 \Rightarrow u = \frac{\pi}{2}$$

de modo que

$$\int_0^3 \frac{x^3}{\sqrt{9-x^2}} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{27\,\text{sen}^3\,u}{\sqrt{9\cos^2 u}} 3\cos u\, du = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{27\,\text{sen}^3\,u}{3\cos u} 3\cos u\, du = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 27\,\text{sen}^3\,u\, du$$

que es una integral trigonométrica con exponente impar, que podemos resolver si realizamos la siguiente descomposición

$$\text{sen}^3\,u = \text{sen}^2\,u\ \ \text{sen}\,u = \left(1 - \cos^2 u\right)\text{sen}\,u = \text{sen}\,u - \cos^2 u\ \ \text{sen}\,u$$

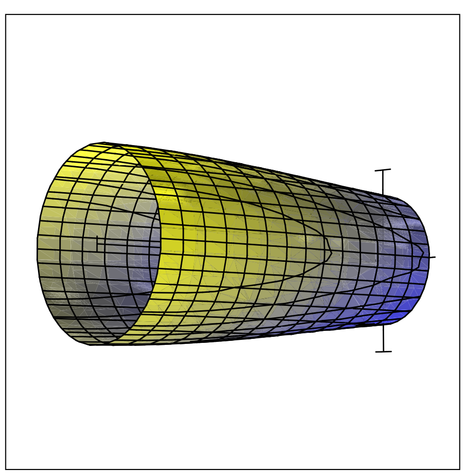
que proporciona una primitiva inmediata

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} 27\,\text{sen}^3\,u du = 27 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\text{sen}\,u - \cos^2 u\ \ \text{sen}\,u\right) du = -27\cos u + 9\cos^3 u\Big|_{u=0}^{u=\frac{\pi}{2}} = 18$$

Luego

$$\int_0^3 \frac{x^3}{\sqrt{9-x^2}} = 18.$$

2. (1 punto) Calcula el volumen del sólido engendrado al girar, en torno al eje OX, la superficie limitada por la curva $y = \frac{1}{x^2-4x+8}$ y las rectas $x = 0$ y $x = 2$.



Solución: La fórmula del volumen de un sólido de revolución alrededor del eje OX es

$$V_{OX} = \pi \int_a^b f(x)^2 \, dx$$

aplicado a la curva $y = \frac{1}{x^2-4x+8}$

$$V_{OX} = \pi \int_0^2 \left(\frac{1}{x^2-4x+8} \right)^2 dx = \pi \int_0^2 \frac{1}{(x^2-4x+8)^2} dx$$

que es una integral de una función racional, por tanto, buscamos las raíces del denominador

$$x^2 - 4x + 8 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{4 \pm \sqrt{16-32}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{-16}}{2} = \frac{4 \pm 4i}{2}$$

son raíces complejas conjugadas, como el exponente está elevado a 2, son raíces complejas dobles y un buen método para resolver el problema es el de método de Hermite. Para ello descomponemos la función de la siguiente forma

$$\frac{1}{(x^2-4x+8)^2} = \frac{Ax+B}{x^2-4x+8} + H'(x)$$

siendo $H'(x)$ el *término de Hermite* definido por

$$H(x) = \frac{Cx+D}{x^2-4x+8}$$

es decir

$$\frac{1}{(x^2-4x+8)^2} = \frac{Ax+B}{x^2-4x+8} + \left(\frac{Cx+D}{x^2-4x+8} \right)' = \frac{Ax+B}{x^2-4x+8} + \frac{C\left(x^2-4x+8\right) - (2x-4)(Cx+D)}{(x^2-4x+8)^2}$$

sumando las fracciones de la derecha, usando como mínimo común múltiplo $\left(x^2-4x+8\right)^2$

$$\frac{Ax+B}{x^2-4x+8} + \frac{C\left(x^2-4x+8\right) - (2x-4)(Cx+2)}{(x^2-4x+8)^2} = \frac{(Ax+B)\left(x^2-4x+8\right) + C\left(x^2-4x+8\right) - (2x-4)(Cx+D)}{(x^2-4x+8)^2}$$

el numerador de esta fracción es, ordenando por potencias decrecientes

$$Ax^3 + (-4A + B + C - 2C)\, x^2 + (8A - 4B - 4C - 2D + 4C)\, x + (8B + 8C + 4D)$$

e igualando al numerador de la función

$$\left. \begin{array}{c} A = 0 \\ \\ -4A + B - C = 0 \\ \\ 8A - 4B - 2D = 0 \\ \\ 8B + 8C + 4D = 1 \end{array} \right\}$$

Como $A = 0$, el sistema queda

$$\left. \begin{array}{c} B - C = 0 \\ \\ -4B - 2D = 0 \\ \\ 8B + 8C + 4D = 1 \end{array} \right\}$$

De la primera ecuación se obtiene $B = C$ y el sistema se simplifica

$$\left. \begin{array}{c} -4B - 2D = 0 \\ \\ 16B + 4D = 1 \end{array} \right\}$$

Sistema que se obtiene, por ejemplo, por reducción, multiplicando por 4 la primera y sumando:

$$-4D = 1 \Rightarrow D = -\frac{1}{4}$$

y los valores de B y C se obtienen a partir de este directamente

$$\left.\begin{array}{c} 4B = -2D = \frac{1}{2} \Rightarrow B = \frac{1}{8} \\ \\ C = B = \frac{1}{8} \end{array}\right\}$$

La descomposición buscada es

$$\frac{1}{(x^2-4x+8)^2} = \frac{\frac{1}{8}}{x^2-4x+8} + \left(\frac{\frac{1}{8}x - \frac{1}{4}}{x^2-4x+8}\right)'$$

e integrando

$$\int \frac{1}{(x^2-4x+8)^2} dx = \int \frac{\frac{1}{8}}{x^2-4x+8} dx + \int \left(\frac{\frac{1}{8}x - \frac{1}{4}}{x^2-4x+8}\right)' dx$$

Para la primera integral, tenemos en cuenta las raíces complejas

$$\int \frac{\frac{1}{8}}{x^2-4x+8} dx = \frac{1}{8} \int \frac{1}{4+(x-2)^2} dx$$

que es inmediata

$$\frac{1}{8} \int \frac{1}{4+(x-2)^2} dx = \frac{1}{8} \int \frac{1}{4\left(1+\left(\frac{x-2}{2}\right)^2\right)} dx = \frac{1}{16} \int \frac{\frac{1}{2}}{1+\left(\frac{x-2}{2}\right)^2} dx = \frac{1}{16} \arctan\left(\frac{x-2}{2}\right)$$

Mientras que la segunda integral es inmediata puesto que estamos integrando la derivada de una función

$$\int \left(\frac{\frac{1}{8}x - \frac{1}{4}}{x^2-4x+8}\right)' dx = \left(\frac{\frac{1}{8}x - \frac{1}{4}}{x^2-4x+8}\right) = \frac{1}{8} \frac{x-2}{x^2-4x+8}$$

Finalmente calculamos el volumen de la figura usando la Regla de Barrow

$$V_{OX} = \pi \int_0^2 \frac{1}{(x^2-4x+8)^2} dx = \pi \left[\frac{1}{16} \arctan\left(\frac{x-2}{2}\right) + \frac{1}{8} \frac{x-2}{x^2-4x+8}\right]_{x=0}^{x=2} = \frac{\pi}{64}(\pi+2)$$

3. (1 punto) Calcula $F'(x)$, siendo $F(x)$ la función definida como

$$F(x) = \int_{x^2}^{x^3} e^{-t^2} dt$$

Solución: Usando el teorema fundamental de cálculo integral y la regla de la cadena

$$F'(x) = e^{-\left(x^3\right)^2} 3x^2 - e^{-\left(x^2\right)^2} 2x = 3x^2 e^{-x^6} - 2x e^{-x^4}$$

4. Dada la función $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^3}{x^2+y^6} & (x,y) \neq (0,0) \\ \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

  a) (0.5 puntos) Calcula los límites iterados de $f(x,y)$ en el punto $(0,0)$.
  Solución:

$$\lim_{y\to 0} \lim_{x\to 0} \frac{xy^3}{x^2+y^6} = \lim_{y\to 0} \frac{0\cdot y^3}{0^2+y^6} = \lim_{y\to 0} 0 = 0$$

$$\lim_{x\to 0} \lim_{y\to 0} \frac{xy^3}{x^2+y^6} = \lim_{x\to 0} \frac{x\cdot 0^3}{x^2+0^6} = \lim_{x\to 0} 0 = 0$$

b) (0.5 puntos) Calcula el límite de la función en el punto $(0,0)$ cuando (x,y) se encuentre sobre rectas que pasan por el origen (límites direccionales).

Solución: Las rectas que pasan por el origen son de la forma $y=\lambda x$ con $\lambda \in \mathbb{R}$, por tanto se pide

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=\lambda x}} \frac{xy^3}{x^2+y^6} = \lim_{x\to 0} \frac{x(\lambda x)^3}{x^2+(\lambda x)^6} = \lim_{x\to 0} \frac{\lambda^3 x^4}{x^2+\lambda^6 x^6} = \lim_{x\to 0} \frac{\lambda^3 x^4}{x^2\left(1+\lambda^6 x^4\right)} = \lim_{x\to 0} \frac{\lambda^3 x^2}{1+\lambda^6 x^4} = \frac{\lambda^3 0^2}{1+\lambda^6 0^4} = 0$$

c) (0.5 puntos) Calcula el límite de la función en el punto $(0,0)$ al usar coordenadas polares.

Solución: En coordenadas polares $x = r\cos\theta$ e $y = r\operatorname{sen}\theta$

$$f(r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta) = \frac{(r\cos\theta)(r\operatorname{sen}\theta)^3}{(r\cos\theta)^2+(r\operatorname{sen}\theta)^6} = \frac{r^4\cos\theta\operatorname{sen}^3\theta}{r^2\cos^2\theta + r^6\operatorname{sen}^6\theta} = \frac{r^4\cos\theta\operatorname{sen}^3\theta}{r^2\left(\cos^2\theta + r^4\operatorname{sen}^6\theta\right)} = \frac{r^2\cos\theta\operatorname{sen}^3\theta}{\left(\cos^2\theta + r^4\operatorname{sen}^6\theta\right)}$$

y ahora tomamos límites cuando $r\to 0$

$$\lim_{r\to 0} \frac{r^2\cos\theta\operatorname{sen}^3\theta}{\left(\cos^2\theta + r^4\operatorname{sen}^6\theta\right)} = \frac{0^2\cos\theta\operatorname{sen}^3\theta}{\left(\cos^2\theta + 0^4\operatorname{sen}^6\theta\right)} = \frac{0}{\cos^2\theta} = 0$$

d) (0.5 puntos) En vista de los resultados obtenidos en los apartados anteriores, ¿podrías afirmar que la función $f(x,y)$ es continua en el punto $(0,0)$? Razona la respuesta.

Solución: Para que la función fuera continua debería ocurrir que el límite de $f(x,y)$ en $(0,0)$ fuera igual que su valor $f(0,0)=0$, es decir

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^3}{x^2+y^6} = f(0,0) = 0$$

sin embargo, los resultados anteriores son condiciones necesarias, pero no suficientes, no podemos garantizar que el límite exista y por tanto no podemos garantizar que la función sea continua; de hecho, si tomamos las curvas de la forma $x=\lambda y^3$ tendremos

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ x=\lambda y^3}} \frac{\lambda y^3 y^3}{(\lambda y^3)^2+y^6} = \lim_{y\to 0} \frac{\lambda y^6}{\lambda^2 y^6 + y^6} = \lim_{x\to 0} \frac{\lambda}{\lambda^2+1} = \frac{\lambda}{\lambda^2+1}$$

que depende de λ y por lo tanto podemos decir que no existe el límite y podemos garantizar que la función no es continua.

e) (1 punto) Calcula, si existen, las derivadas parciales de $f(x,y)$ en el punto $(0,0)$.

Solución: En el punto $(0,0)$ tenemos que usar la definición de derivadas parciales usando el límite

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(t,0)-f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\frac{t\cdot 0^3}{t^2+0^6}-0}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{0}{t} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(0,t)-f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\frac{0\cdot t^3}{0^2+t^6}-0}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{0}{t} = 0$$

5. Indica de forma razonada, si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones:

a) (0.5 puntos) Sea $g:\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definida por $g(x,y) = \left(x,y,y^2\right)$ y $f:\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x,y,z) = x+z$, entonces la función $(g\circ f\ )$ es una función continua.

Solución: Falsa. El conjunto final de la aplicación f no coincide con el conjunto inicial de la aplicación g, por tanto no se puede hacer la composición y mucho menos ser una función continua.

b) (0.5 puntos) La función $f(x,y) = \frac{2+\operatorname{sen}(xy)}{3-\cos x^2} + x^2\ln\left(y^2+4\right)$ alcanza un máximo y un mínimo en el conjunto $[0,1]\times[0,1]$.

Solución: Verdadera. La función $f(x,y)$ es una función continua, puesto que el denominador de la fracción no se anula nunca, ya que la función cos toma valores entre -1 y 1, y el argumento de la función logarítmo siempre es positivo, luego f es continua en todo $\mathbb{R}^2$ y en particular en el conjunto indicado. El cojunto $[0,1]\times[0,1]$ es el cuadrado de lado unidad que puede ponerse como

$$[0,1]\times[0,1]=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 0\leq x\leq 1; 0\leq y\leq 1\right\}$$

luego es cerrado y acotado, así que podemos aplicar el teorema de Weierstrass para demostrar que f tiene un máximo y un mínimo en el conjunto.

6. Sean las funciones

$$\begin{aligned} f_1(x,y,z) &= x\ln\left(y^2-z\right) \\ f_2(x,y,z) &= e^{z\cos(y+2x)} \\ f_3(x,y,z) &= \frac{z+y}{x^2} \end{aligned}$$

Se pide:

a) (0.5 puntos) Calcula el Jacobiano de la función $F:\mathbb{R}^3\longrightarrow\mathbb{R}^2$, definida mediante la expresión

$$F(x,y,z)=(f_1(x,y,z),f_2(x,y,z))$$

Solución: La función $F(x,y,z)$ es

$$F(x,y,z)=\left(x\ln\left(y^2-z\right),e^{z\cos(y+2x)}\right)$$

por tanto el Jacobiano estará definido como

$$\begin{aligned} JF(x,y,z) &= \frac{\partial F}{\partial(x,y,z)}=\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x}(x,y,z) & \frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y,z) & \frac{\partial f_1}{\partial z}(x,y,z) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y,z) & \frac{\partial f_2}{\partial y}(x,y,z) & \frac{\partial f_2}{\partial z}(x,y,z) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \ln\left(y^2-z\right) & \frac{2yx}{y^2-z} & -\frac{x}{y^2-z} \\ -2z\operatorname{sen}(y+2x)\,e^{z\cos(y+2x)} & -z\operatorname{sen}(y+2x)\,e^{z\cos(y+2x)} & \cos(y+2x)\,e^{z\cos(y+2x)} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

b) (0.5 puntos) Calcula, usando la definición por límites, la derivada direccional de la función $f_3(x,y,z)$ en el punto $\vec{a}=(1,1,0)$, en la dirección $\vec{v}=(1,1,1)$.

Solución: Usando límites

$$\begin{aligned} D_{\vec{v}}f(\vec{a}) &= \lim_{t\to 0}\frac{f_3(a+tv)-f_3(a)}{t} \\ &= \lim_{t\to 0}\frac{f_3((1,1,0)+t(1,1,1))-f(1,1,0)}{t} \\ &= \lim_{t\to 0}\frac{f_3(1+t,1+t,t)-f(1,1,0)}{t} \\ &= \lim_{t\to 0}\frac{\frac{t+(1+t)}{(1+t)^2}-\frac{0+1}{1}}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{\frac{1+2t}{(1+t)^2}-1}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{1+2t-(1+t)^2}{(1+t)^2t} \\ &= \lim_{t\to 0}\frac{1+2t-(1+t)^2}{(1+t)^2t}=\lim_{t\to 0}\frac{1+2t-\left(1+2t+t^2\right)}{(1+t)^2t}=\lim_{t\to 0}\frac{-t^2}{(1+t)^2t} \\ &= \lim_{t\to 0}\frac{-t}{(1+t)^2}=0 \end{aligned}$$

Para comprobarlo y puesto que las derivadas parciales de f_3 son continuas usaremos

$$D_{\vec{v}} f_3\left(\ \vec{a}\right) = \nabla f_3\left(\ \vec{a}\right) \cdot \vec{v}$$

Derivandof_3 obtenemos

$$\nabla f_3\left(x,y,z\right) = \left(-2\frac{z+y}{x^3}, \frac{1}{x^2}, \frac{1}{x^2}\right) \Rightarrow \nabla f\left(1,1,0\right) = \left(-2,1,1\right)$$

y por tanto

$$D_{\vec{v}} f\left(\ \vec{a}\right) \cdot \vec{v} = \left(-2,1,1\right)\left(1,1,1\right) = -2+1+1 = 0$$

igual que con el límite.

c) (0.5 puntos) Calcular el Hessiano de la función $f_1\left(x,y,z\right)$ en el punto $\vec{a} = (1,1,0)$.
El Hessiano es la matriz formada por las segundas derivadas parciales respecto de todas las variables. En el apartado a se han calculado las derivadas primeras

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f_1}{\partial x}\left(x,y,z\right) &= \ln\left(y^2-z\right) \\
\frac{\partial f_1}{\partial y}\left(x,y,z\right) &= \frac{2yx}{y^2-z} \\
\frac{\partial f_1}{\partial z}\left(x,y,z\right) &= -\frac{x}{y^2-z}
\end{aligned}$$

como todas las funciones implicadas son derivables y con derivadas parciales continuas (salvo en los puntos de discontinuidad), podemos aplicar el teorema de Schwartz y usar que las derivadas cruzadas son iguales, al intercambiar el orden de derivación, así

$$\frac{\partial^2 f_1}{\partial x \partial y}\left(x,y,z\right) = \frac{\partial^2 f_1}{\partial y \partial x}\left(x,y,z\right) = \frac{2y}{y^2-z} \Rightarrow \frac{\partial^2 f_1}{\partial x \partial y}\left(1,1,0\right) = \frac{\partial^2 f_1}{\partial y \partial x}\left(1,1,0\right) = 2$$

$$\frac{\partial^2 f_1}{\partial x \partial z}\left(x,y,z\right) = \frac{\partial^2 f_1}{\partial z \partial x}\left(x,y,z\right) = \frac{-1}{\left(y^2-z\right)} \Rightarrow \frac{\partial^2 f_1}{\partial x \partial z}\left(1,1,0\right) = \frac{\partial^2 f_1}{\partial z \partial x}\left(1,1,0\right) = -1$$

$$\frac{\partial^2 f_1}{\partial y \partial z}\left(x,y,z\right) = \frac{\partial^2 f_1}{\partial z \partial y}\left(x,y,z\right) = \frac{2xy}{\left(y^2-z\right)^2} \Rightarrow \frac{\partial^2 f_1}{\partial y \partial z}\left(1,1,0\right) = \frac{\partial^2 f_1}{\partial z \partial y}\left(1,1,0\right) = 2$$

mientras que las derivadas dobles serán

$$\frac{\partial^2 f_1}{\partial x^2}\left(x,y,z\right) = 0 \Rightarrow \frac{\partial^2 f_1}{\partial x^2}\left(1,1,0\right) = 0$$

$$\frac{\partial^2 f_1}{\partial y^2}\left(x,y,z\right) = \frac{2x\left(y^2-z\right) - 2y\left(2yx\right)}{\left(y^2-z\right)^2} = \frac{-2xy^2-2xz}{\left(y^2-z\right)^2} = -\frac{2x\left(y^2+z\right)}{\left(y^2-z\right)^2} \Rightarrow \frac{\partial^2 f_1}{\partial y^2}\left(1,1,0\right) = -2$$

$$\frac{\partial^2 f_1}{\partial z^2}\left(x,y,z\right) = -\frac{x}{\left(y^2-z\right)^2} \Rightarrow \frac{\partial^2 f_1}{\partial y^2}\left(1,1,0\right) = -1$$

y la matriz Hessiana es

$$Hf_1\left(1,1,0\right) = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 2 & -2 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

d) (0.5 puntos) Calcular la diferencial de la función $f_2\left(x,y,z\right)$ en el punto $\vec{a} = (1,1,0)$.
Solución: La diferencial viene dada por la expresión

$$df\left(a\right) = \frac{\partial f_2}{\partial x}\left(a\right)dx + \frac{\partial f_2}{\partial y}\left(a\right)dy + \frac{\partial f_2}{\partial z}dz$$

Usando que

$$\nabla f_2\left(x,y,z\right) = \left(\ -2z\operatorname{sen}\left(y+2x\right)e^{z\cos(y+2x)},\quad -z\operatorname{sen}\left(y+2x\right)e^{z\cos(y+2x)},\quad \cos\left(y+2x\right)e^{z\cos(y+2x)}\ \right)$$

y evaluando en a

$$\nabla f_2\,(1,1,0) = \begin{pmatrix} 0, & 0, & \cos 3 \end{pmatrix}$$

luego

$$df\,(1,1,0) = 0dx + 0dy + \cos 3\, dz = \cos 3\, dz$$