

1. Calcula las siguientes integrales indefinidas inmediatas

$$(a) \int (2x - 1)^3 dx \quad (b) \int (4x + 3) e^{-(2x^2+3x+1)} dx \quad (c) \int \frac{\log x}{x} dx$$

$$(d) \int \frac{x}{2x^2+3} dx \quad (e) \int (x + x^2)^{-1/2} (1 + 2x) dx \quad (f) \int \operatorname{sen}(ax) \cos(ax) dx$$

Solución: En cada caso se modifica la función del integrando de forma conveniente para obtener una integral inmediata:

a) Tipo $f(x)^n f'(x)$:

$$\int (2x - 1)^3 dx = \frac{1}{2} \int 2(2x - 1)^3 dx = \frac{(2x - 1)^4}{8} + C.$$

b) Tipo $f'(x) e^{f(x)}$:

$$\int (4x + 3) e^{-(2x^2+3x+1)} dx = - \int -(4x + 3) e^{-(2x^2+3x+1)} dx = -e^{-(2x^2+3x+1)} + C.$$

c) Tipo $f(x)^n f'(x)$ con $f(x) = \log x$ y $n = 1$

$$\int \frac{\log x}{x} dx = \frac{(\log x)^2}{2} + C.$$

d) La derivada del denominador es $4x$, luego multiplicamos y dividimos por 4 en el integrando

$$\int \frac{x}{2x^2+3} dx = \frac{1}{4} \int \frac{4x}{2x^2+3} dx = \frac{1}{4} \ln |2x^2+3| + C.$$

e) Inmediata del tipo $f(x)^\alpha f'(x)$ con $\alpha = -\frac{1}{2}$, $f(x) = (x + x^2)$

$$\int (x + x^2)^{-1/2} (1 + 2x) dx = 2(x + x^2)^{\frac{1}{2}} + C.$$

f) Inmediata usando la fórmula del ángulo doble: $\operatorname{sen}(2ax) = 2 \operatorname{sen}(ax) \cos(ax)$

$$\int \operatorname{sen}(ax) \cos(ax) dx = \frac{1}{2} \int 2 \operatorname{sen}(ax) \cos(ax) dx = \frac{1}{2} \int \operatorname{sen}(2ax) dx = -\frac{\cos(2ax)}{4a} + C,$$

o inmediata del tipo $f(x)^n f'(x)$

$$\int \operatorname{sen}(ax) \cos(ax) dx = \frac{1}{a} \int a \operatorname{sen}(ax) \cos(ax) dx = \frac{\operatorname{sen}^2(ax)}{2a} + C.$$

Notar que aunque la expresión de la primitiva no es la misma, si usamos la fórmula del ángulo doble para $\operatorname{sen}^2 \alpha = (1 - \cos 2\alpha) / 2$

$$\left[\frac{\operatorname{sen}^2(ax)}{2a} + C \right] = \frac{1}{2a} \left(\frac{1 - \cos(2ax)}{2} \right) + C = -\frac{\cos(2ax)}{4a} + \left(C + \frac{1}{4a} \right),$$

que coincide con la anterior salvo una constante.

2. Calcula las siguientes integrales por el método de cambio de variable, usando el cambio adecuado en cada caso:

$$\begin{aligned} \text{(a)} \int \frac{e^x - 1}{e^x + 2} dx & \quad \text{(b)} \int \frac{5^x + 2}{5^x - 1} dx & \quad \text{(c)} \int \frac{1 + \arcsen^2 x}{(1 + \arcsen x) \sqrt{1 - x^2}} dx \\ \text{(d)} \int \frac{1}{e^{2x} - e^x} dx & \quad \text{(e)} \int \frac{\tan^3 x}{1 + \tan^2 x} dx & \quad \text{(f)} \int \frac{\arctan x + 3}{(2 - \arctan x)(1 + x^2)} dx \end{aligned}$$

Solución:

a) Cambio:

$$e^x = u \Rightarrow e^x dx = du \Rightarrow dx = \frac{1}{e^x} du = \frac{1}{u} du$$

Transformación usando el cambio:

$$\int \frac{e^x - 1}{e^x + 2} dx = \int \frac{u - 1}{u + 2} \frac{1}{u} du = \int \frac{u - 1}{u(u + 2)} du$$

Realizamos la descomposición en fracciones simples

$$\int \frac{u - 1}{u(u + 2)} du = \int \frac{A}{u} + \frac{B}{u + 2} dx = A \ln |u| + B \ln |u + 2| + C.$$

Para calcular los valores de A y B

$$\frac{u - 1}{u(u + 2)} = \frac{A}{u} + \frac{B}{u + 2} = \frac{A(u + 2) + Bu}{u(u + 2)}$$

de donde

$$u - 1 = A(u + 2) + Bu$$

Dando a u los valores 0 y -2 , obtenemos fácilmente que

$$u = 0 \Rightarrow -1 = 2A \Leftrightarrow A = -\frac{1}{2}$$

$$u = -2 \Rightarrow -3 = -2B \Leftrightarrow B = \frac{3}{2}$$

luego

$$\int \frac{u - 1}{u(u + 2)} dx = -\frac{1}{2} \ln |u| + \frac{3}{2} \ln |u + 2| + C$$

y deshaciendo el cambio

$$\begin{aligned} \int \frac{e^x - 1}{e^x + 2} dx &= -\frac{1}{2} \ln |e^x| + \frac{3}{2} \ln |e^x + 2| + C \\ &= -\frac{x}{2} + \frac{3}{2} \ln |e^x + 2| + C \end{aligned}$$

b) Cambio

$$5^x = u \Rightarrow 5^x \ln 5 dx = du \Rightarrow dx = \frac{1}{5^x \ln 5} du = \frac{1}{u \ln 5} du$$

$$\int \frac{5^x + 2}{5^x - 1} dx = \int \frac{u + 2}{u - 1} \frac{1}{u \ln 5} du = \frac{1}{\ln 5} \int \frac{u + 2}{u(u - 1)} du$$

Realizamos la descomposición en fracciones simples

$$\int \frac{u + 2}{u(u - 1)} du = \int \frac{A}{u} + \frac{B}{u - 1} dx = A \ln |u| + B \ln |u - 1| + C.$$

Calculo de los valores A y B :

$$\frac{u+2}{u(u-1)} = \frac{A}{u} + \frac{B}{u-1} = \frac{A(u-1) + Bu}{u(u-1)}$$

de donde

$$u+2 = A(u-1) + Bu$$

Dando a u los valores 0 y 1, obtenemos fácilmente que

$$u=0 \Rightarrow 2 = -A \Leftrightarrow A = -2$$

$$u=1 \Rightarrow 3 = B \Leftrightarrow B = 3$$

luego

$$\int \frac{u+2}{u(u-1)} dx = -2 \ln |u| + 3 \ln |u-1| + C$$

y deshacemos el cambio

$$\begin{aligned} \int \frac{5^x+2}{5^x-1} dx &= \frac{1}{\ln 5} (-2 \ln |5^x| + 3 \ln |5^x+2|) + C \\ &= -2x + \frac{3}{\ln 5} \ln |5^x+2| + C \end{aligned}$$

c) Cambio

$$\arcsen x = u \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = du$$

$$\int \frac{1 + \arcsen^2 x}{(1 + \arcsen x) \sqrt{1-x^2}} dx = \int \frac{1+u^2}{1+u} du$$

Como el grado del numerador es mayor que el del denominador, primero hacemos la división

$$\frac{1+u^2}{1+u} = (u-1) + \frac{2}{u+1}$$

y ahora integramos directamente

$$\int \frac{1+u^2}{1+u} du = \int (u-1) + \frac{2}{u+1} du = \frac{u^2}{2} - u + 2 \ln(u+1)$$

Deshacemos el cambio:

$$\int \frac{1 + \arcsen^2 x}{(1 + \arcsen x) \sqrt{1-x^2}} dx = \frac{1}{2} \arcsen^2 x - \arcsen x + 2 \ln(\arcsen x + 1) + C$$

d) Cambio

$$e^x = u \Rightarrow e^x dx = du \Rightarrow dx = \frac{1}{e^x} du = \frac{1}{u} du$$

$$\int \frac{1}{e^{2x} - e^x} dx = \int \frac{1}{u^2 - u} \frac{1}{u} du = \int \frac{1}{u^2(u-1)} du$$

Realizamos la descomposición en fracciones simples

$$\int \frac{1}{u^2(u-1)} du = \int \frac{A}{u} + \frac{B}{u^2} + \frac{C}{u-1} dx = A \ln |u| - B \frac{1}{u} + C \ln |u-1| + D.$$

$$\frac{1}{u^2(u-1)} = \frac{A}{u} + \frac{B}{u^2} + \frac{C}{u-1} = \frac{Au(u-1) + B(u-1) + Cu^2}{u^2(u-1)}$$

es decir

$$1 = Au(u-1) + B(u-1) + Cu^2$$

Dando a u los valores 0 y 1

$$u = 0 \Rightarrow 1 = -B$$

$$u = 1 \Rightarrow 1 = C$$

para obtener el valor de A , damos otro valor a u , por ejemplo $u = -1$

$$1 = 2A - 2B + C$$

y como sabemos los valores de B y C

$$1 = 2A + 2 + 1 \Rightarrow A = -1$$

Es decir

$$\int \frac{1}{u^2(u-1)} du = -\ln|u| + \frac{1}{u} + \ln|u-1| + D$$

y deshaciendo el cambio

$$\int \frac{1}{e^{2x} - e^x} dx = -x + e^{-x} + \ln|e^x - 1| + D$$

e)

$$u = \tan(x) \Rightarrow du = (1 + \tan^2(x)) dx \Rightarrow du = (1 + u^2) dx \Rightarrow \frac{1}{1 + u^2} du = dx$$

$$\int \frac{\tan^3 x}{1 + \tan^2 x} dx = \int \frac{u^3}{1 + u^2} \frac{1}{1 + u^2} du = \int \frac{u^3}{(1 + u^2)^2} du$$

Utilizaremos Hermite para resolver esta integral puesto que hay una raíz compleja doble

$$\begin{aligned} \frac{u^3}{(1 + u^2)^2} &= \frac{Au + B}{1 + u^2} + \left(\frac{Cu + D}{1 + u^2} \right)' \\ &= \frac{Au + B}{1 + u^2} + \frac{C(1 + u^2) - 2u(Cu + D)}{(1 + u^2)^2} \\ &= \frac{(Au + B)(1 + u^2) + C(1 + u^2) - 2u(Cu + D)}{(1 + u^2)^2} \\ &= \frac{Au^3 + (B - C)u^2 + (A - 2D)u + (B + C)}{(1 + u^2)^2} \end{aligned}$$

e igualando coeficientes

$$\begin{aligned} A &= 1 \\ B - C &= 0 \\ A - 2D &= 0 \\ B + C &= 0 \end{aligned}$$

con solución

$$A = 1; B = 0; C = 0; D = \frac{1}{2}$$

y por tanto

$$\begin{aligned} \int \frac{u^3}{(1 + u^2)^2} du &= \int \left(\frac{u}{1 + u^2} + \left(\frac{1/2}{1 + u^2} \right)' \right) du \\ &= \frac{1}{2} \ln|1 + u^2| + \frac{1}{2} \frac{1}{1 + u^2} + C \end{aligned}$$

y deshaciendo el cambio

$$\int \frac{\tan^3 x}{1 + \tan^2 x} dx = \frac{1}{2} \ln |1 + \tan^2 x| + \frac{1}{2} \frac{1}{1 + \tan^2 x} + C$$

f) Cambio

$$\begin{aligned} \arctan x = u &\Rightarrow \frac{1}{1+x^2} dx = du \\ \int \frac{\arctan x + 3}{(2 - \arctan x)(1+x^2)} dx &= \int \frac{u+3}{(2-u)} du \end{aligned}$$

Dividimos los polinomios

$$\int \frac{u+3}{2-u} du = \int \left(-1 - \frac{5}{u-2} \right) du = -u - 5 \ln |u-2| + c$$

y deshaciendo el cambio

$$\int \frac{\arctan x + 3}{(2 - \arctan x)(1+x^2)} dx = -\arctan x - 5 \ln |\arctan x - 2| + c$$

3. Calcula las siguientes integrales por el método de integración por partes

(a) $\int x \cos(3x) dx$ (b) $\int x^2 \operatorname{sen}(5x) dx$ (c) $\int \operatorname{sen}(2x)e^{-x} dx$

(d) $\int \log x dx$ (e) $\int x^2 e^{-x} dx$

a) Por partes, tomando $u = x$ y $dv = \cos(3x) dx \Rightarrow du = dx$ y $v = \frac{\operatorname{sen}(3x)}{3}$

$$\int x \cos(3x) dx = \frac{1}{3} x \operatorname{sen}(3x) - \frac{1}{3} \int \operatorname{sen}(3x) dx = \frac{1}{3} x \operatorname{sen}(3x) + \frac{1}{9} \cos(3x) + C.$$

b) Por partes, tomando $u = x^2$ y $dv = \operatorname{sen}(5x) dx \Rightarrow du = 2x dx$ y $v = -\frac{\cos(5x)}{5}$

$$\int x^2 \operatorname{sen}(5x) dx = -\frac{1}{5} x^2 \cos(5x) + \frac{2}{5} \int x \cos(5x) dx.$$

Se vuelve a hacer integración por partes, tomando $u = x$ y $dv = \cos(5x) dx \Rightarrow du = dx$ y $v = \frac{\operatorname{sen}(5x)}{5}$

$$\int x \cos(5x) dx = \frac{1}{5} x \operatorname{sen}(5x) - \frac{1}{5} \int \operatorname{sen}(5x) dx = \frac{1}{5} x \operatorname{sen}(5x) + \frac{1}{25} \cos(5x),$$

de este modo

$$\begin{aligned} \int x^2 \operatorname{sen}(5x) dx &= -\frac{1}{5} x^2 \cos(5x) + \frac{2}{5} \left(\frac{1}{5} x \operatorname{sen}(5x) + \frac{1}{25} \cos(5x) \right) + C \\ &= -\frac{1}{5} x^2 \cos(5x) + \frac{2}{25} x \operatorname{sen}(5x) + \frac{2}{125} \cos(5x) + C. \\ &= \frac{(2 - 25x^2) \cos(5x) + 10x \operatorname{sen}(5x)}{125} + C \end{aligned}$$

c) Por partes, tomando $u = e^{-x}$ y $dv = \operatorname{sen}(2x) dx$ y por tanto $du = -e^{-x} dx$ y $v = -\frac{\cos(2x)}{2}$

$$\int \operatorname{sen}(2x)e^{-x} dx = -\frac{e^{-x} \cos(2x)}{2} - \frac{1}{2} \int e^{-x} \cos(2x) dx,$$

y volvemos a hacer integración por partes con la integral que nos queda, tomando en este caso $dv = \cos(2x) dx$ y $v = \frac{1}{2} \text{sen}(2x)$

$$\int e^{-x} \cos(2x) dx = \frac{e^{-x}}{2} \text{sen}(2x) + \frac{1}{2} \int e^{-x} \text{sen}(2x) dx,$$

de esta forma tendremos que si $I = \int \text{sen}(2x)e^{-x} dx$, entonces

$$I = -\frac{e^{-x} \cos(2x)}{2} - \frac{1}{2} \left(\frac{e^{-x}}{2} \text{sen}(2x) + \frac{1}{2} I \right),$$

de donde

$$\frac{5}{4} I = -\frac{e^{-x} \cos(2x)}{2} - \frac{e^{-x} \text{sen}(2x)}{4},$$

y podemos despejar la I

$$I = \frac{4}{5} \left(-\frac{e^{-x} \cos(2x)}{2} - \frac{e^{-x} \text{sen}(2x)}{4} \right) + C = \frac{1}{5} (-2e^{-x} \cos(2x) - e^{-x} \text{sen}(2x)) + C.$$

o

$$\int \text{sen}(2x)e^{-x} dx = -\frac{e^{-x}}{5} (2 \cos(2x) + \text{sen}(2x)) + C.$$

d) Por partes con $u = \log x$ y $dv = dx$, por tanto $du = \frac{1}{x}$ y $v = x$

$$\int \log x dx = x \log x - \int x \frac{1}{x} dx = x \log x - \int dx = x \log x - x + C$$

e) Por partes con $u = x^2$ y $dv = e^{-x}$, de donde $du = 2x dx$ y $v = -e^{-x}$

$$\int x^2 e^{-x} dx = -x^2 e^{-x} + 2 \int x e^{-x} dx$$

y aplicamos de nuevo partes a la integral resultante, tomando en este caso $u = x$, de donde $du = dx$, la v sería la misma

$$\int x e^{-x} dx = -x e^{-x} + \int e^{-x} dx = -x e^{-x} - e^{-x}$$

y la integral final sería

$$\int x^2 e^{-x} dx = -x^2 e^{-x} + 2(-x e^{-x} - e^{-x}) = -(x^2 + 2x + 2) e^{-x} + C$$

4. Calcula las siguientes integrales trigonométricas donde $a, b \in \mathbb{R}$:

(a) $\int \frac{1}{\text{sen}^2 x \cdot \cos x} dx$

(b) $\int \text{sen}(ax) \cos(bx) dx$

(c) $\int \text{sen}(ax) \text{sen}(bx) dx$

(d) $\int \cos(ax) \cos(bx) dx$

(e) $\int \cos^2(ax) dx$

(f) $\int \text{sen}^2(ax) dx$

(g) $\int \cos^5(x) dx$

(h) $\int \text{sen}^4(x) dx$

(i) $\int \frac{1}{5 - 3 \cos x + 4 \text{sen} x} dx$

(j) $\int \frac{1 - \text{sen} x}{1 + \text{sen} x} dx$

(k) $\int \frac{1}{10 + 6 \text{sen} x + 8 \cos x} dx$

(l) $\int \tan^3 x dx$

(m) $\int \frac{\tan x}{1 + \text{sen} x} dx$

(n) $\int \text{sen}^4 x \cos^2 x dx$

(o) $\int \text{sen}^2 x \cos^2 x dx$

a)

$$\int \frac{1}{\operatorname{sen}^2 x \cos x} dx$$

La función es impar en $\cos(x)$

$$R(\operatorname{sen} x, -\cos x) = \frac{1}{\operatorname{sen}^2 x (-\cos x)} = -\frac{1}{\operatorname{sen}^2 x \cos x} = -R(\operatorname{sen} x, \cos x)$$

por tanto hacemos el cambio

$$\operatorname{sen} x = t \Rightarrow \begin{cases} \cos x = \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 x} = \sqrt{1 - t^2} \\ \cos x dx = dt \Rightarrow dx = \frac{1}{\cos x} dx = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt \end{cases}$$

$$\int \frac{1}{\operatorname{sen}^2 x \cos x} dx = \int \frac{1}{t^2 \sqrt{1-t^2}} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt = \int \frac{1}{t^2 (1-t^2)} dt$$

Que es una integral racional que descomponemos en fracciones simples

$$\frac{1}{t^2 (1-t^2)} = \frac{A}{t} + \frac{B}{t^2} + \frac{C}{1-t} + \frac{D}{1+t} = \frac{At(1-t^2) + B(1-t^2) + Ct^2(1+t) + Dt^2(1-t)}{t^2(1-t^2)}$$
$$1 = At(1-t^2) + B(1-t^2) + Ct^2(1+t) + Dt^2(1-t)$$

Damos valores 0, 1 y -1 a t

$$t = 0 \Rightarrow 1 = B$$

$$t = 1 \Rightarrow 1 = 2C \Rightarrow C = \frac{1}{2}$$

$$t = -1 \Rightarrow 1 = 2D \Rightarrow D = \frac{1}{2}$$

Para obtener A le damos un valor cualquiera a t , por ejemplo 2 y sabiendo los valores B , C y D obtenemos

$$t = 2 \Rightarrow 1 = -6A - 3B + 12C - 4D$$

$$\Rightarrow 1 = -6A - 3 + 12 \cdot \frac{1}{2} - 4 \cdot \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow 1 = -6A + 1$$

$$\Rightarrow A = 0$$

por tanto

$$\frac{1}{t^2(1-t^2)} = \frac{1}{t^2} + \frac{1}{2} \frac{1}{1-t} + \frac{1}{2} \frac{1}{1+t}$$
$$= \frac{1}{t^2} - \frac{1}{2} \frac{1}{t-1} + \frac{1}{2} \frac{1}{t+1}$$

y la integral

$$\int \frac{1}{t^2(1-t^2)} dt = \int \left(\frac{1}{t^2} - \frac{1}{2} \frac{1}{t-1} + \frac{1}{2} \frac{1}{t+1} \right) dt = -\frac{1}{t} - \frac{1}{2} \ln|t-1| + \frac{1}{2} \ln|t+1| + C$$
$$= -\frac{1}{t} + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{t+1}{t-1} \right| + C$$

y deshaciendo el cambio

$$-\frac{1}{\operatorname{sen} x} + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\operatorname{sen} x + 1}{\operatorname{sen} x - 1} \right|.$$

- b) Para las integrales de los apartados b, c y d, se utilizarán las fórmulas trigonométricas que transforman productos en sumas.

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}(A) \cos(B) &= \frac{1}{2}(\operatorname{sen}(A-B) + \operatorname{sen}(A+B)), \\ \cos(A) \cos(B) &= \frac{1}{2}(\cos(A-B) + \cos(A+B)), \\ \operatorname{sen}(A) \operatorname{sen}(B) &= \frac{1}{2}(\cos(A-B) - \cos(A+B)).\end{aligned}$$

Supongamos que $a \neq b$

$$\int \operatorname{sen}(ax) \operatorname{sen}(bx) dx = \frac{1}{2} \int (\cos(a-b)x - \cos(a+b)x) dx = \frac{1}{2} \left[\frac{\operatorname{sen}(a-b)x}{(a-b)} - \frac{\operatorname{sen}(a+b)x}{(a+b)} \right] + C.$$

Si $a = b$, entonces

$$\int \operatorname{sen}(ax) \operatorname{sen}(ax) dx = \int \operatorname{sen}^2(ax) dx = \int \frac{1 - \cos(2ax)}{2} dx = \frac{1}{2}x - \frac{\operatorname{sen}(2ax)}{4a}$$

- c) Supongamos que $a \neq b$

$$\int \cos(ax) \cos(bx) dx = \frac{1}{2} \int (\cos(a-b)x + \cos(a+b)x) dx = \frac{1}{2} \left[\frac{\operatorname{sen}(a-b)x}{(a-b)} + \frac{\operatorname{sen}(a+b)x}{(a+b)} \right] + C.$$

Si $a = b$ entonces

$$\int \cos(ax) \cos(ax) dx = \int \cos^2(ax) dx = \int \frac{1 + \cos(2ax)}{2} dx = \frac{1}{2}x + \frac{\operatorname{sen}(2ax)}{4a}$$

- d) Supongamos que $a \neq b$

$$\int \operatorname{sen}(ax) \cos(bx) dx = \frac{1}{2} \int (\operatorname{sen}(a-b)x + \operatorname{sen}(a+b)x) dx = \frac{1}{2} \left[-\frac{\cos(a-b)x}{(a-b)} - \frac{\cos(a+b)x}{(a+b)} \right] + C.$$

Si $a = b$ entonces

$$\int \operatorname{sen}(ax) \cos(ax) dx = \frac{1}{2} \int 2 \operatorname{sen}(ax) \cos(ax) dx = \frac{1}{2} \int \operatorname{sen}(2ax) dx = -\frac{1}{4a} \cos(2ax)$$

- e) Usando la fórmula del ángulo doble para $\cos^2 x$

$$\int \cos^2(ax) dx = \int \frac{1 + \cos(2ax)}{2} dx = \int \frac{1}{2} dx + \int \frac{\cos(2ax)}{2} dx = \frac{1}{2}x + \frac{\operatorname{sen}(2ax)}{4a} + C.$$

- f) Usando la fórmula del ángulo doble para $\operatorname{sen}^2 x$

$$\int \operatorname{sen}^2(ax) dx = \int \frac{1 - \cos(2ax)}{2} dx = \int \frac{1}{2} dx - \int \frac{\cos(2ax)}{2} dx = \frac{1}{2}x - \frac{\operatorname{sen}(2ax)}{4a} + C.$$

- g) Potencia impar para la función $\cos x$

$$\begin{aligned}\int \cos^5(x) dx &= \int \cos^4 x \cos x dx = \int (\cos^2 x)^2 \cos x dx = \int (1 - \operatorname{sen}^2 x)^2 \cos x dx \\ &= \int (1 + \operatorname{sen}^4 x - 2 \operatorname{sen}^2 x) \cos x dx \\ &= \int (\cos x + \operatorname{sen}^4 x \cos x - 2 \operatorname{sen}^2 x \cos x) dx \\ &= \operatorname{sen} x + \frac{\operatorname{sen}^5 x}{5} - \frac{2 \operatorname{sen}^3 x}{3} + C\end{aligned}$$

h)

$$\begin{aligned}\int \sin^4(x) dx &= \int \left(\frac{1 - \cos 2x}{2}\right)^2 dx = \int \frac{1 + \cos^2 2x - 2 \cos 2x}{4} dx \\ &= \int \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4} \cos^2 2x - \frac{1}{2} \cos 2x\right) dx \\ &= \int \left(\frac{3}{8} + \frac{\cos 4x}{8} - \frac{\cos 2x}{2}\right) dx \\ &= \frac{3}{8}x + \frac{\sin 4x}{32} - \frac{\sin 2x}{4}\end{aligned}$$

i)

$$\int \frac{1}{5 - 3 \cos x + 4 \sin x} dx$$

Cambio general

$$t = \tan \frac{x}{2} \Rightarrow \begin{cases} \sin x = \frac{2t}{1+t^2} \\ \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \\ dt = \frac{2}{1+t^2} dt \end{cases}$$

por tanto

$$5 - 3 \cos x + 4 \sin x = 5 - 3 \frac{1-t^2}{1+t^2} + 4 \frac{2t}{1+t^2} = 2 \frac{(2t+1)^2}{t^2+1}$$

y por tanto

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{5 - 3 \cos x + 4 \sin x} dx &= \int \frac{1+t^2}{2(2t+1)^2} \frac{2}{1+t^2} dt \\ &= \int \frac{1}{(2t+1)^2} dt = \frac{1}{2} \int 2(2t+1)^{-2} dt = -\frac{1}{2(2t+1)}\end{aligned}$$

y deshacemos el cambio

$$\int \frac{1}{5 - 3 \cos x + 4 \sin x} dx = -\frac{1}{2(2 \tan \frac{x}{2} + 1)}$$

o como $\tan \frac{x}{2} = \frac{\sin \frac{x}{2}}{\cos \frac{x}{2}}$ tendremos

$$\int \frac{1}{5 - 3 \cos x + 4 \sin x} dx = -\frac{\cos \frac{x}{2}}{4 \cos \frac{x}{2} + 2 \cos \frac{x}{2}}.$$

j)

$$\int \frac{1 - \sin x}{1 + \sin x} dx$$

Cambio de variable de tipo general

$$\int \frac{1 - \frac{2t}{1+t^2}}{1 + \frac{2t}{1+t^2}} \frac{2}{1+t^2} dt = \int \frac{2(t-1)^2}{(t^2+1)(t+1)^2} dx$$

Realizamos la descomposición en fracciones simples, tiene una raíz real doble (-1) y una compleja i :

$$\begin{aligned}\frac{2(t-1)^2}{(t^2+1)(t+1)^2} &= \frac{A}{t+1} + \frac{B}{(t+1)^2} + \frac{Ct+D}{t^2+1} \\ &= \frac{A(t+1)(t^2+1) + B(t^2+1) + (Ct+D)(t+1)^2}{(t+1)^2(t^2+1)} \\ &= \frac{(A+C)t^3 + (A+B+2C+D)t^2 + (A+C+2D)t + (A+B+D)}{(t+1)^2(t^2+1)}\end{aligned}$$

Igualando

$$2(t-1)^2 = (A+C)t^3 + (A+B+2C+D)t^2 + (A+C+2D)t + (A+B+D)$$

es decir

$$2t^2 - 4t + 2 = (A+C)t^3 + (A+B+2C+D)t^2 + (A+C+2D)t + (A+B+D)$$

e identificando coeficiente

$$\begin{aligned} A+C &= 0 \\ A+B+2C+D &= 2 \\ A+C+2D &= -4 \\ A+B+D &= 2 \end{aligned}$$

que tiene por solución

$$A = C = 0; B = 4; D = -2$$

de modo que

$$\int \frac{2(t-1)^2}{(t^2+1)(t+1)^2} dt = \int \left(\frac{4}{(t+1)^2} - \frac{2}{t^2+1} \right) dt = -\frac{4}{t+1} - 2 \arctan t$$

y deshaciendo el cambio $\arctan t = \frac{x}{2}$

$$\int \frac{1 - \operatorname{sen} x}{1 + \operatorname{sen} x} dx = -\frac{4}{\tan \frac{x}{2} + 1} - x$$

k)

$$\int \frac{1}{10 + 6 \operatorname{sen} x + 8 \cos x} dx$$

Cambio general

$$t = \tan \frac{x}{2} \Rightarrow \begin{cases} \operatorname{sen} x = \frac{2t}{1+t^2} \\ \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \\ dt = \frac{2}{1+t^2} dt \end{cases}$$

por tanto

$$10 + 6 \operatorname{sen} x + 8 \cos x = 10 + 6 \frac{2t}{1+t^2} + 8 \frac{1-t^2}{1+t^2} = 2 \frac{(t+3)^2}{t^2+1}$$

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{10 + 6 \operatorname{sen} x + 8 \cos x} dx &= 2 \int \frac{(t+3)^2}{t^2+1} dt = 2 \int \left(1 + \frac{6t+8}{t^2+1} \right) dt \\ &= 2 \int \left(1 + 3 \frac{2t}{t^2+1} + 8 \frac{1}{t^2+1} \right) dt \\ &= 2t + 6 \ln |t^2+1| + 16 \arctan t \end{aligned}$$

y deshacemos el cambio

$$\int \frac{1}{10 + 6 \operatorname{sen} x + 8 \cos x} dx = 2 \tan \left(\frac{x}{2} \right) + 6 \ln \left(1 + \tan^2 \left(\frac{x}{2} \right) \right) + 8x$$

l)

$$\int \tan^3 x dx$$

Cambio

$$t = \tan x \Rightarrow dt = (1 + \tan^2 x) dx \Rightarrow dx = \frac{1}{1 + \tan^2 x} dt = \frac{1}{1 + t^2} dt$$

de forma que

$$\int \tan^3 x dx = \int \frac{t^3}{1 + t^2} dt = \int \left(t - \frac{t}{1 + t^2} \right) dt = \frac{t^2}{2} - \frac{1}{2} \ln(1 + t^2)$$

y deshacemos el cambio

$$\int \tan^3 x dx = \frac{1}{2} \tan^2 x - \frac{1}{2} \ln(1 + \tan^2 x)$$

m)

$$\int \frac{\tan x}{1 + \sen x} dx = \int \frac{\sen x}{\cos x (1 + \sen x)} dx$$

La función es simétrica en $\cos x$

$$R(-\cos x, \sen x) = \frac{\sen x}{-\cos x (1 + \sen x)} = -R(\cos x, \sen x)$$

Hacemos el cambio

$$t = \sen x \Rightarrow \begin{cases} \sen x = t \\ \cos x = \sqrt{1 - t^2} \\ dx = \frac{1}{\sqrt{1 - t^2}} dt \end{cases}$$

$$\int \frac{\sen x}{\cos x (1 + \sen x)} dx = \int \frac{t}{\sqrt{1 - t^2} (1 + t)} \frac{1}{\sqrt{1 - t^2}} dt = \int \frac{t}{(1 + t)(1 - t^2)} dt = \int \frac{t}{(1 + t)^2 (1 - t)} dt$$

Que resolveremos descomponiendo en fracciones simples

$$\begin{aligned} \int \frac{t}{(t + 1)^2 (1 - t)} dt &= \int \left(\frac{1}{4} \frac{1}{1 + t} - \frac{1}{2} \frac{1}{(1 + t)^2} - \frac{1}{4} \frac{1}{t - 1} \right) dt \\ &= \frac{1}{4} \ln(t + 1) + \frac{1}{2} \frac{1}{1 + t} - \frac{1}{4} \ln(t - 1) \end{aligned}$$

y deshaciendo el cambio

$$\int \frac{\sen x}{\cos x (1 + \sen x)} dx = \frac{1}{4} \ln(1 + \sen x) + \frac{1}{2} \frac{1}{1 + \sen x} - \frac{1}{4} \ln(\sen x - 1)$$

n)

$$\int \sen^4 x \cos^2 x dx$$

Vamos a cambiar el integrando haciendo el siguiente cambio:

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}; \sen^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$$

$$\begin{aligned} \sen^4 x \cos^2 x &= \left(\frac{1 - \cos 2x}{2} \right)^2 \left(\frac{1 + \cos 2x}{2} \right) \\ &= \frac{1}{8} (1 - \cos 2x - \cos^2 2x + \cos^3 2x) \end{aligned}$$

y volvemos a usar la fórmula del ángulo doble con $\cos^2 2x$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{8} (1 - \cos 2x - \cos^2 2x + \cos^3 2x) \\ &= \frac{1}{8} \left(1 - \cos 2x - \frac{1 + \cos 4x}{2} + \cos^3 2x \right) \\ &= \frac{1}{16} - \frac{1}{8} \cos 2x - \frac{1}{16} \cos 4x + \frac{1}{8} \cos^3 2x \end{aligned}$$

La potencia impar la descomponemos como sigue

$$\cos^3 2x = \cos^2 2x \cos 2x = (1 - \sin^2 2x) \cos 2x$$

y el integrando se transforma en

$$\begin{aligned} \sin^4 x \cos^2 x &= \frac{1}{16} - \frac{1}{8} \cos 2x - \frac{1}{16} \cos 4x + \frac{1}{8} (1 - \sin^2 2x) \cos 2x \\ &= \frac{1}{16} - \frac{1}{8} \cos 2x - \frac{1}{16} \cos 4x + \frac{1}{8} \cos 2x - \frac{1}{8} \sin^2 2x \cos 2x \\ &= \frac{1}{16} - \frac{1}{16} \cos 4x - \frac{1}{8} \sin^2 2x \cos 2x \end{aligned}$$

y podemos integrar término a término

$$\begin{aligned} \int \sin^4 x \cos^2 x dx &= \frac{1}{16} \int dx - \frac{1}{16} \int \cos 4x dx - \frac{1}{8} \int \sin^2 2x \cos 2x dx \\ &= \frac{1}{16} x - \frac{1}{64} \sin 4x - \frac{1}{48} \sin^3 2x \end{aligned}$$

\tilde{n})

$$\int \sin^2 x \cos^2 x dx$$

Vamos a cambiar el integrando haciendo el siguiente cambio:

$$\begin{aligned} \cos^2 x &= \frac{1 + \cos 2x}{2}; \sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2} \\ \sin^2 x \cos^2 x &= \left(\frac{1 - \cos 2x}{2} \right) \left(\frac{1 + \cos 2x}{2} \right) \\ &= \frac{1}{4} (1 - \cos^2 2x) \end{aligned}$$

y volvemos a usar la fórmula del ángulo doble con $\cos^2 2x$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4} (1 - \cos^2 2x) \\ &= \frac{1}{4} \left(1 - \frac{1 + \cos 4x}{2} \right) \\ &= \frac{1}{8} - \frac{1}{8} \cos 4x \end{aligned}$$

y podemos integrar término a término

$$\begin{aligned} \int \sin^2 x \cos^2 x dx &= \frac{1}{8} \int dx - \frac{1}{8} \int \cos 4x dx \\ &= \frac{1}{8} x - \frac{1}{32} \sin 4x \end{aligned}$$

5. Calcula las siguientes integrales de funciones racionales:

$$(a) \int \frac{1}{(x-2)(3-x)} dx$$

$$(b) \int \frac{5x+1}{x^3-3x+2} dx$$

$$(c) \int \frac{1}{x^2+2x+5} dx$$

$$(d) \int \frac{1}{4x^2+4x+3} dx$$

$$(e) \int \frac{x+1}{x^2+x-2} dx$$

$$(f) \int \frac{1}{x^2+10x+16} dx$$

$$(g) \int \frac{x+2}{(x-1)(x+3)} dx$$

$$(h) \int \frac{3x^2+2x+7}{x^2+1} dx$$

$$(i) \int \frac{2x^3+9x^2+4}{x^2(x^2+4)(x-1)} dx$$

$$(j) \int \frac{x}{x^2+4x+5} dx$$

$$(k) \int \frac{x^5-3x^4-2x^3-7x^2+x-4}{x^3+3x^2-x-3} dx$$

$$(l) \int \frac{1}{4x^2-4x+4} dx$$

$$(m) \int \frac{1}{x^2+2x+4} dx$$

$$(n) \int \frac{x-3}{x^2+2x+2} dx$$

$$(o) \int \frac{x+1}{x^2-3x+5} dx$$

$$(p) \int \frac{33x^2-3x-6}{(9x^2-1)(2x+1)} dx$$

$$(q) \int \frac{1}{x^2+4x+2} dx$$

$$(r) \int \frac{1}{(x^2+1)^3} dx$$

$$(s) \int \frac{3x^3+2x^2+x-7}{x^4+x^3-3x^2-5x-2} dx$$

$$(t) \int \frac{4}{(x-1)^2(x^2+1)^2} dx$$

$$(u) \int \frac{1}{((2x+1)^2+1)^2} dx$$

$$(v) \int \frac{9}{(x^2+x+1)^2(x-1)^2} dx$$

$$(w) \int \frac{x^4+x^3-12x^2-25x-5}{x^3-7x-6} dx$$

$$(x) \int \frac{1}{(x-1)(x^2+x+1)^2} dx$$

a) Realizamos la descomposición en fracciones simples del integrando

$$\int \frac{1}{(x-2)(3-x)} dx = \int \frac{A}{x-2} + \frac{B}{3-x} dx = \int \frac{A}{x-2} - \frac{B}{x-3} dx = A \ln|x-2| - B \ln|x-3| + C.$$

Para calcular los valores de A y B

$$\frac{1}{(x-2)(3-x)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{3-x} = \frac{A(3-x) + B(x-2)}{(x-2)(3-x)}$$

de donde

$$1 = A(3-x) + B(x-2)$$

Dando a x los valores 2 y 3, obtenemos fácilmente que

$$B = 1 \text{ y } A = 1$$

luego

$$\int \frac{1}{(x-2)(3-x)} dx = \ln|x-2| - \ln|x-3| + C = \ln \left| \frac{x-2}{x-3} \right| + C$$

b) Factorizamos el denominador usando Ruffini y utilizamos fracciones simples

$$\frac{5x+1}{x^3-3x+2} = \frac{5x+1}{(x-1)^2(x+2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{x+2},$$

luego

$$\int \frac{5x+1}{x^3-3x+2} dx = \int \left(\frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{x+2} \right) dx = A \ln|x-1| - B \frac{1}{x-1} + C \ln|x+2| + D.$$

Para calcular los valores de A , B y C

$$\frac{5x+1}{(x-1)^2(x+2)} = \frac{A}{(x-1)} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{(x+2)} = \frac{A(x-1)(x+2) + B(x+2) + C(x-1)^2}{(x-1)^2(x+2)}$$

de donde

$$5x+1 = A(x-1)(x+2) + B(x+2) + C(x-1)^2$$

Dando a x los valores 1 y -2 , obtenemos fácilmente que

$$\begin{aligned} x &= 1 \Rightarrow 6 = 3B \Rightarrow B = 2 \\ x &= -2 \Rightarrow -9 = 9C \Rightarrow C = -1 \end{aligned}$$

para obtener el parámetro que falta, tomemos por ejemplo $x = 0$

$$1 = -2A + 2B + C \Rightarrow 2A = 2B + C - 1 = 4 - 1 - 1 = 2 \Rightarrow A = 1$$

luego

$$\begin{aligned} \int \frac{5x+1}{x^3-3x+2} dx &= \int \left(\frac{1}{(x-1)} + \frac{2}{(x-1)^2} - \frac{1}{(x+2)} \right) dx = \ln|x-1| - 2\frac{1}{x-1} - \ln|x+2| + D \\ &= \ln \frac{x-1}{x+2} - \frac{2}{x-1} + D. \end{aligned}$$

c) El denominador tiene raíces complejas

$$x^2 + 2x + 5 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{4-20}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{-16}}{2} = \frac{-2 \pm 4i}{2} = -1 \pm 2i,$$

luego se puede expresar como $(x - \operatorname{Re}(x_0))^2 + \operatorname{Im}(x_0)^2$

$$x^2 + 2x + 5 = (x+1)^2 + 4,$$

y la integral se puede expresar como

$$\int \frac{dx}{x^2 + 2x + 5} = \int \frac{1}{4 + (x+1)^2} dx,$$

que es inmediata del tipo $f'(x) \arctan f(x)$

$$\int \frac{1}{4 + (x+1)^2} dx = \frac{1}{4} \int \frac{1}{1 + \frac{(x+1)^2}{4}} dx = \frac{1}{4} \int \frac{1}{1 + \left(\frac{x+1}{2}\right)^2} dx = \frac{1}{2} \int \frac{\frac{1}{2}}{1 + \left(\frac{x+1}{2}\right)^2} dx = \frac{1}{2} \arctan \left(\frac{x+1}{2} \right) + C.$$

d) Calculamos las raíces del denominador

$$4x^2 + 4x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-4 \pm \sqrt{16-48}}{8} = \frac{-4 \pm \sqrt{-32}}{8} = \frac{-4 \pm 4\sqrt{2}i}{8} \Leftrightarrow \begin{cases} r_1 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i \\ r_2 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i \end{cases}$$

son complejas, así que expresamos la ecuación como

$$4x^2 + 4x + 3 = 4 \left(x + \frac{1}{2} \right)^2 + 2$$

y la integral se puede expresar como

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{4x^2 + 4x + 3} dx &= \int \frac{1}{2 + 4 \left(x + \frac{1}{2} \right)^2} dx = \frac{1}{2} \int \frac{1}{1 + 2 \left(x + \frac{1}{2} \right)^2} dx = \frac{1}{2} \int \frac{1}{1 + \left(\sqrt{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2} dx \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \int \frac{\sqrt{2}}{1 + \left(\sqrt{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2} dx = \frac{1}{2\sqrt{2}} \arctan \left(\sqrt{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \end{aligned}$$

e) Calculamos las raíces del denominador

$$x^2 + x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{-1 \pm 3}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} r_1 = 1 \\ r_2 = -2 \end{cases}$$

y el denominador se factoriza como

$$x^2 + x - 2 = (x - 1)(x + 2)$$

Realizamos la descomposición en fracciones simples del integrando

$$\int \frac{x+1}{(x-1)(x+2)} dx = \int \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2} dx = A \ln|x-1| + B \ln|x+2| + C.$$

Para calcular los valores de A y B

$$\frac{x+1}{(x-1)(x+2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2} = \frac{A(x+2) + B(x-1)}{(x-1)(x+2)}$$

de donde

$$x+1 = A(x+2) + B(x-1)$$

Dando a x los valores 1 y -2 , obtenemos fácilmente que

$$A = \frac{2}{3} \text{ y } B = \frac{1}{3}$$

luego

$$\int \frac{x+1}{(x-1)(x+2)} dx = \frac{2}{3} \ln|x-1| + \frac{1}{3} B \ln|x+2| + C.$$

f) El denominador se puede descomponer como

$$x^2 + 10x + 16 = (x+8)(x+2),$$

luego la integral se puede expresar como

$$\int \frac{1}{x^2 + 10x + 16} dx = \int \frac{1}{(x+8)(x+2)} dx,$$

y se resuelve por descomposición en fracciones simples

$$\int \frac{1}{(x+8)(x+2)} dx = \int \frac{A}{x+8} + \frac{B}{x+2} dx = A \ln|x+8| + B \ln|x+2| + C.$$

Para calcular los valores de A y B

$$\frac{1}{(x+8)(x+2)} = \frac{A}{x+8} + \frac{B}{x+2} = \frac{A(x+2) + B(x+8)}{(x+8)(x+2)},$$

de donde

$$1 = A(x+2) + B(x+8).$$

Dando a x los valores -2 y -8 , obtenemos fácilmente que

$$1 = 6B \Rightarrow B = \frac{1}{6},$$

$$1 = -6A \Rightarrow A = -\frac{1}{6},$$

luego

$$\int \frac{1}{(x+8)(x+2)} dx = -\frac{1}{6} \ln|x+8| + \frac{1}{6} \ln|x+2| + C = \frac{1}{6} \ln \left| \frac{x+2}{x+8} \right| + C.$$

g) Realizamos la descomposición en fracciones simples del integrando

$$\int \frac{x+2}{(x-1)(x+3)} dx = \int \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+3} dx = A \ln|x-1| + B \ln|x+3| + C.$$

Para calcular los valores de A y B

$$\frac{x+2}{(x-1)(x+3)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+3} = \frac{A(x+3) + B(x-1)}{(x-1)(x+3)},$$

de donde

$$x+2 = A(x+3) + B(x-1).$$

Dando a x los valores 1 y -3 , obtenemos fácilmente que

$$\begin{aligned} 3 &= 4A \Rightarrow A = \frac{3}{4}, \\ -1 &= -4B \Rightarrow B = \frac{1}{4}, \end{aligned}$$

luego

$$\int \frac{x+2}{(x-1)(x+3)} dx = \frac{3}{4} \ln|x-1| + \frac{1}{4} \ln|x+3| + C = \frac{1}{4} \ln(x-1)^3(x+3) + C.$$

h) Como el grado del numerador y denominador coinciden, en primer lugar hay que hacer una división polinomial y expresar el integrando como

$$\frac{3x^2 + 2x + 7}{x^2 + 1} = 3 + \frac{2x + 4}{x^2 + 1},$$

la integral se transforma en

$$\int \frac{3x^2 + 2x + 7}{x^2 + 1} dx = \int \left(3 + \frac{2x + 4}{x^2 + 1} \right) dx,$$

que puede descomponerse en tres integrales que son inmediatas

$$\int \left(3 + \frac{2x + 4}{x^2 + 1} \right) dx = \int 3dx + \int \frac{2x}{1+x^2} dx + 4 \int \frac{1}{1+x^2} dx = 3x + \ln(1+x^2) + 4 \arctan x + C.$$

i) Descomponemos el integrando en fracciones simples, teniendo en cuenta que una es doble ($x=0$) y dos de ellas son complejas conjugadas ($x = \pm 2i$)

$$\frac{2x^3 + 9x^2 + 4}{x^2(x^2 + 4)(x-1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{Cx + D}{x^2 + 4} + \frac{E}{x-1},$$

sumando las fracciones de la derecha obtenemos

$$\frac{Ax(x^2 + 4)(x-1) + B(x^2 + 4)(x-1) + (Cx + D)x^2(x-1) + Ex^2(x^2 + 4)}{x^2(x^2 + 4)(x-1)},$$

igualando numeradores

$$\begin{aligned} 2x^3 + 9x^2 + 4 &= Ax(x^2 + 1)(x-1) + B(x^2 + 1)(x-1) + (Cx + D)x^2(x-1) + Ex^2(x^2 + 1), \\ &= x^4(A + C + E) + x^3(-A + B - C + D) + x^2(4A - B - D + 4E) + 4x(B - A) - 4B. \end{aligned}$$

E identificando coeficientes

$$\begin{aligned} A + C + E &= 0 \\ -A + B - C + D &= 2 \\ 4A - B - D + 4E &= 9 \\ 4B - 4A &= 0 \\ -4B &= 4 \end{aligned}$$

Sistema cuya solución es

$$A = -1; B = -1; C = -2; D = 0; E = 3,$$

sustituyendo en la integral

$$\begin{aligned} \int \frac{2x^3 + 9x^2 + 4}{x^2(x^2 + 4)(x - 1)} dx &= \int \left(-\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} - \frac{2x}{x^2 + 4} + \frac{3}{x - 1} \right) dx \\ &= -\int \frac{1}{x} dx - \int \frac{1}{x^2} dx - \int \frac{2x}{x^2 + 4} + 3 \int \frac{1}{x - 1} dx \\ &= -\ln|x| + \frac{1}{x} - \ln|x^2 + 4| + 3 \ln|x - 1| + C \\ &= \ln \frac{(x - 1)^3}{x(x^2 + 4)} + \frac{1}{x} + C \end{aligned}$$

j) Las raíces del denominador son complejas

$$x^2 + 4x + 5 = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 20}}{2} = \frac{-4 \pm \sqrt{-4}}{2} = \frac{-4 \pm 2i}{2} = -2 \pm i,$$

y podemos expresar el polinomio como

$$x^2 + 4x + 5 = (x + 2)^2 + 1,$$

mientras que la integral se puede expresar como

$$\int \frac{x}{x^2 + 4x + 5} dx = \int \frac{x}{1 + (x + 2)^2} dx.$$

integral que es casi inmediata realizando los cambios oportunos

$$\int \frac{x}{1 + (x + 2)^2} dx = \frac{1}{2} \int \left(\frac{2(x + 2)}{1 + (x + 2)^2} - \frac{4}{1 + (x + 2)^2} \right) dx = \frac{1}{2} \ln|1 + (x + 2)^2| - 2 \arctan(x + 2) + C$$

k) $\int \frac{x^5 - 3x^4 - 2x^3 - 7x^2 + x - 4}{x^3 + 3x^2 - x - 3} dx$

l)

$$\begin{aligned} 4x^2 - 4x + 4 &= 3 + (2x - 1)^2 \\ \int \frac{1}{4x^2 - 4x + 4} dx &= \int \frac{1}{3 + (2x - 1)^2} dx = \\ &= \frac{1}{3} \int \frac{1}{1 + \left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)^2} dx = \\ &= \frac{1}{2\sqrt{3}} \int \frac{\frac{2}{\sqrt{3}}}{1 + \left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)^2} dx \\ &= \frac{1}{2\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right) + C \end{aligned}$$

m)

$$x^2 + 2x + 4 = 3 + (x + 1)^2$$

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{x^2 + 2x + 4} dx &= \int \frac{1}{3 + (x + 1)^2} dx = \\ &= \frac{1}{3} \int \frac{1}{1 + \left(\frac{x+1}{\sqrt{3}}\right)^2} dx = \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}} \int \frac{\frac{1}{\sqrt{3}}}{1 + \left(\frac{x+1}{\sqrt{3}}\right)^2} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{x + 1}{\sqrt{3}}\right) + C\end{aligned}$$

n)

$$x^2 + 2x + 2 = 1 + (x + 1)^2$$

$$\begin{aligned}\int \frac{x - 3}{x^2 + 2x + 2} dx &= \int \frac{x - 3}{1 + (x + 1)^2} dx = \\ &= \int \frac{x + 1}{1 + (x + 1)^2} dx - \int \frac{4}{1 + (x + 1)^2} dx = \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{2(x + 1)}{1 + (x + 1)^2} dx - \int \frac{4}{1 + (x + 1)^2} dx \\ &= \frac{1}{2} \ln\left(1 + (x + 1)^2\right) - 4 \arctan(x + 1) + C \\ &= \frac{1}{2} \ln(x^2 + 2x + 2) - 4 \arctan(x + 1) + C\end{aligned}$$

ñ)

$$x^2 - 3x + 5 = \frac{11}{4} + \left(x - \frac{3}{2}\right)^2$$

$$\begin{aligned}
\int \frac{x+1}{x^2-3x+5} dx &= \int \frac{x+1}{\frac{11}{4} + (x-\frac{3}{2})^2} dx = \\
&= \int \frac{x-\frac{3}{2} + 1 + \frac{3}{2}}{\frac{11}{4} + (x-\frac{3}{2})^2} dx \\
&= \int \frac{(x-\frac{3}{2})}{\frac{11}{4} + (x-\frac{3}{2})^2} dx + \int \frac{\frac{5}{2}}{\frac{11}{4} + (x-\frac{3}{2})^2} dx \\
&= \frac{1}{2} \int \frac{2(x-\frac{3}{2})}{\frac{11}{4} + (x-\frac{3}{2})^2} dx + \frac{4}{11} \int \frac{\frac{5}{2}}{1 + (\frac{2}{\sqrt{11}}(x-\frac{3}{2}))^2} dx \\
&= \frac{1}{2} \int \frac{2(x-\frac{3}{2})}{\frac{11}{4} + (x-\frac{3}{2})^2} dx + \frac{10}{11} \int \frac{1}{1 + (\sqrt{\frac{4}{11}}(x-\frac{3}{2}))^2} dx \\
&= \frac{1}{2} \int \frac{2(x-\frac{3}{2})}{\frac{11}{4} + (x-\frac{3}{2})^2} dx + \frac{5}{\sqrt{11}} \int \frac{\frac{2}{\sqrt{11}}}{1 + (\frac{2}{\sqrt{11}}(x-\frac{3}{2}))^2} dx \\
&= \frac{1}{2} \ln \left(\frac{11}{4} + (x-\frac{3}{2})^2 \right) + \frac{5}{\sqrt{11}} \arctan \left(\frac{2}{\sqrt{11}} (x-\frac{3}{2}) \right) + C \\
&= \frac{1}{2} \ln (x^2 - 3x + 5) + \frac{5}{\sqrt{11}} \arctan \left(\frac{1}{\sqrt{11}} (2x-3) \right) + C
\end{aligned}$$

$$(9x^2 - 1)(2x + 1) = 9 \left(x^2 - \frac{1}{9} \right) 2 \left(x + \frac{1}{2} \right) = 18 \left(x + \frac{1}{3} \right) \left(x - \frac{1}{3} \right) \left(x + \frac{1}{2} \right)$$

$$\begin{aligned}
\int \frac{33x^2 - 3x - 6}{(9x^2 - 1)(2x + 1)} dx &= \int \frac{33x^2 - 3x - 6}{18 \left(x + \frac{1}{3} \right) \left(x - \frac{1}{3} \right) \left(x + \frac{1}{2} \right)} dx = \\
&= \frac{1}{18} \int \frac{33x^2 - 3x - 6}{\left(x + \frac{1}{3} \right) \left(x - \frac{1}{3} \right) \left(x + \frac{1}{2} \right)} dx \\
&= \frac{1}{18} \left(\int \frac{A}{x + \frac{1}{3}} + \frac{B}{x - \frac{1}{3}} + \frac{C}{x + \frac{1}{2}} dx \right) \\
&= \frac{1}{18} \left(\int \frac{A}{x + \frac{1}{3}} dx + \int \frac{B}{x - \frac{1}{3}} dx + \int \frac{C}{x + \frac{1}{2}} dx \right)
\end{aligned}$$

Realizamos la descomposición en fracciones simples

$$\frac{33x^2 - 3x - 6}{\left(x + \frac{1}{3} \right) \left(x - \frac{1}{3} \right) \left(x + \frac{1}{2} \right)} = \frac{A}{x + \frac{1}{3}} + \frac{B}{x - \frac{1}{3}} + \frac{C}{x + \frac{1}{2}}$$

es decir

$$33x^2 - 3x - 6 = A \left(x - \frac{1}{3} \right) \left(x + \frac{1}{2} \right) + B \left(x + \frac{1}{3} \right) \left(x + \frac{1}{2} \right) + C \left(x + \frac{1}{3} \right) \left(x - \frac{1}{3} \right)$$

Para $x = \frac{1}{3}$

$$33 \left(\frac{1}{3} \right)^2 - 3 \left(\frac{1}{3} \right) - 6 = B \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3} \right) \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2} \right) \Leftrightarrow -\frac{10}{3} = B \frac{5}{9} \Leftrightarrow B = -\frac{90}{15} = -6$$

Para $x = -\frac{1}{3}$

$$33 \left(-\frac{1}{3}\right)^2 - 3 \left(-\frac{1}{3}\right) - 6 = A \left(-\frac{1}{3} - \frac{1}{3}\right) \left(-\frac{1}{3} + \frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow -\frac{4}{3} = -A \frac{1}{9} \Leftrightarrow A = \frac{36}{3} = 12$$

Para $x = -\frac{1}{2}$

$$33 \left(-\frac{1}{2}\right)^2 - 3 \left(-\frac{1}{2}\right) - 6 = C \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) \left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) \Leftrightarrow \frac{15}{4} = C \frac{5}{36} \Leftrightarrow C = \frac{36 \cdot 15}{4 \cdot 5} = 27$$

Luego la integral vale

$$\begin{aligned} \int \frac{33x^2 - 3x - 6}{(9x^2 - 1)(2x + 1)} dx &= \frac{1}{18} \left(\int \frac{12}{x + \frac{1}{3}} dx + \int \frac{-6}{x - \frac{1}{3}} dx + \int \frac{27}{x + \frac{1}{2}} dx \right) \\ &= \frac{2}{3} \ln \left(x + \frac{1}{3}\right) - \frac{1}{3} \ln \left(x - \frac{1}{3}\right) + \frac{3}{2} \ln \left(x + \frac{1}{2}\right) + C \end{aligned}$$

- o) Primero realizamos la división de polinomios, puesto que el numerador tiene un grado mayor que el denominador

$$\frac{x^5 - 3x^4 - 2x^3 - 7x^2 + x - 4}{x^3 + 3x^2 - x - 3} = x^2 - 6x + 17 - \frac{61x^2 - 47}{x^3 + 3x^2 - x - 3}$$

luego

$$\int \frac{x^5 - 3x^4 - 2x^3 - 7x^2 + x - 4}{x^3 + 3x^2 - x - 3} dx = \int (x^2 - 6x + 17) dx - \int \frac{61x^2 - 47}{x^3 + 3x^2 - x - 3} dx$$

La primera integral es inmediata

$$\int (x^2 - 6x + 17) dx = \frac{x^3}{3} - 3x^2 + 17x + C$$

Para la segunda buscamos las raíces del denominador

$$x^3 + 3x^2 - x - 3 = (x - 1)(x + 1)(x + 3)$$

y realizamos la descomposición en fracciones simples

$$\frac{61x^2 - 47}{x^3 + 3x^2 - x - 3} = \frac{A}{x - 1} + \frac{B}{x + 1} + \frac{C}{x + 3}$$

de donde

$$61x^2 - 47 = A(x + 1)(x + 3) + B(x - 1)(x + 3) + C(x - 1)(x + 1)$$

Para $x = 1$

$$61(1)^2 - 47 = A(1 + 1)(1 + 3) \Leftrightarrow 14 = A8 \Leftrightarrow A = \frac{14}{8} = \frac{7}{4}$$

Para $x = -1$

$$61(-1)^2 - 47 = B(-1 - 1)(-1 + 3) \Leftrightarrow 14 = -B4 \Leftrightarrow B = -\frac{14}{4} = -\frac{7}{2}$$

Para $x = -3$

$$61(-3)^2 - 47 = C(-3 - 1)(-3 + 1) \Leftrightarrow 502 = B8 \Leftrightarrow B = \frac{502}{8} = \frac{251}{4}$$

Luego la segunda integral sería

$$\begin{aligned} \int \frac{61x^2 - 47}{x^3 + 3x^2 - x - 3} dx &= \int \left(\frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x+3} \right) dx \\ &= A \ln(x-1) + B \ln(x+1) + C \ln(x+3) \\ &= \frac{7}{4} \ln(x-1) - \frac{7}{2} \ln(x+1) + \frac{251}{4} \ln(x+3) \end{aligned}$$

La integral completa sería

$$\int \frac{x^5 - 3x^4 - 2x^3 - 7x^2 + x - 4}{x^3 + 3x^2 - x - 3} dx = \frac{x^3}{3} - 3x^2 + 17x - \frac{7}{4} \ln(x-1) + \frac{7}{2} \ln(x+1) - \frac{251}{4} \ln(x+3) + C$$

p) Podemos descomponer el denominador

$$x^2 + 4x + 2 = \frac{-4 \pm \sqrt{16-8}}{2} = \frac{-4 \pm \sqrt{8}}{2} = \frac{-4 \pm 2\sqrt{2}}{2} = -2 \pm \sqrt{2},$$

luego se puede expresar como

$$x^2 + 4x + 2 = (x - \alpha)(x - \beta),$$

donde $\alpha = -2 + \sqrt{2}$ o $\beta = -2 - \sqrt{2}$ y la integral se puede expresar como

$$\int \frac{1}{x^2 + 4x + 2} dx = \int \frac{1}{(x - \alpha)(x - \beta)} dx,$$

que podemos expresar como

$$\int \frac{1}{x^2 + 4x + 2} dx = \int \left(\frac{A}{x - \alpha} + \frac{B}{x - \beta} \right) dx = A \ln|x - \alpha| + B \ln|x - \beta| + C.$$

Para calcular los valores de A y B

$$\frac{1}{x^2 + 4x + 2} = \frac{A}{x - \alpha} + \frac{B}{x - \beta} = \frac{A(x - \beta) + B(x - \alpha)}{(x - \alpha)(x - \beta)},$$

de donde

$$1 = A(x - \beta) + B(x - \alpha)$$

Dando a x los valores α y β , obtenemos fácilmente que

$$1 = A(\alpha - \beta) \Rightarrow A = \frac{1}{\alpha - \beta},$$

$$1 = B(\beta - \alpha) \Rightarrow B = \frac{1}{\beta - \alpha},$$

luego

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{x^2 + 4x + 2} dx &= \frac{1}{\alpha - \beta} \ln|x - \alpha| + \frac{1}{\beta - \alpha} \ln|x - \beta| + C \\ &= \frac{1}{\alpha - \beta} \ln|x - \alpha| - \frac{1}{\alpha - \beta} \ln|x - \beta| + C \\ &= \frac{1}{\alpha - \beta} \ln \left| \frac{x - \alpha}{x - \beta} \right| + C \end{aligned}$$

y sustituyendo los valores de α y β

$$\alpha - \beta = (-2 + \sqrt{2}) - (-2 - \sqrt{2}) = 2\sqrt{2}$$

$$\int \frac{1}{x^2 + 4x + 2} dx = \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \left| \frac{x + 2 - \sqrt{2}}{x + 2 + \sqrt{2}} \right| + C$$

q) En las integrales r, s, t, u, v, w, x , sólo se pone el resultado final.

$$\int \frac{1}{(x^2 + 1)^3} dx = \frac{1}{8\sqrt{27}} \arctan \frac{x}{\sqrt{3}} + \frac{x^3 + 5x}{24x^4 + 144x^2 + 216} + C$$

r)

$$\int \frac{3x^3 + 2x^2 + x - 7}{x^4 + x^3 - 3x^2 - 5x - 2} dx = 2 \ln |x + 1| + \frac{2x - 1}{2x^2 + 4x + 2} + \ln |x - 2| + C$$

s)

$$\int \frac{4}{(x-1)^2 (x^2+1)^2} dx = 4 \left(\frac{\ln(x^2+1)}{4} + \frac{\arctan(x)}{4} - \frac{x^2+x}{4x^3-4x^2+4x-4} - \frac{\ln(x-1)}{2} \right) + C$$

t)

$$\int \frac{1}{((2x+1)^2+1)^2} dx = \frac{\arctan\left(\frac{4x+2}{2}\right)}{4} + \frac{2x+1}{16x^2+16x+8} + C$$

u)

$$\int \frac{9}{(x^2+x+1)^2 (x-1)^2} dx = 2 \left(\frac{\ln(x^2+x+1)}{9} + \frac{2 \arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)}{3^{\frac{3}{2}}} - \frac{x}{3x^3-3} - \frac{2 \ln(x-1)}{9} \right) + C$$

v)

$$\int \frac{x^4 + x^3 - 12x^2 - 25x - 5}{x^3 - 7x - 6} dx = \ln(x+2) - 2 \ln(x+1) + \frac{x^2 + 2x}{2} - 4 \ln(x-3) + C$$

w)

$$\int \frac{1}{(x-1)(x^2+x+1)^2} dx = -\frac{\ln(x^2+x+1)}{18} - \frac{\arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)}{\sqrt{3}} - \frac{x}{3x^2+3x+3} + \frac{\ln(x-1)}{9} + C$$

6. Calcula las siguientes integrales de funciones irracionales algebraicas:

(a) $\int \frac{\sqrt{x^3}}{x-1} dx$

(b) $\int \frac{\sqrt[3]{x^2} + 1}{\sqrt[3]{x} - 1} dx$

(c) $\int \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x^3} - 1} dx$

(d) $\int \frac{\sqrt[5]{x}}{\sqrt[5]{x} + 1} dx$

(e) $\int \frac{x + \sqrt{(x+1)^3}}{(x-1)\sqrt{x+1}} dx$

(f) $\int \frac{\sqrt[3]{x-1} - 1}{\sqrt[3]{(x-1)^2} + 1} dx$

(g) $\int x \sqrt{\frac{x+2}{x-2}} dx$

(h) $\int \frac{\sqrt{(x-2)^3} - \sqrt{(x-2)^5}}{\sqrt{(x-2)} + 3} dx$

(i) $\int \frac{1}{x} \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} dx$

Solución:

a) Cambio

$$x = t^2 \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{x} = t \\ \sqrt{x^3} = t^3 \\ dx = 2t dt \end{cases}$$

$$\int \frac{\sqrt{x^3}}{x-1} dx = \int \frac{t^3}{t^2-1} 2t dt = 2 \int \frac{t^4}{t^2-1} dt$$

Función racional que resolvemos por descomposición en fracciones simples, previa división de los polinomios ya que el grado del numerador es mayor que el grado del denominador

$$\int \frac{t^4}{t^2-1} dt = \int \left((t^2+1) + \frac{1}{t^2-1} \right) dt = \frac{t^3}{3} + t + \int \frac{1}{t^2-1} dt$$

la integral

$$\int \frac{1}{t^2-1} dt = \int \frac{A}{t-1} + \frac{B}{t+1} dt = A \ln(t-1) + B \ln(t+1)$$

Cálculo de A y B

$$\frac{1}{t^2-1} = \frac{A}{t-1} + \frac{B}{t+1} = \frac{A(t+1) + B(t-1)}{(t^2-1)} = \frac{(A+B)t + (A-B)}{t^2-1}$$

Por tanto

$$\left. \begin{array}{l} A+B=0 \\ A-B=1 \end{array} \right\} \Rightarrow A = \frac{1}{2} \text{ y } B = -\frac{1}{2}$$

La integral será

$$\int \frac{1}{t^2-1} dt = \frac{1}{2} \ln(t-1) - \frac{1}{2} B \ln(t+1) = \frac{1}{2} \ln \frac{t-1}{t+1}$$

es decir

$$\int \frac{\sqrt{x^3}}{x-1} dx = \ln \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}$$

b) Cambio

$$x = t^3 \Rightarrow \begin{cases} \sqrt[3]{x} = t \\ \sqrt[3]{x^2} = (\sqrt[3]{x})^2 = t^2 \\ dx = 3t^2 dt \end{cases}$$

$$\int \frac{\sqrt[3]{x^2}+1}{\sqrt[3]{x}-1} dx = \int \frac{t^2+1}{t-1} 3t^2 dt = 3 \int \frac{t^4+t^2}{t-1} dt$$

Realizamos la división de los polinomios ya que el grado del numerador es mayor que el grado del denominador

$$\int \frac{t^4+t^2}{t-1} dt = \int t^3 + t^2 + 2t + 2 + \frac{2}{t-1} dt = \frac{t^4}{4} + \frac{t^3}{3} + t^2 + 2t + 2 \ln(t-1)$$

Y deshaciendo el cambio la integral es

$$\int \frac{\sqrt[3]{x^2}+1}{\sqrt[3]{x}-1} dx = \frac{3\sqrt[3]{x^4}}{4} + x + 3\sqrt[3]{x^2} + 6\sqrt[3]{x} + 6 \ln(\sqrt[3]{x}-1).$$

c) Cambio

$$x = t^2 \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{x} = t \\ \sqrt{x^3} = (\sqrt{x})^3 = t^3 \\ dx = 2t dt \end{cases}$$

$$\int \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x^3}-1} dx = \int \frac{t+1}{t^3-1} 2t dt = 2 \int \frac{t^2+t}{t^3-1} dt$$

Realizamos la descomposición en fracciones simples, hay una raíz real y una compleja (junto con su conjugado)

$$(t^3 - 1) = (t - 1)(t^2 + t + 1) = (t - 1) \left(\left(t + \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{3}{4} \right)$$

la descomposición será

$$\frac{t^2 + t}{t^3 - 1} = \frac{A}{t - 1} + \frac{Bt + C}{\left(t + \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{3}{4}} = \frac{A(t^2 + t + 1) + (Bt + C)(t - 1)}{(t - 1)(t^2 + t + 1)}$$

es decir

$$\frac{t^2 + t}{t^3 - 1} = \frac{t^2(A + B) + t(A - B) + (A - C)}{(t - 1)(t^2 + t + 1)}$$

es decir

$$\begin{cases} A + B = 1 \\ A - B + C = 1 \\ A - C = 0 \end{cases} \Rightarrow A = \frac{2}{3}; B = \frac{1}{3}; C = \frac{2}{3}$$

por tanto

$$\int \frac{t^2 + t}{t^3 - 1} dt = \int \frac{2}{3} \frac{1}{t - 1} + \frac{1}{3} \frac{t + 2}{t^2 + t + 1} dt = \frac{2}{3} \int \frac{dt}{t - 1} + \frac{1}{3} \int \frac{t + 2}{\left(t + \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{3}{4}} dt$$

Transformamos la integral que queda

$$\begin{aligned} \frac{t + 2}{\left(t + \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{3}{4}} &= \frac{1}{2} \frac{2t + 4}{\left(t + \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{3}{4}} \\ &= \frac{1}{2} \frac{2t + 1}{\left(t + \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{3}{4}} + \frac{3}{2} \frac{1}{\left(t + \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{3}{4}} \\ &= \frac{1}{2} \frac{2t + 1}{\left(t + \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{3}{4}} + \frac{3}{\sqrt{3}} \frac{\frac{2}{\sqrt{3}}}{1 + \left(\frac{2t+1}{\sqrt{3}} \right)^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int \frac{\sqrt[3]{x^2 + 1}}{\sqrt[3]{x} - 1} dx &= 2 \left(\frac{2}{3} \int \frac{dt}{t - 1} + \frac{1}{3} \int \left(\frac{1}{2} \frac{2t + 1}{\left(t + \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{3}{4}} + \frac{3}{\sqrt{3}} \frac{\frac{2}{\sqrt{3}}}{1 + \left(\frac{2t+1}{\sqrt{3}} \right)^2} \right) dt \right) \\ &= \frac{4}{3} \int \frac{dt}{t - 1} + \frac{1}{3} \int \frac{2t + 1}{\left(t + \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{3}{4}} dt + \frac{2}{\sqrt{3}} \int \frac{\frac{2}{\sqrt{3}}}{1 + \left(\frac{2t+1}{\sqrt{3}} \right)^2} dt \\ &= \frac{4}{3} \ln(t - 1) + \frac{1}{3} \ln \left(\left(t + \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{3}{4} \right) + \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan \left(\frac{2t + 1}{\sqrt{3}} \right). \end{aligned}$$

y deshaciendo el cambio $t = \sqrt{x}$

$$\begin{aligned} \int \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x^3 - 1}} dx &= \frac{4}{3} \ln(\sqrt{x} - 1) + \frac{1}{3} \ln \left(\left(\sqrt{x} + \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{3}{4} \right) + \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan \left(\frac{2\sqrt{x} + 1}{\sqrt{3}} \right) \\ &= \frac{4}{3} \ln(\sqrt{x} - 1) + \frac{1}{3} \ln(x + \sqrt{x} + 1) + \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan \left(\frac{2\sqrt{x} + 1}{\sqrt{3}} \right) \end{aligned}$$

d) Cambio

$$x = t^5 \Rightarrow \begin{cases} \sqrt[5]{x} = t \\ dx = 5t^4 dt \end{cases}$$

$$\int \frac{\sqrt[5]{x}}{\sqrt[5]{x} + 1} dx = \int \frac{t}{t + 1} 5t^4 dt = 5 \int \frac{t^5}{t + 1} dt$$

Hacemos la división polinomial

$$\frac{t^5}{t + 1} = t^4 - t^3 + t^2 - t + 1 - \frac{1}{t + 1}$$

por tanto

$$5 \int \frac{t^5}{t + 1} dt = 5 \int \left(t^4 - t^3 + t^2 - t + 1 - \frac{1}{t + 1} \right) dt = 5 \left(\frac{t^5}{5} - \frac{t^4}{4} + \frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2} + t - \ln(t + 1) \right)$$

y deshaciendo el cambio

$$\int \frac{\sqrt[5]{x}}{\sqrt[5]{x} + 1} dx = \left(x - \frac{5}{4} \sqrt[5]{x^4} + \frac{5}{3} \sqrt[5]{x^3} - \frac{5}{2} \sqrt[5]{x^2} + 5 \sqrt[5]{x} - 5 \ln(\sqrt[5]{x} + 1) \right)$$

e) Cambio

$$x + 1 = t^2 \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{(x + 1)^3} = t^3 \\ \sqrt{(x + 1)} = t \\ dx = 2t dt \\ x = t^2 - 1 \end{cases}$$

$$\int \frac{x + \sqrt{(x + 1)^3}}{(x - 1)\sqrt{x + 1}} = \int \frac{(t^2 - 1) + t^3}{(t^2 - 2)t} 2t dt = 2 \int \frac{(t^2 - 1) + t^3}{t^2 - 2} dt$$

Hacemos la división polinomial

$$\frac{t^3 + t^2 - 1}{t^2 - 2} = t + 1 + \frac{2t + 1}{t^2 - 2}$$

por tanto

$$2 \int \frac{(t^2 - 1) + t^3}{t^2 - 2} dt = 2 \int \left(t + 1 + \frac{2t + 1}{t^2 - 2} \right) dt = t^2 + t + 2 \int \frac{2t + 1}{t^2 - 2} dt$$

La integral que queda se hace por descomposición en fracciones simples

$$\frac{2t + 1}{t^2 - 2} = \frac{A}{t + \sqrt{2}} + \frac{B}{t - \sqrt{2}} = \frac{A(t - \sqrt{2}) + B(t + \sqrt{2})}{t^2 - 2} = \frac{(A + B)t + \sqrt{2}(B - A)}{t^2 - 2}$$

e igualando

$$\left. \begin{array}{l} A + B = 1 \\ (B - A)\sqrt{2} = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} A + B = 1 \\ B - A = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} A = \frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}} \\ B = \frac{\sqrt{2}+1}{2\sqrt{2}} \end{array} \right\}$$

de esta forma

$$\begin{aligned}
 t^2 + t + 2 \int \frac{2t+1}{t^2-2} dt &= t^2 + t + 2 \int \left(\frac{\frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}}}{t+\sqrt{2}} + \frac{\frac{\sqrt{2}+1}{2\sqrt{2}}}{t-\sqrt{2}} \right) dt \\
 &= t^2 + t + \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}} \ln(t+\sqrt{2}) + \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}} \ln(t-\sqrt{2}) \\
 &= t^2 + t + \ln(t+\sqrt{2})(t-\sqrt{2}) + \frac{1}{\sqrt{2}} \ln\left(\frac{t-\sqrt{2}}{t+\sqrt{2}}\right) \\
 &= t^2 + t + \ln(t^2-2) + \frac{1}{\sqrt{2}} \ln\left(\frac{t-\sqrt{2}}{t+\sqrt{2}}\right)
 \end{aligned}$$

y deshaciendo el cambio $t = \sqrt{x+1}$

$$\int \frac{x + \sqrt{(x+1)^3}}{(x-1)\sqrt{x+1}} dx = (x+1) + \sqrt{x+1} + \ln(x-1) + \frac{1}{\sqrt{2}} \ln \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{2}}{\sqrt{x+1} + \sqrt{2}}.$$

f) Cambio

$$x-1 = t^3 \Rightarrow \begin{cases} \sqrt[3]{x-1} = t \\ \sqrt[3]{(x-1)^2} = t^2 \\ dx = 3t^2 dt \\ x = t^3 + 1 \end{cases}$$

$$\int \frac{\sqrt[3]{x-1} - 1}{\sqrt[3]{(x-1)^2} + 1} dx = \int \frac{t-1}{t^2+1} 3t^2 dt = 3 \int \frac{t^3 - t^2}{t^2+1} dt$$

Hacemos la división polinomial

$$\frac{t^3 - t^2}{t^2 + 1} = t - 1 + \frac{1-t}{t^2+1}$$

por tanto

$$3 \int \frac{t^3 - t^2}{t^2 + 1} dt = 3 \int \left(t - 1 + \frac{1-t}{t^2+1} \right) dt = \frac{3t^2}{2} - 3t + 3 \int \frac{1-t}{t^2+1} dt$$

La integral que queda es inmediata con los siguientes cambios

$$\int \frac{1-t}{t^2+1} dt = -\frac{1}{2} \int \frac{2t}{t^2+1} + \int \frac{1}{1+t^2} dt = -\frac{1}{2} \ln(1+t^2) + \arctan t$$

por tanto

$$3 \int \frac{t^3 - t^2}{t^2 + 1} dt = \frac{3t^2}{2} - 3t - \frac{3}{2} \ln(1+t^2) + 3 \arctan t$$

y deshaciendo el cambio

$$\int \frac{\sqrt[3]{x-1} - 1}{\sqrt[3]{(x-1)^2} + 1} dx = \frac{3\sqrt[3]{(x-1)^2}}{2} - 3\sqrt[3]{x-1} - \frac{3}{2} \ln\left(1 + \sqrt[3]{(x-1)^2}\right) + 3 \arctan \sqrt[3]{x-1}$$

g) Cambio

$$\frac{x+2}{x-2} = t^2 \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{\frac{x+2}{x-2}} = t \\ x = \frac{2t^2+2}{t^2-1} \\ dx = -\frac{8t}{(t^2-1)^2} dt \end{cases}$$

$$\int x \sqrt{\frac{x+2}{x-2}} dx = \int \left(\frac{2t^2+2}{t^2-1} \right) t \left(-\frac{8t}{(t^2-1)^2} \right) dt = -16 \int \frac{t^4+t^2}{(t^2-1)^3} dt$$

Descomponemos en fracciones simples

$$\frac{t^4+t^2}{(t^2-1)^3} = \frac{A}{t-1} + \frac{B}{(t-1)^2} + \frac{C}{(t-1)^3} + \frac{D}{t+1} + \frac{E}{(t+1)^2} + \frac{F}{(t+1)^3}$$

el numerador de la fracción de la derecha es

$$A(t-1)^2(t+1)^3 + B(t-1)(t+1)^3 + C(t+1)^3 + D(t+1)^2(t-1)^3 + E(t+1)(t-1)^3 + F(t-1)^3$$

o si lo ordenamos por potencias

$$\begin{aligned} & t^5(A+D) + \\ & t^4(A+B-D+E) + \\ & t^3(2B-2A+C+F-2D-2E) + \\ & t^2(3C-2A-3F+2D) + \\ & t(A-2B+3C+3F+D+2E) + \\ & A-B+C-F-D-E \end{aligned}$$

e igualando a los coeficientes del numerador del miembro de la izquierda

$$\begin{cases} A+D=0 \\ A+B-D+E=1 \\ 2B-2A+C+F-2D-2E=0 \\ 3C-2A-3F+2D=1 \\ A-2B+3C+3F+D+2E=0 \\ A-B+C-F-D-E=0 \end{cases}$$

que tiene por solución

$$A = \frac{1}{8}; B = \frac{3}{8}; C = \frac{1}{4}; D = -\frac{1}{8}; E = \frac{3}{8}; F = -\frac{1}{4}$$

por tanto

$$\begin{aligned} -16 \int \frac{t^4+t^2}{(t^2-1)^3} dt &= -16 \int \left(\frac{A}{t-1} + \frac{B}{(t-1)^2} + \frac{C}{(t-1)^3} + \frac{D}{t+1} + \frac{E}{(t+1)^2} + \frac{F}{(t+1)^3} \right) dt = \\ &= -16 \left(A \ln(t-1) - \frac{B}{(t-1)} - \frac{C}{2(t-1)^2} + D \ln(t+1) - \frac{E}{(t+1)} - \frac{F}{2(t+1)^2} \right) \\ &= -16 \left(\frac{1}{8} \ln(t-1) - \frac{3}{8(t-1)} - \frac{1}{8(t-1)^2} - \frac{1}{8} \ln(t+1) - \frac{3}{8(t+1)} + \frac{1}{8(t+1)^2} \right) \\ &= -2 \ln(t-1) + \frac{6}{(t-1)} + \frac{2}{(t-1)^2} + 2 \ln(t+1) + \frac{6}{(t+1)} - \frac{2}{(t+1)^2} \\ &= 2 \ln \frac{t+1}{t-1} + \frac{12t^3-4t}{(t^2-1)^4} \end{aligned}$$

donde en el último paso hemos sumado todas las fracciones. Si ahora deshacemos el cambio:

$$\int x \sqrt{\frac{x+2}{x-2}} dx = 2 \ln \frac{\sqrt{\frac{x+2}{x-2}} + 1}{\sqrt{\frac{x+2}{x-2}} - 1} + \frac{12 \sqrt{\left(\frac{x+2}{x-2}\right)^3} - 4 \sqrt{\frac{x+2}{x-2}}}{\left(\sqrt{\left(\frac{x+2}{x-2}\right)^2} - 1\right)^4}$$

h) Cambio

$$x - 2 = t^2 \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{(x-2)} = t \\ \sqrt{(x-2)^3} = t^3 \\ \sqrt{(x-2)^5} = t^5 \\ dx = 2t dt \\ x = t^2 + 2 \end{cases}$$

$$\int \frac{\sqrt{(x-2)^3} - \sqrt{(x-2)^5}}{\sqrt{(x-2)} + 3} dx = \int \frac{t^3 - t^5}{t + 3} 2t dt = 2 \int \frac{t^4 - t^6}{t + 3} dt$$

Hacemos la división polinomial

$$\frac{t^4 - t^6}{t + 3} = -t^5 + 3t^4 - 8t^3 + 24t^2 - 72t + 216 - \frac{648}{t + 3}$$

por tanto

$$\begin{aligned} 2 \int \frac{t^4 - t^6}{t + 3} dt &= 2 \int \left(-t^5 + 3t^4 - 8t^3 + 24t^2 - 72t + 216 - \frac{648}{t + 3} \right) dt \\ &= 2 \left(-\frac{t^6}{6} + \frac{3t^5}{5} - 2t^4 + 8t^3 - 36t^2 + 216t - 648 \ln(t + 3) \right) \\ &= -\frac{1}{3}t^6 + \frac{6}{5}t^5 - 4t^4 + 16t^3 - 72t^2 + 432t - 1296 \ln(t + 3) \end{aligned}$$

y deshaciendo el cambio

$$\begin{aligned} \int \frac{\sqrt{(x-2)^3} - \sqrt{(x-2)^5}}{\sqrt{(x-2)} + 3} dx &= -\frac{1}{3}\sqrt{(x-2)^6} + \frac{6}{5}\sqrt{(x-2)^5} - 4\sqrt{(x-2)^4} + 16\sqrt{(x-2)^3} \\ &\quad - 72\sqrt{(x-2)^2} + 432\sqrt{(x-2)} - 1296 \ln(\sqrt{(x-2)} + 3) \\ &= -\frac{1}{3}(x-2)^3 + \frac{6}{5}\sqrt{(x-2)^5} - 4(x-2)^2 + 16\sqrt{(x-2)^3} \\ &\quad - 72(x-2) + 432\sqrt{(x-2)} - 1296 \ln(\sqrt{(x-2)} + 3) \\ &= -\frac{1}{3}x^3 - 2x^2 - 60x + \frac{392}{3} \\ &\quad + \left(\frac{6}{5}x^2 + \frac{56}{5}x + \frac{2024}{5} \right) \sqrt{x-2} \\ &\quad - 1296 \ln(\sqrt{(x-2)} + 3) \\ &= \frac{6}{5}(x-2)^2 \sqrt{(x-2)} + 16(x-2) \sqrt{(x-2)} + 432\sqrt{(x-2)} \\ &= \frac{6}{5}(x-2)^2 + 16(x-2) + 432 \end{aligned}$$

i) Cambio

$$\frac{x-1}{x+1} = t^2 \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} = t \\ x = \frac{1+t^2}{1-t^2} \\ dx = \frac{8t}{(1-t^2)^2} dt \end{cases}$$

$$\int \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} \frac{1}{x} dx = \int t \frac{1-t^2}{1+t^2} \frac{4t}{(1-t^2)^2} dt = \int \frac{4t^2}{(1-t^2)(1+t^2)} dt$$

Descomponemos en fracciones simples

$$\frac{4t^2}{(1-t^2)(1+t^2)} = \frac{A}{1-t} + \frac{B}{1+t} + \frac{Ct+D}{1+t^2}$$

el numerador de la fracción de la derecha es

$$A(1+t)(1+t^2) + B(1-t)(1+t^2) + (Ct+D)(1-t^2)$$

o si lo ordenamos por potencias

$$t^3(A-B-C) + t^2(A+B-D) + t(A-B+C) + (A+B+D)$$

e igualando a los coeficientes del numerador del miembro de la izquierda

$$\begin{cases} A-B-C=0 \\ A+B-D=4 \\ A-B+C=0 \\ A+B+D=0 \end{cases}$$

que tiene por solución

$$A=1; B=1; C=0; D=-2$$

por tanto

$$\begin{aligned} \int \frac{4t^2}{(1-t^2)(1+t^2)} dt &= \int \left(\frac{A}{1-t} + \frac{B}{1+t} + \frac{Ct+D}{1+t^2} \right) dt = \\ &= \int \left(\frac{1}{1-t} + \frac{1}{1+t} - \frac{2}{1+t^2} \right) dt \\ &= \ln(1-t) + \ln(1+t) - 2 \arctan t \end{aligned}$$

Si ahora deshacemos el cambio:

$$\int \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} \frac{1}{x} dx = \ln \left(1 - \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} \right) + \ln \left(1 + \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} \right) - 2 \arctan \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$$

7. Calcula las siguientes integrales de funciones radicales:

(a) $\int \frac{1}{\sqrt{-x^2-2x+3}} dx$

(b) $\int \frac{1}{\sqrt{-x^2+2x+1}} dx$

(c) $\int \frac{1}{\sqrt{-4x^2+4x+1}} dx$

(d) $\int \frac{x}{\sqrt{-x^2-4x+2}} dx$

(e) $\int \sqrt{-4x^2-8x-3} dx$

(f) $\int \frac{1}{x^2\sqrt{x^2+1}} dx$

(g) $\int \sqrt{4x^2+8x+8} dx$

(h) $\int \sqrt{-x^2+4x} dx$

(i) $\int \frac{x^2}{\sqrt{4x-x^2}} dx$

(j) $\int \sqrt{x^2-2x-3} dx$

(k) $\int \sqrt{-x^2+2x} dx$

(l) $\int \frac{x^2}{\sqrt{3x-x^2}} dx$

(m) $\int \frac{1}{x^2\sqrt{x^2+x-3}} dx$

(n) $\int \frac{1}{(x-\frac{1}{2})\sqrt{4x^2-1}} dx$

(o) $\int \frac{1}{\sqrt{4x^2+x+1}} dx$

(p) $\int \frac{1}{x\sqrt{-x^2+2x+1}} dx$

(q) $\int \frac{1}{x\sqrt{-2x^2-x+1}} dx$

(r) $\int \frac{1}{(x-1)\sqrt{-x^2+x+4}} dx$

(s) $\int \frac{1}{\sqrt{x^2+3x+2}} dx$

(t) $\int \frac{1}{x\sqrt{x^2-4}} dx$

(u) $\int \frac{1}{\sqrt{x^2+x-2}} dx$

En todos los apartados hay que transformar al cuadrado de una suma:

a) En este apartado lo haremos paso a paso, en los siguientes los cálculos intermedios se obviarán.

$$\int \frac{1}{\sqrt{-x^2 - 2x + 3}} dx$$

En primer lugar convertimos el polinomio de 2º grado para que incluya el cuadrado de una suma o diferencia:

$$-x^2 - 2x + 3 = 4 - (x + 1)^2$$

y por tanto la integral se transforma en

$$\int \frac{1}{\sqrt{-x^2 - 2x + 3}} dx = \int \frac{1}{\sqrt{4 - (x + 1)^2}} dx.$$

A continuación, hacemos el cambio el cambio de variable

$$(x + 1)^2 = 4 \operatorname{sen}^2 t \Leftrightarrow (x + 1) = 2 \operatorname{sen} t$$

de forma que:

$$dx = 2 \cos t dt$$

$$t = \operatorname{arcsen} \frac{x + 1}{2}$$

y sustituyendo en la integral

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{\sqrt{4 - (x + 1)^2}} dx &= \int \frac{1}{\sqrt{4 - 4 \operatorname{sen}^2 t}} 2 \cos t dt \\ &= \int \frac{1}{\sqrt{4(1 - \operatorname{sen}^2 t)}} 2 \cos t dt \\ &= \int \frac{1}{\sqrt{4 \cos^2 t}} 2 \cos t dt \\ &= \int \frac{1}{2 \cos t} 2 \cos t dt \\ &= \int dt = t \end{aligned}$$

y deshaciendo el cambio de variable

$$\int \frac{1}{\sqrt{4 - (x + 1)^2}} dx = \operatorname{arcsen} \frac{x + 1}{2} + C$$

b)

$$\int \frac{1}{\sqrt{-x^2 + 2x + 1}} dx$$

Transformación del polinomio:

$$-x^2 + 2x + 1 = 2 - (x - 1)^2$$

y por tanto la integral se transforma en

$$\int \frac{1}{\sqrt{-x^2 + 2x + 1}} dx = \int \frac{1}{\sqrt{2 - (x - 1)^2}} dx.$$

Cambio de variable

$$(x-1)^2 = 2 \operatorname{sen}^2 t \Leftrightarrow (x-1) = \sqrt{2} \operatorname{sen} t$$

de forma que:

$$dx = \sqrt{2} \cos t dt$$

$$t = \operatorname{arcsen} \frac{x-1}{\sqrt{2}}$$

y sustituyendo en la integral

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{\sqrt{2-(x-1)^2}} dx &= \int \frac{1}{\sqrt{2-2 \operatorname{sen}^2 t}} \sqrt{2} \cos t dt \\ &= \int dt = t \end{aligned}$$

y deshaciendo el cambio de variable

$$\int \frac{1}{\sqrt{2-(x-1)^2}} dx = \operatorname{arcsen} \frac{x-1}{\sqrt{2}} + C$$

c)

$$\int \frac{1}{\sqrt{-4x^2+4x+1}} dx$$

Transformación del polinomio:

$$-4x^2+4x+1 = 2 - (2x-1)^2$$

y por tanto la integral se transforma en

$$\int \frac{1}{\sqrt{-4x^2+4x+1}} dx = \int \frac{1}{\sqrt{2-(2x-1)^2}} dx.$$

Cambio de variable

$$(2x-1)^2 = 2 \operatorname{sen}^2 t \Leftrightarrow (2x-1) = \sqrt{2} \operatorname{sen} t$$

de forma que:

$$2dx = \sqrt{2} \cos t dt \Rightarrow dx = \frac{\sqrt{2}}{2} \cos t dt$$

$$t = \operatorname{arcsen} \frac{2x-1}{\sqrt{2}}$$

y sustituyendo en la integral

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{\sqrt{2-(2x-1)^2}} dx &= \int \frac{1}{\sqrt{2-2 \operatorname{sen}^2 t}} \frac{\sqrt{2}}{2} \cos t dt \\ &= \int \frac{1}{2} dt = \frac{t}{2} \end{aligned}$$

y deshaciendo el cambio de variable

$$\int \frac{1}{\sqrt{2-(2x-1)^2}} dx = \frac{1}{2} \operatorname{arcsen} \frac{2x-1}{\sqrt{2}} + C$$

d)

$$\int \frac{x}{\sqrt{-x^2 - 4x + 2}} dx$$

Transformación del polinomio:

$$-x^2 - 4x + 2 = 6 - (x + 2)^2$$

y por tanto la integral se transforma en

$$\int \frac{x}{\sqrt{-x^2 - 4x + 2}} dx = \int \frac{x}{\sqrt{6 - (x + 2)^2}} dx.$$

Cambio de variable

$$(x + 2)^2 = 6 \operatorname{sen}^2 t \Leftrightarrow (x + 2) = \sqrt{6} \operatorname{sen} t$$

de forma que:

$$dx = \sqrt{2} \cos t dt$$

$$t = \operatorname{arcsen} \frac{x + 2}{\sqrt{6}}$$

y sustituyendo en la integral

$$\begin{aligned} \int \frac{x}{\sqrt{6 - (x + 2)^2}} dx &= \int \frac{(\sqrt{6} \operatorname{sen} t - 2)}{\sqrt{6 - 6 \operatorname{sen}^2 t}} \sqrt{6} \cos t dt \\ &= \int (\sqrt{6} \operatorname{sen} t - 2) dt = -\sqrt{6} \cos t - 2t \end{aligned}$$

y deshaciendo el cambio de variable

$$\int \frac{x}{\sqrt{6 - (x + 2)^2}} dx = -\sqrt{6} \cos \left(\operatorname{arcsen} \frac{x + 2}{\sqrt{6}} \right) - 2 \left(\operatorname{arcsen} \frac{x + 2}{\sqrt{6}} \right) + C$$

y si ponemos

$$\cos \left(\operatorname{arcsen} \left(\frac{x + 2}{\sqrt{6}} \right) \right) = \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 \operatorname{arcsen} \left(\frac{x + 2}{\sqrt{6}} \right)} = \sqrt{1 - \left(\frac{x + 2}{\sqrt{6}} \right)^2} = \frac{1}{\sqrt{6}} \sqrt{6 - (x + 2)^2}$$

obtenemos de forma simplificada

$$\int \frac{x}{\sqrt{6 - (x + 2)^2}} dx = -\sqrt{6 - (x + 2)^2} - 2 \left(\operatorname{arcsen} \frac{x + 2}{\sqrt{6}} \right) + C$$

e)

$$\int \sqrt{-4x^2 - 8x - 3} dx$$

Transformación del polinomio:

$$-4x^2 - 8x - 3 = 1 - (2x + 2)^2$$

y por tanto la integral se transforma en

$$\int \sqrt{-4x^2 - 8x - 3} dx = \int \sqrt{1 - (2x + 2)^2} dx$$

Cambio de variable

$$(2x + 2)^2 = \text{sen}^2 t \Leftrightarrow (2x + 2) = \text{sen } t$$

de forma que:

$$2dx = \cos t dt \Rightarrow dx = \frac{1}{2} \cos t dt$$

$$t = \arcsen(2x + 2)$$

y sustituyendo en la integral

$$\begin{aligned} \int \sqrt{1 - (2x + 2)^2} dx &= \int (\sqrt{1 - \text{sen}^2 t}) \left(\frac{1}{2} \cos t \right) dt \\ &= \frac{1}{2} \int \cos^2 t dt = \frac{1}{2} \int \left(\frac{1 + \cos 2t}{2} \right) dt \\ &= \frac{1}{4} t + \frac{\text{sen } 2t}{8} \end{aligned}$$

Usamos que

$$\text{sen } 2t = 2 \text{sen } t \cos t = 2 \text{sen } t \sqrt{1 - \text{sen}^2 t}$$

y deshaciendo el cambio de variable

$$\int \sqrt{1 - (2x + 2)^2} dx = \frac{1}{4} \arcsen(2x + 2) + \frac{1}{4} (x + 1) \sqrt{1 - (2x + 2)^2}$$

f)

$$\int \frac{1}{x^2 \sqrt{x^2 + 1}} dx$$

Cambio de variable

$$x^2 = \text{Sh}^2 t \Leftrightarrow x = \text{Sh } t$$

de forma que:

$$dx = \text{Ch } t dt$$

$$t = \arg \text{Sh } x = \ln \left(x + \sqrt{x^2 + 1} \right)$$

y sustituyendo en la integral

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{x^2 \sqrt{x^2 + 1}} dx &= \int \frac{1}{\text{Sh}^2 t \sqrt{\text{Sh}^2 t + 1}} \text{Ch } t dt \\ &= \int \frac{1}{\text{Sh}^2 t} dt. \end{aligned}$$

Para resolver esta integral, expresamos la función $\text{Sh } t$, en términos de la función exponencial

$$\int \frac{1}{\text{Sh}^2 t} dt = \int \frac{1}{\left(\frac{e^t - e^{-t}}{2} \right)^2} dt = \int \frac{4}{(e^t - e^{-t})^2} dt$$

y hacemos el cambio de variable

$$e^t = u \Rightarrow dt = \frac{1}{u} du$$

y obtendremos

$$\int \frac{4}{(e^t - e^{-t})^2} dt = \int \frac{4}{\left(u - \frac{1}{u}\right)^2} \frac{1}{u} du = \int \frac{4}{\left(\frac{u^2-1}{u}\right)^2} \frac{1}{u} du = \int \frac{4u}{(u^2-1)^2} du$$

que es una integral racional, no obstante si ponemos

$$\int \frac{4u}{(u^2-1)^2} du = 2 \int 2u (u^2-1)^{-2} du$$

vemos que es una integral inmediata de la forma $f'(x) [f(x)]^n$ con $n \neq -1$, cuya primitiva es $\frac{[f(x)]^{n+1}}{n+1}$

$$\int \frac{4u}{(u^2-1)^2} du = \frac{2(u^2-1)^{-1}}{-1} = \frac{2}{1-u^2}$$

Deshacemos el último cambio $u = e^t$

$$\frac{2}{1-u^2} = \frac{2}{1-e^{2t}}$$

y deshacemos el primer cambio

$$t = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$$

y tendremos

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{x^2\sqrt{x^2+1}} dx &= \frac{2}{1-e^{2\ln(x+\sqrt{x^2+1})}} = \frac{2}{1-e^{\ln(x+\sqrt{x^2+1})^2}} = \frac{2}{1-(x+\sqrt{x^2+1})^2} \\ &= -\frac{2}{(2x^2+2x\sqrt{x^2+1})} = \frac{-1}{x^2+x\sqrt{x^2+1}} = \frac{-1}{x(x+\sqrt{x^2+1})} \end{aligned}$$

También podemos considerar esta integral como binómica

$$\int x^{-2} (1+x^2)^{-\frac{1}{2}} dx$$

de tipo general. Haciendo el cambio

$$\begin{aligned} x^2 &= t \Rightarrow x = t^{\frac{1}{2}} \\ dx &= \frac{1}{2} t^{-\frac{1}{2}} dt \end{aligned}$$

obtenemos

$$\int x^{-2} (1+x^2)^{-\frac{1}{2}} dx = \frac{1}{2} \int t^{-1} (1+t)^{-\frac{1}{2}} t^{-\frac{1}{2}} dt = \frac{1}{2} \int t^{-\frac{3}{2}} (1+t)^{-\frac{1}{2}} dt$$

que es de tipo 1, siendo la suma de los exponentes

$$-\frac{3}{2} - \frac{1}{2} = -\frac{4}{2} = -2 \in \mathbb{Z}$$

luego debemos multiplicar y dividir por $t^{-\frac{1}{2}}$

$$\frac{1}{2} \int t^{-\frac{3}{2}} (1+t)^{-\frac{1}{2}} dt = \frac{1}{2} \int t^{-\frac{3}{2}} (1+t)^{-\frac{1}{2}} \frac{t^{-\frac{1}{2}}}{t^{-\frac{1}{2}}} dt = \frac{1}{2} \int t^{-2} \left(\frac{1+t}{t}\right)^{-\frac{1}{2}} dt$$

y haremos el cambio

$$\begin{aligned} \frac{1+t}{t} &= u^2 \Rightarrow t = \frac{1}{u^2-1} \\ dt &= -\frac{2u}{(u^2-1)^2} du \end{aligned}$$

de forma que

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int t^{-2} \left(\frac{1+t}{t}\right)^{-\frac{1}{2}} dt &= \frac{1}{2} \int \left(\frac{1}{u^2-1}\right)^{-2} (u^2)^{-\frac{1}{2}} \left(-\frac{2u}{(u^2-1)^2} du\right) \\ &= -\int du = -u \end{aligned}$$

y deshaciendo cambios

$$-u = -\sqrt{\frac{1+t}{t}} = -\sqrt{\frac{1+x^2}{x^2}} = -\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}$$

es decir

$$\int \frac{1}{x^2\sqrt{x^2+1}} dx = -\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}$$

Aunque esta primitiva es distinta a la obtenida por el método anterior, podemos comprobar como su diferencia es una constante

$$\left(\frac{-1}{x(x+\sqrt{x^2+1})}\right) - \left(-\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}\right) = 1$$

g)

$$\int \sqrt{4x^2+8x+8} dx$$

Transformación del polinomio:

$$4x^2+8x+8 = (2x+2)^2+4 = 4((x+1)^2+1)$$

y por tanto la integral se transforma en

$$\int \sqrt{4x^2+8x+8} dx = \int 2\sqrt{(x+1)^2+1} dx$$

Cambio de variable

$$(x+1)^2 = \text{Sh}^2 t \Leftrightarrow (x+1) = \text{Sh } t$$

de forma que:

$$dx = \text{Ch } t dt$$

$$t = \arg \text{Sh}(x+1) = \ln \left((x+1) + \sqrt{(x+1)^2+1} \right)$$

y sustituyendo en la integral

$$2 \int \sqrt{(x+1)^2+1} dx = 2 \int \left(\sqrt{\text{Sh}^2 t+1} \right) \text{Ch } t dt = 2 \int \text{Ch}^2 t dt$$

Para calcular la integral, expresamos el coseno hiperbólico en términos de la función exponencial

$$\int 2 \text{Ch}^2 t dt = 2 \int \left(\frac{e^t + e^{-t}}{2} \right)^2 dt = \frac{1}{2} \int (e^{2t} + e^{-2t} + 2) dt = \frac{e^{2t}}{4} - \frac{e^{-2t}}{4} + t$$

y deshaciendo el cambio de variable

$$\begin{aligned} \int 2 \operatorname{Ch}^2 t \, dt &= \frac{e^{2 \ln((x+1)+\sqrt{(x+1)^2+1})}}{4} - \frac{e^{-2 \ln((x+1)+\sqrt{(x+1)^2+1})}}{4} + \arg \operatorname{Sh}(x+1) \\ &= \frac{\left(x+1+\sqrt{(x+1)^2+1}\right)^2}{4} - \frac{1}{4\left(x+1+\sqrt{(x+1)^2+1}\right)^2} + \ln\left(x+1+\sqrt{(x+1)^2+1}\right) \end{aligned}$$

h)

$$\int \sqrt{-x^2+4x} \, dx$$

Transformación del polinomio:

$$-x^2+4x=4-(x-2)^2$$

y por tanto la integral se transforma en

$$\int \sqrt{-x^2+4x} \, dx = \int \sqrt{4-(x-2)^2} \, dx$$

Cambio de variable

$$(x-2)^2 = 4 \operatorname{sen}^2 t \Leftrightarrow (x-2) = 2 \operatorname{sen} t$$

$$t = \operatorname{arcsen} \frac{x-2}{2}$$

$$dx = 2 \cos t \, dt$$

y sustituyendo en la integral

$$\begin{aligned} \int \sqrt{4-(x-2)^2} \, dx &= \int \sqrt{4-4 \operatorname{sen}^2 t} 2 \cos t \, dt = \int 4 \cos^2 t \, dt = 4 \int \left(\frac{1+\cos(2t)}{2}\right) dt \\ &= 2t + \operatorname{sen}(2t) = 2t + 2 \operatorname{sen} t \sqrt{1-\operatorname{sen}^2 t} \end{aligned}$$

y como

$$\operatorname{sen} t = \frac{x-2}{2}$$

obtenemos

$$\begin{aligned} \int \sqrt{4-(x-2)^2} \, dx &= 2 \operatorname{arcsen} \frac{x-2}{2} + (x-2) \sqrt{1-\frac{(x-2)^2}{4}} \\ &= 2 \operatorname{arcsen} \frac{x-2}{2} + \frac{x-2}{2} \sqrt{-x^2+4x} \end{aligned}$$

i)

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{4x-x^2}} \, dx = \int \frac{x^2}{\sqrt{4-(x-2)^2}} \, dx$$

El mismo cambio que antes

$$(x-2)^2 = 4 \operatorname{sen}^2 t \Leftrightarrow (x-2) = 2 \operatorname{sen} t$$

$$t = \operatorname{arcsen} \frac{x-2}{2}$$

$$dx = 2 \cos t dt$$

En este caso

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2}{\sqrt{4-(x-2)^2}} dx &= \int \frac{(2+2 \operatorname{sen} t)^2}{\sqrt{4-4 \operatorname{sen}^2 t}} 2 \cos t dt = \int (2+2 \operatorname{sen} t)^2 dt \\ &= \int (4+4 \operatorname{sen}^2 t+8 \operatorname{sen} t) dt \\ &= \int (4+2(1-\cos 2t)+8 \operatorname{sen} t) dt \\ &= \int (6-2 \cos 2t+8 \operatorname{sen} t) dt \\ &= 6t - \operatorname{sen} 2t - 8 \cos t \end{aligned}$$

y expresado en términos del $\operatorname{sen} t$

$$6t - 2 \operatorname{sen} t \sqrt{1-\operatorname{sen}^2 t} - 8 \sqrt{1-\operatorname{sen}^2 t}$$

y puesto que

$$\operatorname{sen} t = \frac{x-2}{2}$$

la integral buscada es

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2}{\sqrt{4-(x-2)^2}} dx &= 6 \operatorname{arcsen} \frac{x-2}{2} - (x-2) \sqrt{1-\left(\frac{x-2}{2}\right)^2} - 8 \sqrt{1-\left(\frac{x-2}{2}\right)^2} \\ &= 6 \operatorname{arcsen} \frac{x-2}{2} - \frac{(x-2)}{2} \sqrt{4x-x^2} - 4 \sqrt{4x-x^2} \\ &= 6 \operatorname{arcsen} \frac{x-2}{2} - \frac{x}{2} \sqrt{4x-x^2} - 3 \sqrt{4x-x^2} \end{aligned}$$

j) Expresamos en términos del cuadrado de una suma

$$x^2 - 2x - 3 = (x-1)^2 - 4$$

$$\int \sqrt{x^2 - 2x - 3} dx = \int \sqrt{(x-1)^2 - 4}$$

Hacemos el cambio de variable

$$(x-1)^2 = 4 \operatorname{Ch}^2 t \Rightarrow (x-1) = 2 \operatorname{Ch} t$$

$$dx = 2 \operatorname{Sh} t dt$$

$$t = \ln \left(\frac{x-1}{2} + \sqrt{\left(\frac{x-1}{2}\right)^2 - 1} \right) = \ln \frac{(x-1) + \sqrt{x^2 - 2x - 3}}{2}$$

Sustituimos en la integral y empleamos la definición de $\text{Sh } t$ en términos de e^t

$$\begin{aligned} \int \sqrt{(x-1)^2 - 4} dx &= \int \sqrt{4 \text{Ch}^2 t - 4} \text{Sh } t dt = \int 4 \text{Sh}^2 t dt \\ &= 4 \int \frac{e^{2t} + e^{-2t} - 2}{4} dt = \frac{e^{2t}}{2} - \frac{e^{-2t}}{2} - 2t = \text{Sh}(2t) - 2t \\ &= 2 \text{Sh } t \text{Ch } t - 2t = 2\sqrt{\text{Ch}^2 t - 1} \text{Ch } t - 2t \end{aligned}$$

Deshacemos el cambio

$$\begin{aligned} 2\sqrt{\text{Ch}^2 t - 1} \text{Ch } t - 2t &= 2\sqrt{\left(\frac{x-1}{2}\right)^2 - 1} \frac{(x-1)}{2} - 2 \ln \frac{(x-1) + \sqrt{x^2 - 2x - 3}}{2} \\ &= \frac{(x-1)}{2} \sqrt{x^2 - 2x - 3} - 2 \ln \frac{(x-1) + \sqrt{x^2 - 2x - 3}}{2} \end{aligned}$$

k)

$$-x^2 + 2x = 1 - (x-1)^2$$

$$\begin{aligned} (x-1)^2 &= \text{sen}^2 t \Rightarrow (x-1) = \text{sen } t \\ dx &= \text{cos } t dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int \sqrt{-x^2 + 2x} dx &= \int \sqrt{1 - (x-1)^2} dx \\ &= \int \sqrt{1 - \text{sen}^2 t} \text{cos } t dt \\ &= \int \text{cos}^2 t dt \\ &= \int \frac{1 + \text{cos } 2t}{2} dt \\ &= \frac{1}{2}t + \frac{\text{sen } 2t}{4} \end{aligned}$$

y deshaciendo el cambio

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}t + \frac{1}{4} \text{sen } 2t &= \frac{1}{2}t + \frac{1}{4} 2 \text{sen } t \text{cos } t = \frac{1}{2}t + \frac{1}{2} \text{sen } t \sqrt{1 - \text{sen}^2 t} \\ &= \frac{1}{2} \arcsin(x-1) + \frac{1}{2} (x-1) \sqrt{1 - (x-1)^2} \\ &= \frac{1}{2} \arcsin(x-1) + \frac{1}{2} (x-1) \sqrt{-x^2 + 2x} \end{aligned}$$

l)

$$3x - x^2 = \frac{9}{4} - \left(x - \frac{3}{2}\right)^2$$

$$\begin{aligned} \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 &= \frac{9}{4} \text{sen}^2 t \Rightarrow \left(x - \frac{3}{2}\right) = \frac{3}{2} \text{sen } t \\ dx &= \frac{3}{2} \text{cos } t dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int \frac{x^2}{\sqrt{3x-x^2}} dx &= \int \frac{x^2}{\sqrt{\frac{9}{4} - (x-\frac{3}{2})^2}} dx = \int \frac{(\frac{3}{2} \operatorname{sen} t + \frac{3}{2})^2}{\sqrt{\frac{9}{4} - \frac{9}{4} \operatorname{sen}^2 t}} \frac{3}{2} \cos t dt \\
&= \int \left(\frac{3}{2} \operatorname{sen} t + \frac{3}{2}\right)^2 dt = \int \left(\frac{9}{4} \operatorname{sen}^2 t + \frac{9}{4} + \frac{9}{2} \operatorname{sen} t\right) dt \\
&= \int \left(\frac{9}{4} \frac{1 - \cos 2t}{2} + \frac{9}{4} + \frac{9}{2} \operatorname{sen} t\right) dt \\
&= \frac{9}{8} t - \frac{9}{16} \operatorname{sen} 2t + \frac{9}{4} t - \frac{9}{2} \cos t \\
&= \frac{27}{8} t - \frac{9}{16} \operatorname{sen} 2t - \frac{9}{2} \cos t
\end{aligned}$$

Expresamos en función de la función $\operatorname{sen} t$

$$\begin{aligned}
\frac{27}{8} t - \frac{9}{16} \operatorname{sen} 2t - \frac{9}{2} \cos t &= \frac{27}{8} t - \frac{9}{16} 2 \operatorname{sen} t \cos t - \frac{9}{2} \cos t \\
&= \frac{27}{8} t - \frac{9}{16} 2 \operatorname{sen} t \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 t} - \frac{9}{2} \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 t}
\end{aligned}$$

deshaciendo el cambio y las oportunas simplificaciones, tendremos

$$\begin{aligned}
&\frac{27}{8} t - \frac{9}{16} 2 \operatorname{sen} t \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 t} - \frac{9}{2} \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 t} \\
&= \frac{27}{8} \arcsin\left(\frac{1}{3}(2x-3)\right) - \frac{(2x+9)}{4} \sqrt{3x-x^2}
\end{aligned}$$

es decir

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{3x-x^2}} dx = \frac{27}{8} \arcsin\left(\frac{1}{3}(2x-3)\right) - \frac{(2x+9)}{4} \sqrt{3x-x^2}$$

m)

$$x^2 + x - 3 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{13}{4}$$

$$\begin{aligned}
\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 &= \frac{13}{4} \operatorname{Ch}^2 t \Rightarrow \left(x + \frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{13}}{2} \operatorname{Ch} t \Rightarrow x = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{13}}{2} \operatorname{Ch} t \\
dx &= \frac{\sqrt{13}}{2} \operatorname{Sh} t dt
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{x^2 \sqrt{x^2 + x - 3}} dx &= \int \frac{1}{x^2 \sqrt{\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{13}{4}}} dx \\
&= \int \frac{1}{\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{13}}{2} \operatorname{Ch} t\right)^2 \sqrt{\frac{13}{4} \operatorname{Ch}^2 t - \frac{13}{4}}} \frac{\sqrt{13}}{2} \operatorname{Sh} t dt \\
&= \int \frac{1}{\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{13}}{2} \operatorname{Ch} t\right)^2} dt
\end{aligned}$$

Hacemos el cambio

$$e^t = u \Rightarrow dt = \frac{1}{u} du$$

y por tanto

$$\begin{aligned}\operatorname{Sh} t &= \frac{e^t - e^{-t}}{2} = \frac{u - \frac{1}{u}}{2} = \frac{u^2 - 1}{2u} \\ \operatorname{Ch} t &= \frac{e^t + e^{-t}}{2} = \frac{u + \frac{1}{u}}{2} = \frac{u^2 + 1}{2u}\end{aligned}$$

n)

$$4x^2 - 1 = 4x^2 - 1$$

$$4x^2 = \operatorname{Ch}^2 t \Rightarrow 2x = \operatorname{Ch} t$$

$$dx = \frac{1}{2} \operatorname{Sh} t dt$$

$$t = \arg \operatorname{Ch}(2x) = \ln(2x + \sqrt{4x^2 - 1})$$

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{(x - \frac{1}{2}) \sqrt{4x^2 - 1}} dx &= \int \frac{1}{(\frac{\operatorname{Ch} t}{2} - \frac{1}{2}) \sqrt{\operatorname{Ch}^2 t - 1}} \frac{1}{2} \operatorname{Sh} t dt \\ &= \int \frac{1}{\operatorname{Ch} t - 1} dt = \int \frac{1}{\frac{e^t + e^{-t}}{2} - 1} dt = \int \frac{2}{e^t + e^{-t} - 2} dt\end{aligned}$$

Hacemos el cambio

$$e^t = u \Rightarrow e^t dt = du \Rightarrow dt = \frac{1}{e^t} du = \frac{1}{u} du$$

$$\int \frac{2}{e^t + e^{-t} - 2} dt = \int \frac{2}{u + \frac{1}{u} - 2} \frac{1}{u} du = \int \frac{2}{u^2 + 1 - 2u} du = \int \frac{2}{(u - 1)^2} du = -\frac{2}{(u - 1)} = \frac{2}{1 - u}$$

y deshaciendo todos los cambios

$$\frac{2}{1 - u} = \frac{2}{1 - e^t} = \frac{2}{1 - e^{\ln(2x + \sqrt{4x^2 - 1})}} = \frac{2}{1 - (2x + \sqrt{4x^2 - 1})}$$

$$\int \frac{1}{(x - \frac{1}{2}) \sqrt{4x^2 - 1}} dx = \frac{2}{1 - (2x + \sqrt{4x^2 - 1})} + C$$

\tilde{n})

$$4x^2 + x + 1 = \left(2x + \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{15}{16}$$

$$\left(2x + \frac{1}{4}\right)^2 = \frac{15}{16} \operatorname{Sh}^2 t \Rightarrow \left(2x + \frac{1}{4}\right) = \frac{\sqrt{15}}{4} \operatorname{Sh} t$$

$$dx = \frac{\sqrt{15}}{8} \operatorname{Ch} t dt$$

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{\sqrt{4x^2 + x + 1}} dx &= \int \frac{1}{\sqrt{(2x + \frac{1}{4})^2 + \frac{15}{16}}} dx = \int \frac{1}{\sqrt{\frac{15}{16} \operatorname{Sh}^2 t + \frac{15}{16}}} \frac{\sqrt{15}}{8} \operatorname{Ch} t dt \\ &= \int \frac{2}{\sqrt{\frac{15}{16} \operatorname{Sh}^2 t + 1}} \frac{\sqrt{15}}{8} \operatorname{Ch} t dt \\ &= \int \frac{2}{\frac{1}{4} \sqrt{15} \operatorname{Ch} t} \frac{\sqrt{15}}{8} \operatorname{Ch} t dt = \int dt = t\end{aligned}$$

Y deshaciendo el cambio

$$\begin{aligned} t &= \arg \operatorname{Sh} \frac{4}{\sqrt{15}} \left(2x + \frac{1}{4} \right) = \arg \operatorname{Sh} \frac{8x+1}{\sqrt{15}} \\ &= \ln \left(\frac{8x+1}{\sqrt{15}} + \sqrt{\left(\frac{8x+1}{\sqrt{15}} \right)^2 + 1} \right) \end{aligned}$$

Luego

$$\int \frac{1}{\sqrt{4x^2+x+1}} dx = \ln \left(\frac{8x+1}{\sqrt{15}} + \sqrt{\left(\frac{8x+1}{\sqrt{15}} \right)^2 + 1} \right) + C$$

o)

$$-x^2 + 2x + 1 = 2 - (x-1)^2$$

$$(x-1)^2 = 2 \cos^2 t \Rightarrow (x-1) = \sqrt{2} \cos t$$

$$x = 1 + \sqrt{2} \cos t$$

$$dx = -\sqrt{2} \operatorname{sen} t dt$$

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{x\sqrt{-x^2+2x+1}} dx &= \int \frac{1}{x\sqrt{2-(x-1)^2}} dx = - \int \frac{1}{(1+\sqrt{2}\cos t)\sqrt{2-2\cos^2 t}} \sqrt{2}\operatorname{sen} t dt \\ &= \int \frac{-1}{(1+\sqrt{2}\cos t)} dt \end{aligned}$$

que es una integral trigonométrica que podemos hacer mediante el cambio general

$$\tan \frac{t}{2} = u$$

Recordemos que en este caso tendremos

$$\cos t = \frac{1-u^2}{1+u^2}$$

$$dt = \frac{2}{1+u^2} du$$

por tanto

$$\begin{aligned} \int \frac{-1}{(1+\sqrt{2}\cos t)} dt &= \int \frac{-1}{1+\sqrt{2}\frac{1-u^2}{1+u^2}} \frac{2}{1+u^2} du = \int \frac{2\sqrt{2}+2}{(u+\sqrt{2}+1)(u-\sqrt{2}-1)} du \\ &= \frac{2\sqrt{2}+2}{(u+\sqrt{2}+1)(u-\sqrt{2}-1)} \end{aligned}$$

Y ahora hacemos la descomposición en fracciones simples

$$\frac{2\sqrt{2}+2}{(u+\sqrt{2}+1)(u-\sqrt{2}-1)} = \frac{1}{u-\sqrt{2}-1} - \frac{1}{u+\sqrt{2}+1}$$

luego

$$\begin{aligned} \int \frac{2\sqrt{2}+2}{(u+\sqrt{2}+1)(u-\sqrt{2}-1)} du &= \int \left(\frac{1}{u-\sqrt{2}-1} - \frac{1}{u+\sqrt{2}+1} \right) du \\ &= \ln(u-\sqrt{2}-1) - \ln(u+\sqrt{2}+1) \\ &= \ln \left(\frac{u-\sqrt{2}-1}{u+\sqrt{2}+1} \right) \end{aligned}$$

y podemos deshacer los cambios anteriores

$$\ln \left(\frac{u - \sqrt{2} - 1}{u + \sqrt{2} + 1} \right) = \ln \left(\frac{\tan \frac{t}{2} - \sqrt{2} - 1}{\tan \frac{t}{2} + \sqrt{2} + 1} \right)$$

y teniendo en cuenta que

$$\tan \frac{t}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos t}{1 + \cos t}} = \sqrt{\frac{1 - \frac{x-1}{\sqrt{2}}}{1 + \frac{x-1}{\sqrt{2}}}} = \sqrt{\frac{\sqrt{2} - (x-1)}{\sqrt{2} + (x-1)}}$$

luego la integral buscada es

$$\int \frac{1}{x\sqrt{-x^2 + 2x + 1}} dx = \ln \left(\frac{\sqrt{\frac{\sqrt{2} - (x-1)}{\sqrt{2} + (x-1)}} - \sqrt{2} - 1}{\sqrt{\frac{\sqrt{2} - (x-1)}{\sqrt{2} + (x-1)}} + \sqrt{2} + 1} \right)$$

p)

$$-2x^2 - x + 1 = \frac{9}{8} - 2 \left(x + \frac{1}{4} \right)^2$$

$$2 \left(x + \frac{1}{4} \right)^2 = \frac{9}{8} \operatorname{sen}^2 t \Rightarrow \sqrt{2} \left(x + \frac{1}{4} \right) = \frac{3}{2\sqrt{2}} \operatorname{sen} t$$

$$dx = \frac{3}{4} \cos t dt$$

$$\int \frac{1}{x\sqrt{-2x^2 - x + 1}} dx$$

q)

$$-x^2 + x + 4 = \frac{17}{4} - \left(x - \frac{1}{2} \right)^2$$

$$\left(x - \frac{1}{2} \right)^2 = \frac{17}{4} \operatorname{sen}^2 t \Rightarrow \left(x - \frac{1}{2} \right) = \frac{\sqrt{17}}{2} \operatorname{sen} t$$

$$dx = \frac{\sqrt{17}}{2} \cos t dt$$

$$\int \frac{1}{(x-1)\sqrt{-x^2 + x + 4}} dx$$

r)

$$x^2 + 3x + 2 = \left(x + \frac{3}{2} \right)^2 - \frac{1}{4}$$

$$\left(x + \frac{3}{2} \right)^2 = \frac{1}{4} \operatorname{Ch}^2 t \Rightarrow \left(x + \frac{3}{2} \right) = \frac{1}{2} \operatorname{Ch} t$$

$$dx = \frac{1}{2} \operatorname{Sh} t dt$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 + 3x + 2}} dx$$

s)

$$x^2 - 4 = x^2 - 4$$

$$x^2 = 4 \operatorname{Ch}^2 t \Rightarrow x = 2 \operatorname{Ch} t$$

$$dx = 2 \operatorname{Sh} t dt$$

$$\int \frac{1}{x\sqrt{x^2 - 4}} dx$$

t)

$$x^2 + x - 2 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{9}{4}$$

$$\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{9}{4} \operatorname{Ch}^2 t \Rightarrow \left(x + \frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2} \operatorname{Ch} t$$

$$dx = \frac{3}{2} \operatorname{Sh} t dt$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 + x - 2}} dx$$

8. Aplica el método Alemán para calcular las siguientes integrales:

$$(a) \int \frac{3x + 1}{\sqrt{-x^2 - 2x + 1}} dx \quad (b) \int \frac{-12x^3 + 2x^2 + 8x + 7}{\sqrt{-4x^2 + 4x + 4}} dx \quad (c) \int \frac{-2x^2 - 5x}{\sqrt{-x^2 - 2x + 1}} dx$$

$$(d) \int \frac{2x^2 + 2x - 6}{\sqrt{x^2 + 2x - 3}} dx \quad (e) \int \frac{4x^2 + 3x - 1}{\sqrt{x^2 + x}} dx \quad (f) \int \frac{4x^2 - x - 7}{\sqrt{x^2 - x - 4}} dx$$

Solución: Detallamos el primer problema, los demás se harán siguiendo el método Alemán obviando algunos de los pasos intermedios:

a) El numerador es un polinomio de primer grado luego

$$\int \frac{3x + 1}{\sqrt{-x^2 - 2x + 1}} dx = P_{n-1}(x) \sqrt{-x^2 - 2x + 1} + \int \frac{L}{\sqrt{-x^2 - 2x + 1}} dx$$

como el numerador de la integral es un polinomio de grado 1, el polinomio $P_{n-1}(x)$ debe ser un polinomio de grado 0, es decir, una constante $P_{n-1}(x) = A$, por tanto

$$\int \frac{3x + 1}{\sqrt{-x^2 - 2x + 1}} dx = A\sqrt{-x^2 - 2x + 1} + \int \frac{L}{\sqrt{-x^2 - 2x + 1}} dx$$

Derivando la expresión anterior obtendremos los coeficientes A y L

$$\frac{3x + 1}{\sqrt{-x^2 - 2x + 1}} = -A \frac{x + 1}{\sqrt{-x^2 - 2x + 1}} + \frac{L}{\sqrt{-x^2 - 2x + 1}} = \frac{-Ax - A + L}{\sqrt{-x^2 - 2x + 1}}$$

e igualando coeficientes

$$\left. \begin{array}{l} 3 = -A \\ 1 = -A + L \end{array} \right\} \Rightarrow A = -3 \text{ y } L = -2$$

por tanto

$$\int \frac{3x + 1}{\sqrt{-x^2 - 2x + 1}} dx = -3\sqrt{-x^2 - 2x + 1} - \int \frac{2}{\sqrt{-x^2 - 2x + 1}} dx$$

La integral

$$\int \frac{2}{\sqrt{-x^2 - 2x + 1}} dx$$

se calcula mediante un cambio de variable. Completamos el cuadrado de la suma

$$-x^2 - 2x + 1 = 2 - (x + 1)^2$$

por tanto

$$\int \frac{2}{\sqrt{-x^2 - 2x + 1}} dx = \int \frac{2}{\sqrt{2 - (x + 1)^2}} dx$$

Hacemos el cambio

$$(x + 1)^2 = 2 \operatorname{sen}^2 t \iff (x + 1) = \sqrt{2} \operatorname{sen} t \implies dx = \sqrt{2} \cos t dt$$

y por tanto

$$\begin{aligned} \int \frac{2}{\sqrt{2 - (x + 1)^2}} dx &= \int \frac{2}{\sqrt{2 - 2 \operatorname{sen}^2 t}} dt = \int \frac{2}{\sqrt{2(1 - \operatorname{sen}^2 t)}} \sqrt{2} \cos t dt \\ &= \int \frac{2}{\sqrt{(1 - \operatorname{sen}^2 t)}} \cos t dt = \int \frac{2}{\sqrt{\cos^2 t}} \cos t dt \\ &= \int 2 dt = 2t = 2 \operatorname{arcsen} \frac{x + 1}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

De modo que la integral es

$$\int \frac{3x + 1}{\sqrt{-x^2 - 2x + 1}} dx = -3\sqrt{-x^2 - 2x + 1} - 2 \operatorname{arcsen} \frac{x + 1}{\sqrt{2}}.$$

b) El numerador es un polinomio de tercer grado luego

$$\int \frac{-12x^3 + 2x^2 + 8x + 7}{\sqrt{-4x^2 + 4x + 4}} dx = P_2(x) \sqrt{-4x^2 + 4x + 4} + \int \frac{L}{\sqrt{-4x^2 + 4x + 4}} dx$$

como el numerador de la integral es un polinomio de grado 3, el polinomio $P_2(x)$ debe ser un polinomio de grado 2

$$\int \frac{-12x^3 + 2x^2 + 8x + 7}{\sqrt{-4x^2 + 4x + 4}} dx = (Ax^2 + Bx + C) \sqrt{-4x^2 + 4x + 4} + \int \frac{L}{\sqrt{-4x^2 + 4x + 4}} dx$$

Derivando la expresión anterior obtendremos los coeficientes A, B, C y L

$$\begin{aligned} \frac{-12x^3 + 2x^2 + 8x + 7}{\sqrt{-4x^2 + 4x + 4}} &= (2Ax + B) \sqrt{-4x^2 + 4x + 4} + \frac{(Ax^2 + Bx + C)(-4x + 2)}{\sqrt{-4x^2 + 4x + 4}} + \frac{L}{\sqrt{-4x^2 + 4x + 4}} \\ &= \frac{(2Ax + B)(-4x^2 + 4x + 4) + (Ax^2 + Bx + C)(-4x + 2) + L}{\sqrt{-4x^2 + 4x + 4}} \\ &= \frac{-12Ax^3 + x^2(10A - 8B) + x(8A + 6B - 4C) + 4B + 2C + L}{\sqrt{-4x^2 + 4x + 4}} \end{aligned}$$

e igualando coeficientes

$$\left. \begin{array}{l} -12A = -12 \\ 10A - 8B = 2 \\ 8A + 6B - 4C = 8 \\ 4B + 2C + L = 7 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} A = 1 \\ B = 1 \\ C = \frac{3}{2} \\ L = 0 \end{array} \right\}$$

por tanto

$$\int \frac{3x+1}{\sqrt{-x^2-2x+1}} dx = -3\sqrt{-x^2-2x+1} - \int \frac{2}{\sqrt{-x^2-2x+1}} dx$$

La integral

$$\int \frac{2}{\sqrt{-x^2-2x+1}} dx$$

se calcula mediante un cambio de variable. Completamos el cuadrado de la suma

$$-x^2 - 2x + 1 = 2 - (x+1)^2$$

por tanto

$$\int \frac{-12x^3 + 2x^2 + 8x + 7}{\sqrt{-4x^2 + 4x + 4}} dx = \left(x^2 + x + \frac{3}{2}\right) \sqrt{-4x^2 + 4x + 4} + C$$

c) Usando el método Alemán

$$\int \frac{-2x^2 - 5x}{\sqrt{-x^2 - 2x + 1}} dx = P_1(x) \sqrt{-x^2 - 2x + 1} + \int \frac{L}{\sqrt{-x^2 - 2x + 1}} dx$$

como el numerador de la integral es un polinomio de grado 2, el polinomio $P_1(x)$ debe ser un polinomio de grado 1, por tanto

$$\int \frac{-2x^2 - 5x}{\sqrt{-x^2 - 2x + 1}} dx = (Ax + B) \sqrt{-x^2 - 2x + 1} + \int \frac{L}{\sqrt{-x^2 - 2x + 1}} dx$$

Derivando la expresión anterior obtendremos los coeficientes A, B y L

$$\begin{aligned} \frac{-2x^2 - 5x}{\sqrt{-x^2 - 2x + 1}} &= A\sqrt{-x^2 - 2x + 1} + (Ax + B) \frac{-x - 1}{\sqrt{-x^2 - 2x + 1}} + \frac{L}{\sqrt{-x^2 - 2x + 1}} \\ &= \frac{A(-x^2 - 2x + 1) + (Ax + B)(-x - 1) + L}{\sqrt{-x^2 - 2x + 1}} \\ &= \frac{-2Ax^2 - x(3A + B) + A - B + L}{\sqrt{-x^2 - 2x + 1}} \end{aligned}$$

e igualando coeficientes

$$\left. \begin{array}{l} -2 = -2A \\ -5 = -3A - B \\ 0 = A - B + L \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} A = 1 \\ B = 2 \\ L = 1 \end{array} \right\}$$

por tanto

$$\int \frac{-2x^2 - 5x}{\sqrt{-x^2 - 2x + 1}} dx = (x+2) \sqrt{-x^2 - 2x + 1} + \int \frac{1}{\sqrt{-x^2 - 2x + 1}} dx$$

La integral

$$\int \frac{1}{\sqrt{-x^2 - 2x + 1}} dx$$

la hemos calculado en el apartado *a*.

$$\int \frac{1}{\sqrt{-x^2 - 2x + 1}} dx = \arcsen \frac{x+1}{\sqrt{2}}$$

De modo que la integral es

$$\int \frac{-2x^2 - 5x}{\sqrt{-x^2 - 2x + 1}} dx = (x+2) \sqrt{-x^2 - 2x + 1} + \arcsen \frac{x+1}{\sqrt{2}}.$$

d) Usando el método Alemán

$$\int \frac{2x^2 + 2x - 6}{\sqrt{x^2 + 2x - 3}} dx = P_1(x) \sqrt{x^2 + 2x - 3} + \int \frac{L}{\sqrt{x^2 + 2x - 3}} dx$$

como el numerador de la integral es un polinomio de grado 2, el polinomio $P_1(x)$ debe ser un polinomio de grado 1, por tanto

$$\int \frac{2x^2 + 2x - 6}{\sqrt{x^2 + 2x - 3}} dx = (Ax + B) \sqrt{x^2 + 2x - 3} + \int \frac{L}{\sqrt{x^2 + 2x - 3}} dx$$

Derivando la expresión anterior obtendremos los coeficientes A, B y L

$$\begin{aligned} \frac{2x^2 + 2x - 6}{\sqrt{x^2 + 2x - 3}} &= A\sqrt{x^2 + 2x - 3} + (Ax + B) \frac{x + 1}{\sqrt{x^2 + 2x - 3}} + \frac{L}{\sqrt{x^2 + 2x - 3}} \\ &= \frac{A(x^2 + 2x - 3) + (Ax + B)(x + 1) + L}{\sqrt{x^2 + 2x - 3}} \\ &= \frac{2Ax^2 + x(3A + B) + B - 3A + L}{\sqrt{x^2 + 2x - 3}} \end{aligned}$$

e igualando coeficientes

$$\left. \begin{array}{l} 2 = 2A \\ 2 = 3A + B \\ -6 = B - 3A + L \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} A = 1 \\ B = -1 \\ L = -2 \end{array} \right\}$$

por tanto

$$\int \frac{2x^2 + 2x - 6}{\sqrt{x^2 + 2x - 3}} dx = (x - 1) \sqrt{x^2 + 2x - 3} - \int \frac{2}{\sqrt{x^2 + 2x - 3}} dx$$

Calculamons la integral

$$\int \frac{2}{\sqrt{x^2 + 2x - 3}} dx$$

transformando el radicando

$$x^2 + 2x - 3 = (x + 1)^2 - 4$$

por tanto

$$\int \frac{2}{\sqrt{x^2 + 2x - 3}} dx = \int \frac{2}{\sqrt{(x + 1)^2 - 4}} dx$$

Hacemos el cambio

$$(x + 1)^2 = 4 \operatorname{Ch}^2 t \iff (x + 1) = 2 \operatorname{Ch} t \implies dx = 2 \operatorname{Sh} t dt$$

y por tanto

$$\int \frac{2}{\sqrt{(x + 1)^2 - 4}} dx = \int \frac{2}{\sqrt{4 \operatorname{Ch}^2 t - 4}} 2 \operatorname{Sh} t dt = \int 2 dt = 2t = 2 \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$$

De modo que la integral es

$$\int \frac{2x^2 + 2x - 6}{\sqrt{x^2 + 2x - 3}} dx = (x - 1) \sqrt{x^2 + 2x - 3} - 2 \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$$

e) Usando el método Alemán

$$\int \frac{4x^2 + 3x - 1}{\sqrt{x^2 + x}} dx = P_1(x) \sqrt{x^2 + x} + \int \frac{L}{\sqrt{x^2 + x}} dx$$

como el numerador de la integral es un polinomio de grado 2, el polinomio $P_1(x)$ debe ser un polinomio de grado 1, por tanto

$$\int \frac{4x^2 + 3x - 1}{\sqrt{x^2 + x}} dx = (Ax + B) \sqrt{x^2 + x} + \int \frac{L}{\sqrt{x^2 + x}} dx$$

Derivando la expresión anterior obtendremos los coeficientes A, B y L

$$\begin{aligned} \frac{4x^2 + 3x - 1}{\sqrt{x^2 + x}} &= A\sqrt{x^2 + x} + (Ax + B) \frac{x + \frac{1}{2}}{\sqrt{x^2 + x}} + \frac{L}{\sqrt{x^2 + x}} \\ &= \frac{A(x^2 + x) + (Ax + B)(x + \frac{1}{2}) + L}{\sqrt{x^2 + x}} \\ &= \frac{2Ax^2 + x(\frac{3}{2}A + B) + \frac{1}{2}B + L}{\sqrt{x^2 + x}} \end{aligned}$$

e igualando coeficientes

$$\left. \begin{array}{l} 4 = 2A \\ 3 = \frac{3}{2}A + B \\ -1 = \frac{1}{2}B + L \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} A = 2 \\ B = 0 \\ L = -1 \end{array} \right\}$$

por tanto

$$\int \frac{4x^2 + 3x - 1}{\sqrt{x^2 + x}} dx = 2x\sqrt{x^2 + x} - \int \frac{1}{\sqrt{x^2 + x}} dx$$

La integral

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 + x}} dx$$

transformando el radicando

$$x^2 + x = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}$$

por tanto

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 + x}} dx = \int \frac{1}{\sqrt{\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}}} dx$$

Hacemos el cambio

$$\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} \operatorname{Ch}^2 t \iff \left(x + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \operatorname{Ch} t \implies dx = \frac{1}{2} \operatorname{Sh} t dt$$

y por tanto

$$\int \frac{1}{\sqrt{\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}}} dx = \int \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{4} \operatorname{Ch}^2 t - \frac{1}{4}}} \frac{1}{2} \operatorname{Sh} t dt = \int dt = t = \ln \left(2x + 1 + \sqrt{(2x + 1)^2 - 1} \right)$$

De modo que la integral es

$$\int \frac{4x^2 + 3x - 1}{\sqrt{x^2 + x}} dx = 2x\sqrt{x^2 + x} - \ln \left(2x + 1 + \sqrt{(2x + 1)^2 - 1} \right)$$

f) Usando el método Alemán

$$\int \frac{4x^2 - x - 7}{\sqrt{x^2 - x - 4}} = P_1(x) \sqrt{x^2 - x - 4} + \int \frac{L}{\sqrt{x^2 - x - 4}} dx$$

como el numerador de la integral es un polinomio de grado 2, el polinomio $P_1(x)$ debe ser un polinomio de grado 1, por tanto

$$\int \frac{4x^2 - x - 7}{\sqrt{x^2 - x - 4}} dx = (Ax + B) \sqrt{x^2 - x - 4} + \int \frac{L}{\sqrt{x^2 - x - 4}} dx$$

Derivando la expresión anterior obtendremos los coeficientes A, B y L

$$\begin{aligned} \frac{4x^2 - x - 7}{\sqrt{x^2 - x - 4}} &= A\sqrt{x^2 - x - 4} + (Ax + B) \frac{x - \frac{1}{2}}{\sqrt{x^2 - x - 4}} + \frac{L}{\sqrt{x^2 - x - 4}} \\ &= \frac{A(x^2 - x - 4) + (Ax + B)(x - \frac{1}{2}) + L}{\sqrt{x^2 - x - 4}} \\ &= \frac{2Ax^2 + x(B - \frac{3}{2}A) + L - \frac{1}{2}B - 4A}{\sqrt{x^2 - x - 4}} \end{aligned}$$

e igualando coeficientes

$$\left. \begin{aligned} 4 &= 2A \\ -1 &= B - \frac{3}{2}A \\ -7 &= L - \frac{1}{2}B - 4A \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} A &= 2 \\ B &= 2 \\ L &= 2 \end{aligned} \right\}$$

por tanto

$$\int \frac{4x^2 - x - 7}{\sqrt{x^2 - x - 4}} dx = 2(x + 1) \sqrt{x^2 - x - 4} + \int \frac{2}{\sqrt{x^2 - x - 4}} dx$$

La integral

$$\int \frac{2}{\sqrt{x^2 - x - 4}} dx$$

transformando el radicando

$$x^2 - x - 4 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{17}{4}$$

por tanto

$$\int \frac{2}{\sqrt{x^2 - x - 4}} dx = \int \frac{2}{\sqrt{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{17}{4}}} dx$$

Hacemos el cambio

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{17}{4} \operatorname{Ch}^2 t \iff \left(x - \frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{17}}{2} \operatorname{Ch} t \implies dx = \frac{\sqrt{17}}{2} \operatorname{Sh} t dt$$

y por tanto

$$\int \frac{2}{\sqrt{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{17}{4}}} dx = \int \frac{2}{\sqrt{\frac{17}{4} \operatorname{Ch}^2 t - \frac{17}{4}}} \frac{\sqrt{17}}{2} \operatorname{Sh} t dt = \int 2 dt = 2t = 2 \ln \left(2x + 1 + \sqrt{(2x + 1)^2 - 1} \right)$$

De modo que la integral es

$$\int \frac{4x^2 - x - 7}{\sqrt{x^2 - x - 4}} dx = 2(x + 1) \sqrt{x^2 - x - 4} + \ln \left(\frac{2x - 1}{\sqrt{17}} + \sqrt{\frac{(2x - 1)^2}{17} - 1} \right).$$

9. Calcula las siguientes integrales binomiales

$$(a) \int \frac{1}{x^3 \sqrt[3]{x^3+1}} dx \quad (b) \int \frac{x^2}{\sqrt[3]{(2+x)^2}} dx \quad (c) \int \sqrt{\frac{1+2x^{-1}}{x}} dx$$

$$(d) \int \frac{\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[6]{2+x^{-2}}} dx \quad (e) \int \frac{\sqrt{x}}{2+\sqrt{x}} dx \quad (f) \int \frac{1}{x^{\frac{2}{3}} \sqrt{1+x^{-\frac{1}{3}}}} dx$$

a) Integral de tipo general

$$\int \frac{1}{x^3 \sqrt[3]{x^3+1}} dx = \int x^{-3} (1+x^3)^{-1/3} dx$$

hacemos el cambio

$$x^3 = t \Rightarrow x = t^{1/3} \Rightarrow dx = \frac{1}{3} t^{-2/3} dt$$

para transformarla en integral binómica de tipo I:

$$\int x^{-3} (1+x^3)^{-1/3} dx = \int t^{-1} (1+t)^{-1/3} \frac{1}{3} t^{-2/3} dt = \frac{1}{3} \int t^{-5/3} (1+t)^{-1/3} dt$$

En este caso la suma de exponentes

$$-\frac{5}{3} - \frac{1}{3} = -\frac{6}{3} = -2 \in \mathbb{Z}$$

si es un número entero, así que multiplicamos y dividimos por $t^\beta = t^{-1/3}$

$$\frac{1}{3} \int t^{-5/3} (1+t)^{-1/3} dt = \frac{1}{3} \int t^{-5/3} (1+t)^{-1/3} \frac{t^{-1/3}}{t^{-1/3}} dt$$

y reagrupamos

$$\frac{1}{3} \int t^{-2} \left(\frac{1+t}{t} \right)^{-1/3} dt$$

finalmente hacemos el cambio

$$\frac{1+t}{t} = u^3 \Rightarrow u = \sqrt[3]{\frac{1+t}{t}}$$

$$1+t = tu^3 \Rightarrow 1 = t(u^3 - 1) \Rightarrow t = \frac{1}{u^3 - 1} \Rightarrow dt = \frac{-3u^2}{(u^3 - 1)^2} du$$

con lo que la integral se transforma en

$$\begin{aligned} \frac{1}{3} \int t^{-2} \left(\frac{1+t}{t} \right)^{-1/3} dt &= \frac{1}{3} \int \left(\frac{1}{u^3 - 1} \right)^{-2} (u^3)^{-1/3} \left(\frac{-3u^2}{(u^3 - 1)^2} \right) du \\ &= \frac{1}{3} \int (u^3 - 1)^2 u^{-1} \left(\frac{-3u^2}{(u^3 - 1)^2} \right) du \\ &= - \int u du = -\frac{u^2}{2} \end{aligned}$$

deshaciendo el segundo cambio

$$-\frac{\left(\sqrt[3]{\frac{1+t}{t}} \right)^2}{2} = -\frac{1}{2} \left(\frac{1+t}{t} \right)^{2/3}$$

y finalmente el primero $x^3 = t$

$$\int \frac{1}{x^3 \sqrt[3]{x^3+1}} dx = -\frac{1}{2} \left(\frac{1+x^3}{x^3} \right)^{2/3} + C = -\frac{1}{2} \frac{(1+x^3)^{2/3}}{x^2} + C$$

b) Integral de tipo general

$$\int \frac{x^2}{\sqrt[3]{(2+x)^2}} dx = \int x^2 (2+x)^{-2/3} dx$$

hacemos el cambio

$$x = 2t \Rightarrow t = \frac{1}{2}x \Rightarrow dx = 2dt$$

para transformarla en integral binómica de tipo I:

$$\int x^2 (2+x)^{-2/3} dx = \int 4t^2 (2+2t)^{-2/3} 2dt = \int 4t^2 (1+t)^{-2/3} 2dt = 2^{7/3} \int t^2 (1+t)^{-2/3} dt$$

En este caso, el exponente de t es un número entero, por tanto, hacemos el cambio

$$1+t = u^3 \Rightarrow t = u^3 - 1$$

donde el exponente es el denominador de la potencia no entera de $(1+t)$

En este caso

$$dt = 3u^2 du$$

de forma que

$$\begin{aligned} 2^{7/3} \int t^2 (1+t)^{-2/3} dt &= 2^{7/3} \int (u^3 - 1)^2 (u^3)^{-2/3} 3u^2 du = 2^{7/3} \int 3(u^3 - 1)^2 du \\ &= 2^{7/3} \int 3(u^6 - 2u^3 + 1) du \\ &= 2^{7/3} \left(\frac{3}{7} u^7 - \frac{3}{2} u^4 + 3u \right) \end{aligned}$$

deshaciendo el segundo cambio

$$u = (1+t)^{1/3} \Rightarrow 2^{7/3} \left(\frac{3}{7} \left((1+t)^{1/3} \right)^7 - \frac{3}{2} \left((1+t)^{1/3} \right)^4 + 3 \left((1+t)^{1/3} \right) \right)$$

y finalmente el primero $t = \frac{x}{2}$

$$\begin{aligned} \int x^2 (2+x)^{-2/3} dx &= 2^{7/3} \left(\frac{3}{7} \left((1+t)^{1/3} \right)^7 - \frac{3}{2} \left((1+t)^{1/3} \right)^4 + 3 \left((1+t)^{1/3} \right) \right) \\ &= 2^{7/3} \left(\frac{3}{7} \left(1 + \frac{x}{2} \right)^{7/3} - \frac{3}{2} \left(1 + \frac{x}{2} \right)^{4/3} + 3 \left(1 + \frac{x}{2} \right)^{1/3} \right) \\ &= 2^{7/3} \left(\frac{3}{7} \frac{(x+2)^{7/3}}{2^{7/3}} - \frac{3}{2^{7/3}} (x+2)^{4/3} + \frac{3}{2^{1/3}} (x+2)^{1/3} \right) \\ &= \frac{3}{7} (x+2)^{7/3} - 3(x+2)^{4/3} + 12(x+2)^{1/3} \end{aligned}$$

c) Integral de tipo general

$$\int \sqrt{\frac{1+2x^{-1}}{x}} dx = \int x^{-1/2} (1+2x^{-1})^{1/2} dx$$

hacemos el cambio

$$2x^{-1} = t \Rightarrow x = 2t^{-1} \Rightarrow dx = -2t^{-2} dt$$

para transformarla en integral binómica de tipo I:

$$\begin{aligned} \int x^{-1/2} (1 + 2x^{-1})^{1/2} dx &= \int (2t^{-1})^{-1/2} (1+t)^{1/2} (-2t^{-2}) dt \\ &= \int 2^{-1/2} t^{1/2} (1+t)^{1/2} (-2t^{-2}) dt \\ &= -2^{1/2} \int t^{-3/2} (1+t)^{1/2} dt \end{aligned}$$

En este caso la suma de exponentes

$$-\frac{3}{2} + \frac{1}{2} = -\frac{2}{2} = -1 \in \mathbb{Z}$$

si es un número entero, así que multiplicamos y dividimos por $t^\beta = t^{1/2}$

$$-2^{1/2} \int t^{-3/2} (1+t)^{1/2} dt = -2^{1/2} \int t^{-3/2} (1+t)^{1/2} \frac{t^{1/2}}{t^{1/2}} dt$$

y reagrupamos

$$-2^{1/2} \int t^{-1} \left(\frac{1+t}{t} \right)^{1/2} dt$$

finalmente hacemos el cambio

$$\begin{aligned} \frac{1+t}{t} = u^2 &\Rightarrow u = \sqrt{\frac{1+t}{t}} \\ 1+t = tu^2 &\Rightarrow 1 = t(u^2 - 1) \Rightarrow t = \frac{1}{u^2 - 1} \Rightarrow dt = \frac{-2u}{(u^2 - 1)^2} du \end{aligned}$$

con lo que la integral se transforma en

$$\begin{aligned} -2^{1/2} \int t^{-1} \left(\frac{1+t}{t} \right)^{1/2} dt &= -2^{1/2} \int \left(\frac{1}{u^2 - 1} \right)^{-1} (u^2)^{1/2} \left(\frac{-2u}{(u^2 - 1)^2} \right) du \\ &= 2^{3/2} \int (u^2 - 1) u^2 \left(\frac{1}{(u^2 - 1)^2} \right) du \\ &= 2^{3/2} \int \frac{u^2}{u^2 - 1} du = 2^{3/2} \int \left(1 + \frac{1}{u^2 - 1} \right) du \\ &= 2^{3/2} \int \frac{u^2}{u^2 - 1} du = 2^{3/2} \left(\int du + \int \frac{1}{u^2 - 1} du \right) \\ &= 2^{3/2} \left(\int du + \int \frac{\frac{1}{2}}{u - 1} du + \int \frac{-\frac{1}{2}}{u + 1} du \right) \\ &= 2^{3/2} \left(u + \frac{1}{2} \ln(u - 1) - \frac{1}{2} \ln(u + 1) \right) \\ &= 2^{1/2} \left(2u + \ln \frac{u - 1}{u + 1} \right) \end{aligned}$$

deshaciendo el segundo cambio $u = \left(\frac{1+t}{t} \right)^{1/2}$

$$2^{1/2} \left(2u + \ln \frac{u - 1}{u + 1} \right) = 2^{1/2} \left(2 \left(\frac{1+t}{t} \right)^{1/2} + \ln \frac{\left(\frac{1+t}{t} \right)^{1/2} - 1}{\left(\frac{1+t}{t} \right)^{1/2} + 1} \right)$$

y ahora el primero $2x^{-1} = t$

$$\int \sqrt{\frac{1+2x^{-1}}{x}} dx = 2^{1/2} \left(2 \left(\frac{1+2x^{-1}}{2x^{-1}} \right)^{1/2} + \ln \frac{\left(\frac{1+2x^{-1}}{2x^{-1}} \right)^{1/2} - 1}{\left(\frac{1+2x^{-1}}{2x^{-1}} \right)^{1/2} + 1} \right) + C$$

Simplificando

$$\frac{1+2x^{-1}}{2x^{-1}} = \frac{x+2}{2}$$

$$\begin{aligned} \int \sqrt{\frac{1+2x^{-1}}{x}} dx &= 2^{1/2} \left(2 \left(\frac{x+2}{2} \right)^{1/2} + \ln \frac{\left(\frac{x+2}{2} \right)^{1/2} - 1}{\left(\frac{x+2}{2} \right)^{1/2} + 1} \right) + C \\ &= 2(x+2)^{1/2} + 2^{1/2} \ln \frac{(x+2)^{1/2} - 2^{1/2}}{(x+2)^{1/2} + 2^{1/2}} + C \end{aligned}$$

d) Integral de tipo general

$$\int \frac{\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[6]{2+x^{-2}}} dx = \int x^{2/3} (2+x^{-2})^{-1/6} dx$$

hacemos el cambio

$$x^{-2} = 2t \Rightarrow x = 2^{-1/2} t^{-1/2} \Rightarrow dx = -\frac{2^{-1/2}}{2} t^{-3/2} dt = -2^{-3/2} t^{-3/2} dt$$

para transformarla en integral binómica de tipo I:

$$\begin{aligned} \int x^{2/3} (2+x^2)^{-1/6} dx &= \int \left(2^{-1/2} t^{-1/2} \right)^{2/3} (2+2t)^{-1/6} \left(-2^{-3/2} t^{-3/2} \right) dt \\ &= - \int 2^{-1/3} t^{-1/3} 2^{-1/6} (1+t)^{-1/6} 2^{-3/2} t^{-3/2} dt \\ &= - \int 2^{-2} t^{-11/6} (1+t)^{-1/6} dt \end{aligned}$$

En este caso la suma de exponentes

$$-\frac{11}{6} - \frac{1}{6} = -\frac{12}{6} = -2 \in \mathbb{Z}$$

si es un número entero, así que multiplicamos y dividimos por $t^\beta = t^{-1/6}$

$$- \int 2^{-2} t^{-11/6} (1+t)^{-1/6} dt = - \int 2^{-2} t^{-11/6} (1+t)^{-1/6} \frac{t^{-1/6}}{t^{-1/6}} dt$$

y reagrupamos

$$-\frac{1}{4} \int t^{-2} \left(\frac{1+t}{t} \right)^{-1/6} dt$$

finalmente hacemos el cambio

$$\frac{1+t}{t} = u^6 \Rightarrow u = \sqrt[6]{\frac{1+t}{t}}$$

$$1+t = tu^6 \Rightarrow 1 = t(u^6 - 1) \Rightarrow t = \frac{1}{u^6 - 1} \Rightarrow dt = \frac{-6u^5}{(u^6 - 1)^2} du$$

con lo que la integral se transforma en

$$\begin{aligned}
 -\frac{1}{4} \int t^{-2} \left(\frac{1+t}{t}\right)^{-1/6} dt &= -\frac{1}{4} \int \left(\frac{1}{u^6-1}\right)^{-2} (u^6)^{-1/6} \left(\frac{-6u^5}{(u^6-1)^2}\right) du \\
 &= -\frac{1}{4} \int (u^6-1)^2 u^{-1} \left(\frac{-6u^5}{(u^6-1)^2}\right) du \\
 &= -\frac{1}{4} \int (u^6-1)^2 u^{-1} \left(\frac{-6u^5}{(u^6-1)^2}\right) du \\
 &= \frac{1}{4} \int 6u^4 du = \frac{6}{4} \frac{u^5}{5} = \frac{3}{10} u^5
 \end{aligned}$$

deshaciendo el segundo cambio $u = \left(\frac{1+t}{t}\right)^{1/6}$

$$\frac{3}{10} u^5 = \frac{3}{10} \left(\frac{1+t}{t}\right)^{5/6}$$

y ahora el primero $x^{-2} = 2t \Rightarrow t = \frac{1}{2x^2}$

$$\int x^{2/3} (2+x^2)^{-1/6} dx = \frac{3}{10} \left(\frac{1+\frac{1}{2x^2}}{\frac{1}{2x^2}}\right)^{5/6} + C$$

Simplificando

$$\begin{aligned}
 \frac{1+\frac{1}{2x^2}}{\frac{1}{2x^2}} &= 2x^2 + 1 \\
 \int x^{2/3} (2+x^2)^{-1/6} dx &= \frac{3}{10} (2x^2 + 1)^{5/6} + C.
 \end{aligned}$$

e) Integral de tipo general

$$\int \frac{\sqrt{x}}{2+\sqrt{x}} dx = \int x^{1/2} (2+x^{1/2})^{-1} dx$$

hacemos el cambio

$$x^{1/2} = 2t \Rightarrow x = 4t^2 \Rightarrow dx = 8t dt$$

para transformarla en integral binómica de tipo I:

$$\begin{aligned}
 \int x^{1/2} (2+x^{1/2})^{-1} dx &= \int (2t) (2+2t)^{-1} 8t dt \\
 &= 8 \int t^2 (1+t)^{-1} dt = 8 \int \frac{t^2}{1+t} dt \\
 &= 8 \int \left(t - 1 + \frac{1}{1+t}\right) dt \\
 &= 8 \left(\frac{t^2}{2} - t + \ln(1+t)\right)
 \end{aligned}$$

Deshaciendo el cambio $t = \frac{x^{1/2}}{2}$

$$\begin{aligned}
 \int x^{1/2} (2+x^{1/2})^{-1} dx &= 8 \left(\frac{x}{8} - \frac{x^{1/2}}{2} + \ln\left(1 + \frac{x^{1/2}}{2}\right)\right) + C \\
 &= x - 4\sqrt{x} + 8 \ln \frac{2+\sqrt{x}}{2} + C
 \end{aligned}$$

f) Integral de tipo general

$$\int \frac{1}{x^{\frac{2}{3}} \sqrt{1+x^{-\frac{1}{3}}}} dx = \int x^{-2/3} (1+x^{1/3})^{-\frac{1}{2}} dx$$

hacemos el cambio

$$x^{1/3} = t \Rightarrow x = t^3 \Rightarrow dx = 3t^2 dt$$

para transformarla en integral binómica de tipo I:

$$\begin{aligned} \int x^{-2/3} (1+x^{1/3})^{-\frac{1}{2}} dx &= \int (t^3)^{-2/3} (1+t)^{-\frac{1}{2}} 3t^2 dt \\ &= 3 \int (1+t)^{-\frac{1}{2}} dt \end{aligned}$$

Hacemos cambio

$$\begin{aligned} 1+t &= u^2 \Rightarrow dt = 2udu \\ 3 \int (u^2)^{-\frac{1}{2}} 2udu &= \int 6du = 6u \end{aligned}$$

y deshaciendo el 2º cambio

$$6u = 6\sqrt{1+t}$$

y ahora el primero

$$6\sqrt{1+t} = 6\sqrt{1+x^{1/3}}$$

luego

$$\int x^{-2/3} (1+x^{1/3})^{-\frac{1}{2}} dx = 6\sqrt{1+x^{1/3}} + C$$