

1. Expresa el siguiente límite como una integral definida adecuada y calcula su valor

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{(n+1)^2} + \frac{2}{(n+2)^2} + \dots + \frac{n}{(n+n)^2} \right)$$

Solución: Trataremos de expresar el límite como una suma de Riemann que, recordemos, tiene la forma

$$S_R = \sum_{k=1}^n f(\xi_k) (x_k - x_{k-1})$$

donde $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$. Tomaremos una partición con puntos equidistantes, es decir, $x_k - x_{k-1} = \frac{b-a}{n}$ para $k = 1, \dots, n$. Esta simplificación permite expresar la suma de Riemann como

$$S_R = \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n f(\xi_k)$$

Consideremos ahora el término del límite

$$\frac{1}{(n+1)^2} + \frac{2}{(n+2)^2} + \dots + \frac{n}{(n+n)^2} = \sum_{k=1}^n \frac{k}{(n+k)^2},$$

Si ahora sacamos n factor común en el denominador, podemos poner

$$\sum_{k=1}^n \frac{k}{(n+k)^2} = \sum_{k=1}^n \frac{k}{(n(1 + \frac{k}{n}))^2} = \sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2 (1 + \frac{k}{n})^2}$$

o tomando uno de los factores n del denominador y poniéndolo en el numerador

$$\sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2 (1 + \frac{k}{n})^2} = \sum_{k=1}^n \frac{\frac{k}{n}}{n (1 + \frac{k}{n})^2}$$

el otro factor no depende de k y puede salir factor común en la suma

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{\frac{k}{n}}{(1 + \frac{k}{n})^2}$$

y comparando con la expresión de la suma de Riemann, está claro que se trata del intervalo $[0, 1]$ que ha sido dividido en n partes y se ha tomado $\xi_k = \frac{k}{n}$, el extremo superior del intervalo, la función utilizada es

$$f(x) = \frac{x}{(1+x)^2}$$

Cuando $n \rightarrow \infty$, entonces la suma de Riemann se acerca al valor de la integral

$$\int_0^1 \frac{x}{(1+x)^2} dx$$

que es una integral racional que podemos resolver descomponiendo en fracciones simples, el denominador tiene una raíz real doble

$$\int_0^1 \frac{x}{(1+x)^2} dx = \int_0^1 \frac{1}{x+1} - \frac{1}{(x+1)^2} dx = \left[\ln(x+1) + \frac{1}{x+1} \right]_0^1 = \ln(2) - \frac{1}{2}.$$

2. Expresa el siguiente límite como una integral definida adecuada y calcula su valor

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{(n+1)^2} + \frac{n}{(n+2)^2} + \dots + \frac{n}{(n+n)^2} \right)$$

Solución: Se resuelve con el mismo mecanismo que el caso anterior

$$\frac{n}{(n+1)^2} + \frac{n}{(n+2)^2} + \dots + \frac{n}{(n+n)^2} = \sum_{k=1}^n \frac{n}{(n+k)^2},$$

Si ahora sacamos n factor común en el denominador, podemos poner

$$\sum_{k=1}^n \frac{n}{(n+k)^2} = \sum_{k=1}^n \frac{n}{\left(n \left(1 + \frac{k}{n}\right)\right)^2} = \sum_{k=1}^n \frac{n}{n^2 \left(1 + \frac{k}{n}\right)^2}$$

simplificamos un factor n

$$\sum_{k=1}^n \frac{n}{n^2 \left(1 + \frac{k}{n}\right)^2} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n \left(1 + \frac{k}{n}\right)^2} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{\left(1 + \frac{k}{n}\right)^2}$$

Por tanto la función utilizada es

$$f(x) = \frac{1}{(1+x)^2}$$

y el límite se puede calcular usando la integral definida

$$\int_0^1 \frac{1}{(1+x)^2} dx = \left[-\frac{1}{(1+x)} \right]_0^1 = \frac{1}{2}$$

3. Expresa el siguiente límite como una integral definida adecuada y calcula su valor

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^3+1} + \frac{2^2}{n^3+2^3} + \dots + \frac{n^2}{n^3+n^3} \right)$$

Solución: Como en los ejercicios previos, expresamos el límite como un sumatorio

$$\sum_{k=1}^n \frac{k^2}{n^3+k^3}$$

Sacando n^3 factor común en el denominador, el sumatorio se puede expresar como

$$\sum_{k=1}^n \frac{k^2}{n^3 \left(1 + \frac{k^3}{n^3}\right)}$$

subimos dos factores n al numerador

$$\sum_{k=1}^n \frac{\frac{k^2}{n^2}}{n \left(1 + \frac{k^3}{n^3}\right)}$$

y sacamos el factor n fuera del sumatorio

$$\frac{1}{n} \sum \frac{\frac{k^2}{n^2}}{1 + \frac{k^3}{n^3}}$$

y se deduce que la función es

$$f(x) = \frac{x^2}{1 + x^3}$$

y el límite se puede calcular con la integral definida

$$\int_0^1 \frac{x^2}{1 + x^3} dx = \frac{1}{3} \int_0^1 \frac{3x^2}{1 + x^3} dx = \left[\frac{1}{3} \ln(1 + x^3) \right]_0^1 = \frac{1}{3} \ln(2)$$

4. Expresa el siguiente límite como una integral definida adecuada y calcula su valor

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{4n+1} + \dots + \sqrt{4n+n}}{n^{3/2}}$$

Solución: Igual que en los problemas anteriores

$$\frac{\sqrt{4n+1} + \dots + \sqrt{4n+n}}{n^{3/2}} = \frac{\sqrt{4n+1}}{n^{3/2}} + \frac{\sqrt{4n+2}}{n^{3/2}} + \dots + \frac{\sqrt{4n+n}}{n^{3/2}} = \sum_{k=1}^n \frac{\sqrt{4n+k}}{n^{3/2}}$$

Por una parte

$$n^{3/2} = n \cdot n^{1/2}$$

por tanto

$$\sum_{k=1}^n \frac{\sqrt{4n+k}}{n \cdot n^{1/2}} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{\sqrt{4n+k}}{n^{1/2}}$$

incluimos el denominador dentro de la raíz

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sqrt{\frac{4n+k}{n}} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sqrt{\frac{4n}{n} + \frac{k}{n}} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sqrt{4 + \frac{k}{n}}$$

La función será en este caso

$$f(x) = \sqrt{4 + x}$$

y la integral definida

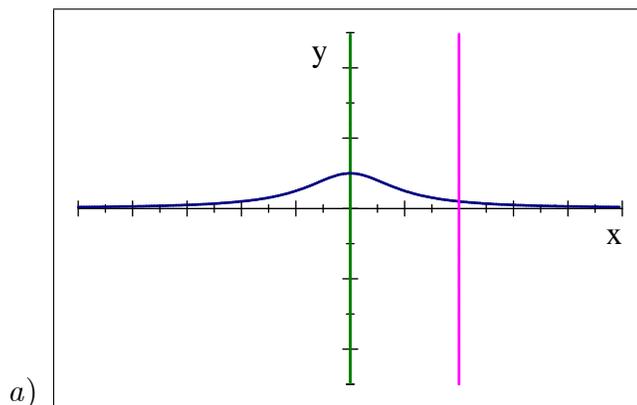
$$\begin{aligned} \int_0^1 \sqrt{4+x} dx &= \int_0^1 (4+x)^{1/2} dx = \left[\frac{(4+x)^{3/2}}{3/2} \right]_0^1 = \frac{(4+1)^{3/2}}{3/2} - \frac{(4+0)^{3/2}}{3/2} \\ &= \frac{2}{3} [5^{3/2} - 4^{3/2}] = \frac{2}{3} [\sqrt{125} - \sqrt{64}] = \frac{2}{3} [\sqrt{125} - 8] \end{aligned}$$

5. Sea la función

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

- Halla el área determinada por las rectas $x = 0$, $x = t > 0$, el eje OX y $f(x)$.
- Calcula el volumen obtenido al girar la región anterior alrededor de $y = 0$.
- ¿Cuáles son los valores correspondientes del área y del volumen anteriores si hacemos $t \rightarrow \infty$?

Solución:



$$F(t) = \int_0^t \frac{1}{1+x^2} dx = [\arctan x]_0^t = \arctan t$$

b) El volumen alrededor del eje OX

$$V_{OX} = \int_0^t \pi f(x)^2 dx = \pi \int_0^t \frac{1}{(1+x^2)^2} dx$$

Como son raíces complejas múltiples (i y $-i$), usaremos el método de Hermite para encontrar una primitiva

$$\frac{1}{(1+x^2)^2} = \frac{Ax+B}{1+x^2} + H'(x)$$

siendo el término de Hermite es

$$H(x) = \frac{Cx+D}{1+x^2} \Rightarrow H'(x) = \frac{C(1+x^2) - 2x(Cx+D)}{(1+x^2)^2} = \frac{-Cx^2 - 2Dx + C}{(1+x^2)^2}$$

es decir

$$\begin{aligned}\frac{1}{(1+x^2)^2} &= \frac{Ax+B}{1+x^2} + \frac{-Cx^2-2Dx+C}{(1+x^2)^2} \\ &= \frac{(Ax+B)(1+x^2) - Cx^2 - 2Dx + C}{(1+x^2)^2} \\ &= \frac{Ax^3 + x^2(B-C) + x(A-2D) + B+C}{(1+x^2)^2}\end{aligned}$$

e igualando numeradores

$$1 = Ax^3 + x^2(B-C) + x(A-2D) + B+C$$

entonces

$$\begin{aligned}A &= 0 \\ B-C &= 0 \\ A-2D &= 0 \\ B+C &= 1\end{aligned}$$

cuya solución es $A = D = 0$ y $B = C = \frac{1}{2}$. De modo que

$$\frac{1}{(1+x^2)^2} = \frac{\frac{1}{2}}{1+x^2} + \left(\frac{\frac{1}{2}x}{1+x^2}\right)'$$

e integrando término a término

$$\int \frac{1}{(1+x^2)^2} dx = \frac{1}{2} \int \frac{1}{1+x^2} + \frac{\frac{1}{2}x}{1+x^2} = \frac{1}{2} \arctan x + \frac{1}{2} \frac{x}{1+x^2}$$

y podemos calcular la integral definida

$$\int_0^t \frac{1}{(1+x^2)^2} dx = \left[\frac{1}{2} \arctan x + \frac{1}{2} \frac{x}{1+x^2} \right]_0^t = \frac{1}{2} \arctan t + \frac{1}{2} \frac{t}{1+t^2}$$

Siendo el volumen pedido

$$V_{OX} = \pi \left(\frac{1}{2} \arctan t + \frac{1}{2} \frac{t}{1+t^2} \right)$$

c) Si hacemos $t \rightarrow \infty$ en la expresión del área y del volumen:

$$\text{Área} \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} \arctan t = \frac{\pi}{2}$$

$$\text{Volumen} \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} \pi \left(\frac{1}{2} \arctan t + \frac{1}{2} \frac{t}{1+t^2} \right) = \frac{\pi^2}{4}$$

6. Calcula

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^{x^2} \operatorname{sen}(t^2) dt}{x^6}$$

Solución: Si calculamos directamente el límite teniendo en cuenta que $\int_a^a f(x) dx = 0$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^{x^2} \operatorname{sen}(t^2) dt}{x^6} = \frac{\int_0^0 \operatorname{sen}(t^2) dt}{0^6} = \frac{0}{0}$$

Luego podemos utilizar la Regla de L'Hôpital

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen}\left((x^2)^2\right) 2x}{6x^5} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x \operatorname{sen}(x^4)}{6x^5} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen}(x^4)}{3x^4}$$

En lugar de seguir utilizando la regla de L'Hôpital en este paso, utilizaremos infinitésimos equivalentes puesto que

$$\operatorname{sen} x \sim x \text{ cuando } x \rightarrow 0$$

podemos poner

$$\operatorname{sen} x^4 \sim x^4 \text{ cuando } x \rightarrow 0$$

de forma que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen}(x^4)}{3x^4} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4}{3x^4} = \frac{1}{3}.$$

7. Calcula

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_{x^2}^x \operatorname{sen}(t^2) dt}{x^2}$$

Solución: Si calculamos directamente el límite teniendo en cuenta que $\int_a^a f(x) dx = 0$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_{x^2}^x \operatorname{sen}(t^2) dt}{x^2} = \frac{\int_{0^2}^0 \operatorname{sen}(t^2) dt}{0^2} = \frac{0}{0}$$

Luego podemos utilizar la Regla de L'Hôpital

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen}(x^2) - \operatorname{sen}\left((x^2)^2\right) 2x}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen}(x^2) - 2x \operatorname{sen}(x^4)}{2x}$$

En lugar de seguir utilizando la regla de L'Hôpital en este paso, utilizaremos infinitésimos equivalentes puesto que

$$\operatorname{sen} x \sim x \text{ cuando } x \rightarrow 0$$

podemos poner

$$\operatorname{sen} x^2 \sim x^2 \text{ cuando } x \rightarrow 0$$

$$\operatorname{sen} x^4 \sim x^4 \text{ cuando } x \rightarrow 0$$

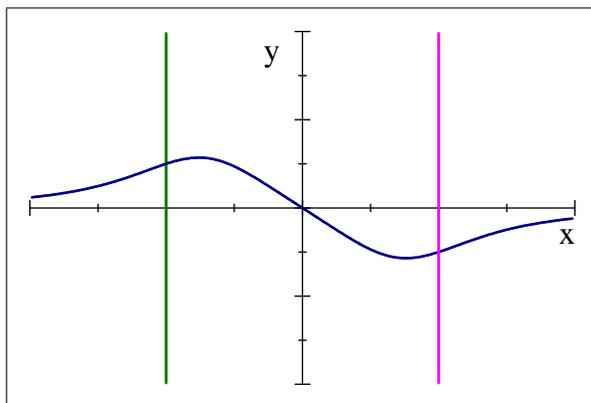
de forma que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen}(x^2) - 2x \operatorname{sen}(x^4)}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 2xx^4}{2x} = 0.$$

8. Calcula el área de la región plana comprendida entre el eje X , la gráfica de la función

$$f(x) = -\frac{x}{1+x^4}$$

y limitada lateralmente por las rectas $x = -1$ y $x = 1$.



Solución: El valor del área viene dado por

$$\int_{-1}^1 \left| \frac{-x}{1+x^4} \right| dx$$

y observando la gráfica (o le valor de la función en cada subintervalo) podemos poner

$$\int_{-1}^1 \left| \frac{-x}{1+x^4} \right| dx = \int_{-1}^0 \frac{-x}{1+x^4} dx + \int_0^1 \frac{x}{1+x^4} dx = -\int_{-1}^0 \frac{x}{1+x^4} dx + \int_0^1 \frac{x}{1+x^4} dx$$

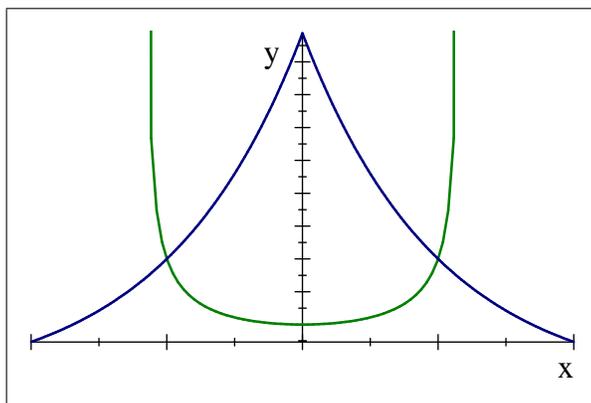
no obstante la gráfica es simétrica respecto al eje OY , podemos poner

$$\int_{-1}^1 \left| \frac{-x}{1+x^4} \right| dx = 2 \int_0^1 \frac{x}{1+x^4} dx$$

que puede reescribirse como

$$2 \int_0^1 \frac{x}{1+x^4} dx = \int_0^1 \frac{2x}{1+(x^2)^2} dx = [\arctan x^2]_0^1 = \frac{\pi}{4} - 0 = \frac{\pi}{4}.$$

9. Halla el área encerrada por las curvas $y = \frac{1}{\sqrt{4-3x^2}}$ e $y = e^{1-|x|}$, sabiendo que se cortan en $x = 1$ y $x = -1$.



Solución: El área entre las curvas viene dada por la expresión

$$A = \int_{-1}^1 |f(x) - g(x)| dx$$

donde $f(x) = e^{1-|x|}$ (color azul) y $g(x) = \frac{1}{\sqrt{4-3x^2}}$ (color verde). Teniendo en cuenta que la función $f(x)$ está en el intervalo de integración $[-1, 1]$ por encima de la curva $g(x)$ podemos quitar el valor absoluto y poner

$$A = \int_{-1}^1 |f(x) - g(x)| dx = \int_{-1}^1 \left(e^{1-|x|} - \frac{1}{\sqrt{4-3x^2}} \right) dx$$

y si ahora consideramos la definición de $g(x) = e^{1-|x|}$

$$g(x) = e^{1-|x|} = \begin{cases} e^{1-x} & x \geq 0 \\ e^{1+x} & x < 0 \end{cases}$$

la integral se podrá poner como

$$\int_{-1}^1 \left(e^{1-|x|} - \frac{1}{\sqrt{4-3x^2}} \right) dx = \int_{-1}^0 \left(e^{1+x} - \frac{1}{\sqrt{4-3x^2}} \right) dx + \int_0^1 \left(e^{1-x} - \frac{1}{\sqrt{4-3x^2}} \right) dx$$

También es posible, simetría respecto al eje OY, calcular sólo el área de la parte positiva, el área total será dos veces ese valor.

$$\int_0^1 \left(e^{1-x} - \frac{1}{\sqrt{4-3x^2}} \right) dx = \int_0^1 e^{1-x} dx - \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{4-3x^2}} dx$$

La primera integral se hace mediante el siguiente cambio de variable

$$3x^2 = 4 \operatorname{sen}^2 t \Rightarrow x^2 = \frac{4}{3} \operatorname{sen}^2 t$$

$$x = \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{sen} t$$

$$dx = \frac{2}{\sqrt{3}} \cos t dt$$

Los nuevos extremos de integración son

$$x = 0 \Rightarrow 0 = \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{sen} t \Rightarrow 0 = \operatorname{sen} t \Rightarrow t = 0$$

$$x = 1 \Rightarrow 1 = \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{sen} t \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \operatorname{sen} t \Rightarrow t = \frac{\pi}{3}$$

luego

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{4-3x^2}} dx &= \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\sqrt{4-4\operatorname{sen}^2 t}} \frac{2}{\sqrt{3}} \cos t dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\sqrt{3}} dt = \left[\frac{x}{\sqrt{3}} \right]_0^{\pi/3} = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}. \end{aligned}$$

La segunda integral es inmediata

$$\int_0^1 e^{1-x} dx = \int_0^1 e^{1-x} dx = [-e^{1-x}]_0^1 = e - 1$$

El área buscada es

$$A = 2 \left(\int_0^1 e^{1-x} dx - \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{4-3x^2}} dx \right) = 2 \left(e - 1 - \frac{\pi}{3\sqrt{3}} \right)$$

10. Sea la función

$$f(x) = \tan x; \quad x \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$$

- Calcula las primitivas de $f(x)$.
- Halla la longitud de la curva $y = F(x)$ para $x \in [0, \frac{\pi}{6}]$, siendo $F(x)$ una primitiva de $f(x)$.
- Estudia la convergencia de la integral impropia de segunda especie

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \tan x dx$$

Solución:

a)

$$\int \tan x dx = \int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} dx = -\ln \cos x = \ln \frac{1}{\cos x} = \ln \sec x + C$$

- b) Utilizando la fórmula correspondiente a curvas planas y teniendo en cuenta que $F'(x) = f(x)$, tendremos

$$L = \int_0^{\pi/6} \sqrt{1 + (F'(x))^2} dx = \int_0^{\pi/6} \sqrt{1 + \tan^2 x} dx$$

Ahora realizamos el cambio de variable

$$\tan x = u$$

$$(1 + \tan^2 x) dx = du \Rightarrow dx = \frac{1}{1 + \tan^2 x} du = \frac{1}{1 + u^2} du$$

y los extremos de integración serían

$$\text{Si } x = 0 \Rightarrow u = \tan 0 = 0$$

$$\text{Si } x = \frac{\pi}{6} \Rightarrow u = \tan \frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

y tendremos

$$\int_0^{\pi/6} \sqrt{1 + \tan^2 x} dx = \int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \sqrt{1 + u^2} \frac{1}{1 + u^2} du = \int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \frac{1}{\sqrt{1 + u^2}} du$$

Para resolver esta integral utilizamos otro cambio de variable

$$u = \text{Sh } t \Rightarrow du = \text{Ch } t dt$$

y los extremos de integración sería

$$\text{Si } u = 0 \Rightarrow 0 = \text{Sh } t \Rightarrow t = \arg \text{Sh } 0 = \ln \left(0 + \sqrt{1 + 0^2} \right) = 0$$

$$\text{Si } u = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{3}} = \text{Sh } t \Rightarrow t = \arg \text{Sh } \frac{1}{\sqrt{3}} = \ln \left(\frac{1}{\sqrt{3}} + \sqrt{1 + \frac{1}{3}} \right) = \frac{1}{2} \ln 3$$

en el último apartado se han utilizado las propiedades de la función \ln . La integral con este cambio queda como

$$\int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \frac{1}{\sqrt{1 + u^2}} du = \int_0^{\frac{1}{2} \ln 3} \frac{1}{\sqrt{1 + \text{Sh}^2 t}} \text{Ch } t dt = \int_0^{\frac{1}{2} \ln 3} dt = [t]_0^{\frac{1}{2} \ln 3} = \frac{1}{2} \ln 3.$$

c) La integral

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \tan x dx$$

es de segunda especie, puesto que en cada uno de los extremos, el integrando tiene una discontinuidad y toma valores $-\infty$ y ∞ respectivamente. Tendremos que calcular los siguientes límites

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \int_0^x \tan u du \text{ y } \lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}^+} \int_x^0 \tan u du$$

En el apartado a, hemos calculado las primitivas de $\tan x$, luego

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \int_0^x \tan u du = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \left[\ln \frac{1}{\cos u} \right]_0^x = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \ln \frac{1}{\cos x} = \infty$$

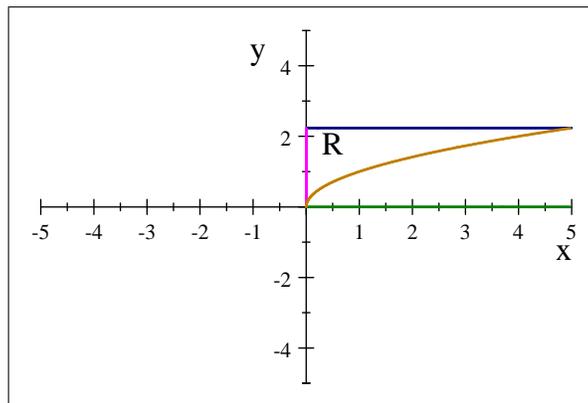
Ya no es necesario calcular la otra y por tanto la integral es divergente.

Si queremos calcular el Valor Principal, entonces hay que calcular el siguiente límite

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \int_{-x}^x \tan u du &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \left[\ln \frac{1}{\cos u} \right]_{-x}^x \\ &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \left[\ln \frac{1}{\cos x} - \ln \frac{1}{\cos(-x)} \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \left[\ln \frac{1}{\cos x} - \ln \frac{1}{\cos x} \right] \\ &= 0 \end{aligned}$$

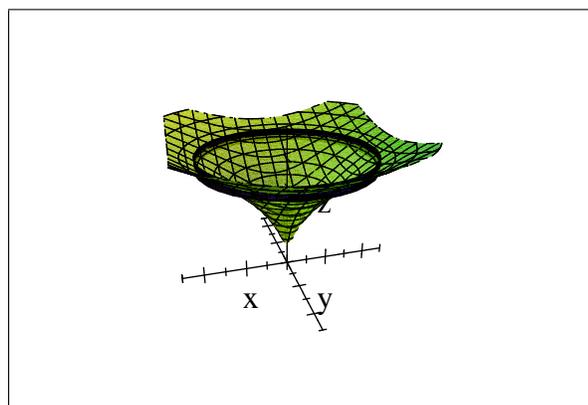
11. Sea R la región plana delimitada por las gráficas $y = 0$, $y = \sqrt{5}$, $x = 0$ y $x = y^2$. Determina el volumen del sólido generado al girar la región R alrededor del eje Y , mediante los dos siguientes métodos:
- Por secciones planas.
 - Como un sólido de revolución

Solución: En la siguiente gráfica observamos la región R



- a) Como en este caso se realiza la rotación alrededor del eje OY , tendremos que utilizar la fórmula del Volumen por secciones planas usando una función de y , es decir:

$$V = \int A(y) dy$$



Viendo la gráfica de la función está claro que $0 \leq y \leq \sqrt{5}$, luego estos son los extremos de la integral. En cada valor de y la sección plana (corte) de la gráfica en 3D es una circunferencia de centro el punto correspondiente en el eje OY y radio dado por el valor de la x , es decir $x = y^2$. El área de un círculo de radio $x = y^2$ es

$$A(x) = \pi x^2$$

es decir

$$A(y) = \pi (y^2)^2 = \pi y^4$$

y el volumen obtenido mediante este método es

$$V = \int_0^{\sqrt{5}} \pi y^4 dy = \left[\pi \frac{y^5}{5} \right]_0^{\sqrt{5}} = \pi \frac{\sqrt{5}^5}{5} = \pi 5^{3/2}$$

- b) La fórmula que nos da el volumen de un sólido de revolución al girar el área bajo la curva alrededor del eje OY es

$$V_{OY} = 2\pi \int x f(x) dx$$

Sin embargo lo que queremos calcular es el volumen del sólido que engendra el área sobre la curva alrededor del eje OY , luego no podemos usar la fórmula directamente. Sin embargo el volumen buscado se puede obtener al restar al cilindro engendrado por la curva $y = \sqrt{5}$ alrededor del eje OY , el volumen engendrado por el área bajo la curva, es decir

$$V = V_{CIL} - V_{OY}$$

siendo V_{CIL} el volumen del cilindro de radio $r = 5$ (la x) y altura $h = \sqrt{5}$ (la y)

$$V_{CIL} = \pi r^2 h = \pi 5^2 \sqrt{5} = \pi 5^{5/2}$$

y el volumen del sólido engendrado por el área bajo la curva $x = y^2$ será

$$V_{OY} = 2\pi \int_0^5 xy dx = 2\pi \int_0^5 x \sqrt{x} dx = 2\pi \int_0^5 x^{3/2} dx = \left[2\pi \frac{x^{5/2}}{5/2} \right]_0^5 = 4\pi \frac{5^{5/2}}{5}$$

y el volumen buscado es

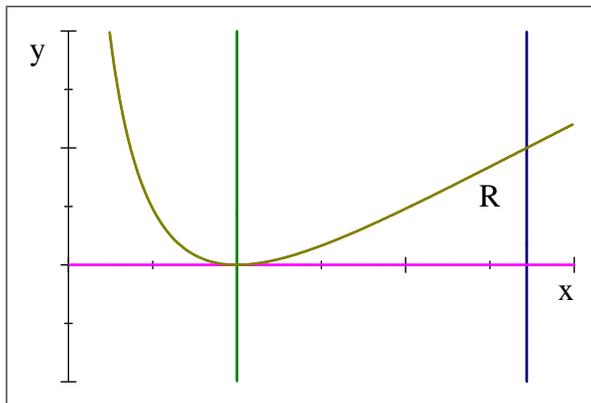
$$V = V_{CIL} - V_{OY} = \pi 5^{5/2} - 4\pi \frac{5^{5/2}}{5} = \pi 5^{5/2} \left(1 - \frac{4}{5} \right) = \pi 5^{5/2} \frac{1}{5} = \pi 5^{3/2}$$

como en el apartado anterior.

12. Sea R la región plana delimitada por la gráfica de la función $f(x) = (\ln x)^2$, el eje X y las rectas verticales $x = 1, x = e$. Se pide:

- Calcula el área de R .
- Calcula el volumen del sólido obtenido al girar R alrededor del eje Y .

Solución: La región R está representada en la siguiente gráfica:



a) El área de R es el área bajo la curva $f(x)$ entre los valores 1 y e

$$A = \int_1^e (\ln x)^2 dx$$

Podemos encontrar una primitiva del integrando, haciendo el cambio de variable

$$\ln(x) = t \Rightarrow x = e^t$$

$$\frac{1}{x} dx = dt \Rightarrow dx = x dt = e^t dt$$

Los extremos de integración son

$$x = 1 \Rightarrow \ln(1) = t \Rightarrow t = 0$$

$$x = e \Rightarrow \ln(e) = t \Rightarrow t = 1$$

por tanto

$$\int_1^e (\ln x)^2 dx = \int_0^1 t^2 e^t dt$$

que resolvemos usando integración por partes dos veces. Tomamos primero $u = t^2$ y $v' = e^t$, por lo que $u' = 2t$ y $v = e^t$

$$\int t^2 e^t dt = t^2 e^t - \int 2te^t dt$$

y en segundo lugar $u = 2t$ y $v' = e^t$, de ahí que $u' = 2$ y $v = e^t$

$$\begin{aligned} \int t^2 e^t du &= t^2 e^t - \int 2te^t dt = t^2 e^t - \left(2te^t - \int 2e^t dt \right) \\ &= t^2 e^t - 2te^t + 2e^t = e^t (t^2 - 2t + 2) \end{aligned}$$

y usando Barrow

$$\begin{aligned} \int_0^1 t^2 e^t du &= [e^t (t^2 - 2t + 2)]_0^1 = [e(1^2 - 2 + 2)] - [e^0(0^2 - 2 \cdot 0 + 2)] \\ &= e - 2 \end{aligned}$$

b) El volumen del sólido que se obtiene al girar el área bajo la curva alrededor de OY , viene dado por

$$V_{OY} = 2\pi \int_1^e x f(x) dx = 2\pi \int_1^e x (\ln(x)^2) dx$$

integral que se calcula, primero haciendo el mismo cambio que el apartado anterior para obtener

$$V_{OY} = \int_0^1 t^2 e^{2t} dt$$

y si ahora cambiamos $2t = s$ con $dt = \frac{1}{2}ds$ y con extremos de integración 0 y 2 respectivamente

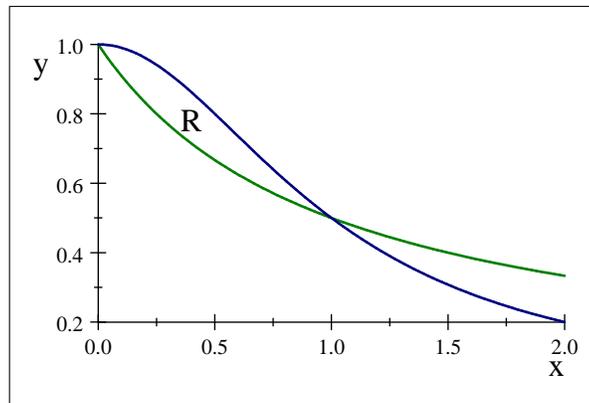
$$\int_0^2 \left(\frac{s}{2}\right)^2 e^s \frac{1}{2} ds = \frac{1}{8} \int_0^2 s^2 e^s ds$$

La función del integrando es la del apartado anterior después del cambio, sólo cambian los extremos,

$$\begin{aligned} \frac{1}{8} \int_0^2 s^2 e^s ds &= \frac{1}{8} [s^2 e^s - 2s e^s + 2e^s]_0^2 \\ &= \frac{1}{8} ([4e^2 - 4e^2 + 2e^2] - [2]) \\ &= \frac{e^2}{4} - \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

13. Calcula, en el primer cuadrante, el área comprendida entre las gráficas de las funciones

$$f(x) = \frac{1}{1+x} \text{ y } g(x) = \frac{1}{1+x^2}$$



Solución: Veamos los puntos de corte

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow \frac{1}{1+x} = \frac{1}{1+x^2} \Leftrightarrow 1+x = 1+x^2 \Leftrightarrow x = x^2 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \end{cases}$$

Luego el área buscada es

$$A = \int_0^1 |f(x) - g(x)| dx$$

Tenemos

$$x \in [0, 1] \Rightarrow 0 \leq x \leq 1 \Rightarrow 0 \leq x^2 \leq x \Rightarrow 1 \leq 1+x^2 \leq 1+x$$

y tomando inversos

$$\frac{1}{1+x^2} \geq \frac{1}{1+x}$$

luego en $[0, 1]$ ocurre

$$g(x) \geq f(x)$$

y el área sería

$$\begin{aligned} A &= \int_0^1 g(x) - f(x) dx = \int_0^1 \left(\frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+x} \right) dx = [\arctan x - \ln(1+x)]_0^1 \\ &= [\arctan 1 - \ln(2)] - [\arctan 0 - \ln 1] = \frac{\pi}{4} - \ln(2). \end{aligned}$$

14. Calcula el área de los dos recintos en que la región limitada por la elipse

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1,$$

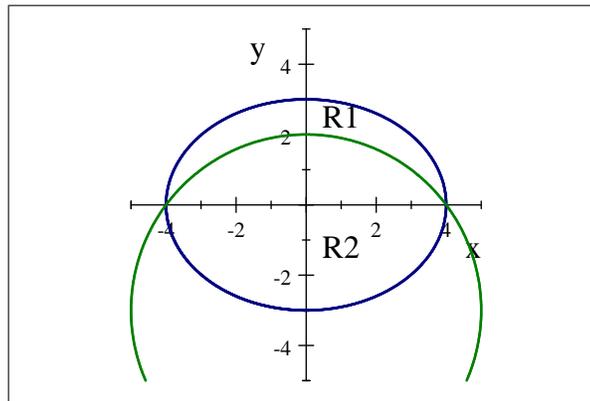
queda dividida mediante la circunferencia de centro $(0, -3)$ y radio 5.

Solución: La ecuación de la circunferencia es

$$x^2 + (y + 3)^2 = 5^2,$$

y en la siguiente gráfica podemos ver las dos regiones en estudio

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$$



Queremos conocer el área de las regiones $R1$ y $R2$ y para ello utilizaremos los puntos de corte de ambas cónicas como extremos de integración. Estos puntos de cortes se obtienen resolviendo el sistema no lineal

$$\begin{cases} \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1 \\ x^2 + (y + 3)^2 = 25 \end{cases}$$

Despejando x^2 de la segunda ecuación y sustituyendo en la primera

$$x^2 = 25 - (y + 3)^2 \Rightarrow \frac{25 - (y + 3)^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$$

Quitando denominadores y agrupando términos obtenemos

$$7y^2 - 54y = 0 \Rightarrow y(7y - 54) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ y = \frac{54}{7} \end{cases}$$

Y los valores para x serán

$$y = 0 \Rightarrow x^2 = 25 - 3^2 = 16 \Rightarrow x = \pm 4$$

$$y = \frac{54}{7} \Rightarrow x^2 = 25 - \left(\frac{54}{7} + 3\right)^2 = -\frac{4400}{49} \Rightarrow x \text{ no es real, así que no sirve}$$

Los puntos de corte son $(-4, 0)$ y $(4, 0)$. Despejamos la variable y en ambas cónicas. Para la elipse

$$y = \pm 3\sqrt{1 - \frac{x^2}{16}}$$

y para la circunferencia

$$y = -3 \pm \sqrt{25 - x^2}$$

Para el área de $R1$ vemos que la elipse está por encima de la circunferencia y ambas en el semiplano positivo ($y > 0$) luego

$$A_{R1} = \int_{-4}^4 \left(3\sqrt{1 - \frac{x^2}{16}} - (-3 + \sqrt{25 - x^2}) \right) dx$$

Para el área de $R2$ vemos que la elipse está por debajo de la circunferencia y además en el semiplano negativo, luego

$$A_{R2} = \int_{-4}^4 \left(-3 + \sqrt{25 - x^2} - \left(-3\sqrt{1 - \frac{x^2}{16}}\right) \right) dx$$

Ambas integrales son del tipo

$$\int \sqrt{a^2 - x^2} dx$$

que se resuelven mediante el cambio de variable

$$\begin{aligned} x^2 &= a^2 \operatorname{sen}^2 t \Rightarrow x = a \operatorname{sen} t \\ t &= \operatorname{arcsen} \frac{x}{a} \\ dx &= a \cos t dt \end{aligned}$$

y

$$\int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \int \sqrt{a^2 - a^2 \operatorname{sen}^2 t} a \cos t dt = \int a^2 \cos^2 t dt = a^2 \int \frac{1 + \cos 2t}{2} dt = a^2 \left(\frac{1}{2}t + \frac{\operatorname{sen} 2t}{4} \right)$$

y deshaciendo el cambio de variable

$$\begin{aligned}\int \sqrt{a^2 - x^2} dx &= \frac{a^2}{2} \arcsen \frac{x}{a} + \frac{a^2}{4} 2 \operatorname{sen} t \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 t} \\ &= \frac{a^2}{2} \arcsen \frac{x}{a} + \frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2}\end{aligned}$$

Podemos usarla para las dos integrales. La correspondiente a la circunferencia con $a = 5$

$$\begin{aligned}\int_{-4}^4 \sqrt{25 - x^2} dx &= \left[\frac{25}{2} \arcsen \frac{x}{5} + \frac{x}{2} \sqrt{25 - x^2} \right]_{-4}^4 \\ &= \left[\frac{25}{2} \arcsen \frac{4}{5} + \frac{12}{2} \right] - \left[\frac{25}{2} \arcsen \frac{-4}{5} - \frac{12}{2} \right] \\ &= 25 \arcsen \frac{4}{5} + 12\end{aligned}$$

Mientras que para la integral que lleva la ecuación de la elipse el valor de $a = 4$

$$\begin{aligned}\int_{-4}^4 \sqrt{1 - \frac{x^2}{16}} dx &= \frac{1}{4} \int_{-4}^4 \sqrt{16 - x^2} dx = \frac{1}{4} \left[8 \arcsen \frac{x}{4} + \frac{x}{2} \sqrt{16 - x^2} \right]_{-4}^4 \\ &= \frac{1}{4} [8 \arcsen 1] - \frac{1}{4} [8 \arcsen -1] \\ &= 2\pi\end{aligned}$$

y ya podemos calcular las dos regiones

$$\begin{aligned}A_{R1} &= \int_{-4}^4 \left(3\sqrt{1 - \frac{x^2}{16}} \right) - \left(-3 + \sqrt{25 - x^2} \right) dx \\ &= 3 \int_{-4}^4 \sqrt{1 - \frac{x^2}{16}} dx + \int_{-4}^4 3 dx - \int_{-4}^4 \sqrt{25 - x^2} dx \\ &= 3 \cdot 2\pi + 24 - \left(25 \arcsen \frac{4}{5} + 12 \right) \\ &= 6\pi + 12 - 25 \arcsen \frac{4}{5}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_{R2} &= \int_{-4}^4 \left(-3 + \sqrt{25 - x^2} \right) - \left(-3\sqrt{1 - \frac{x^2}{16}} \right) dx \\
&= - \int_{-4}^4 3dx + \int_{-4}^4 \sqrt{25 - x^2} dx + 3 \int_{-4}^4 \sqrt{1 - \frac{x^2}{16}} dx \\
&= -24 + \left(25 \operatorname{arcsen} \frac{4}{5} + 12 \right) + 3 \cdot 2\pi \\
&= 6\pi + 25 \operatorname{arcsen} \frac{4}{5} - 12
\end{aligned}$$

También podíamos calcular el área A_{R2} a partir del área de una elipse de semiejes a y b , que es πab y restarle el área encontrada para A_{R1} , es decir $A_{R1} + A_{R2} = \pi ab$, lo comprobamos a continuación

$$\begin{aligned}
A_{R1} + A_{R2} &= \left(6\pi + 12 - 25 \operatorname{arcsen} \frac{4}{5} \right) + \left(6\pi + 25 \operatorname{arcsen} \frac{4}{5} - 12 \right) \\
&= 12\pi = \pi \cdot 4 \cdot 3
\end{aligned}$$

15. Sea $a > 0$. Calcula las siguientes integrales impropias:

$$\begin{array}{lll}
\text{(a)} \int_0^\infty e^{-ax} \cos x \, dx & \text{(b)} \int_0^\infty e^{-ar} r^n \, dr & \text{(c)} \int_{-\infty}^{+\infty} x e^{-x^2} \, dx \\
\text{(d)} \int_e^\infty \frac{dx}{x \log x} & \text{(e)} \int_e^\infty \frac{dx}{x \log^2 x} & \text{(f)} \int_0^\infty x^2 e^{-2x} \, dx
\end{array}$$

Solución: Buscaremos en cada caso una primitiva de la función y después se calcularán los límites correspondientes.

a) Recordemos que

$$\int_0^\infty e^{-ax} \cos x \, dx = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T e^{-ax} \cos x \, dx.$$

Para calcular la integral usamos integración por partes

$$\int_0^T e^{-ax} \cos x \, dx = \frac{e^{-ax} (\sin(x) - a \cos(x))}{a^2 + 1} \Big|_0^T = \frac{e^{-aT} (\sin(T) - a \cos(T))}{a^2 + 1} + \frac{a}{a^2 + 1}$$

y tomando límites cuando $T \rightarrow \infty$

$$\int_0^\infty e^{-ax} \cos x \, dx = \lim_{T \rightarrow \infty} \left(\frac{e^{-aT} (\sin(T) - a \cos(T))}{a^2 + 1} + \frac{a}{a^2 + 1} \right) = \frac{a}{a^2 + 1}$$

donde se ha tenido en cuenta que $a > 0$ y por tanto $e^{-aT} = \frac{1}{e^{aT}} \rightarrow 0$ y la función $(\sin(T) - a \cos(T))$ está acotada por $1 + a$

$$|\sin(T) - a \cos(T)| \leq |\sin(T)| + |a \cos(T)| = |\sin(T)| + a |\cos(T)| \leq 1 + a.$$

b)

$$\int_0^{\infty} e^{-ar} r^n dr = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T e^{-ar} r^n dr.$$

Calcularemos la integral de forma recursiva. Para $n \in \mathbb{N}$, consideremos la función

$$I_n(a, T) = \int_0^T e^{-ar} r^n dr,$$

y definimos

$$I_n(a) = \lim_{T \rightarrow \infty} I_n(a, T).$$

Suponiendo $n > 0$, integramos por partes tomando $u = r^n$ y $dv = e^{-ar} dr$, por tanto $du = nr^{n-1}$ y $v = -\frac{1}{a}e^{-ar}$

$$I_n(a, T) = -\frac{1}{a}r^n e^{-ar} \Big|_{r=0}^{r=T} + \frac{n}{a} \int_0^T e^{-ar} r^{n-1} dr = -\frac{T^n}{a} e^{-aT} + \frac{n}{a} \int_0^T e^{-ar} r^{n-1} dr,$$

y hemos comprobado que

$$I_n(a, T) = \frac{n}{a} I_{n-1}(a, T) - \frac{1}{a} T^n e^{-aT}.$$

Si ahora tomamos límites cuando $T \rightarrow \infty$

$$I_n(a) = \lim_{T \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{a} I_{n-1}(a, T) - \frac{1}{a} T^n e^{-aT} \right) = \frac{n}{a} I_{n-1}(a)$$

puesto que, usando L'Hôpital n veces, podemos comprobar que

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{a} T^n e^{-aT} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{a} \frac{T^n}{e^{aT}} = 0$$

Si repetimos el proceso para $n-1, n-2, \dots, 1$ tendremos

$$\begin{aligned} I_{n-1}(a) &= \frac{(n-1)}{a} I_{n-2}(a), \\ I_{n-2}(a) &= \frac{(n-2)}{a} I_{n-3}(a), \\ &\vdots \\ I_2(a) &= \frac{2}{a} I_1(a) \\ I_1(a) &= \frac{1}{a} I_0(a). \end{aligned}$$

donde

$$I_0(a) = \int_0^{\infty} e^{-ar} dr = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T e^{-ar} dr = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{a} (1 - e^{-aT}) = \frac{1}{a}$$

Y podemos calcular el resto de integrales de forma recursiva

$$\begin{aligned}
 I_1(a) &= \frac{1}{a} I_0(a) = \frac{1}{a^2} \\
 I_2(a) &= \frac{2}{a} I_1(a) = \frac{2}{a^3} \\
 I_3(a) &= \frac{3}{a} I_2(a) = \frac{3 \cdot 2}{a^4} \\
 &\vdots \\
 I_n(a) &= \frac{n}{a} I_{n-1}(a) = \frac{n!}{a^{n+1}}
 \end{aligned}$$

luego

$$I_n(a) = \int_0^\infty e^{-ar} r^n dr = \frac{n!}{a^{n+1}}$$

c) Usando integración por partes

$$\int_{-\infty}^0 x e^{-x^2} dx = \lim_{T \rightarrow -\infty} \int_T^0 x e^{-x^2} dx = \lim_{T \rightarrow -\infty} \left. -\frac{1}{2} e^{-x^2} \right|_{x=T}^{x=0} = \lim_{T \rightarrow -\infty} \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2} e^{-T^2} \right) = -\frac{1}{2},$$

$$\int_0^\infty x e^{-x^2} dx = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T x e^{-x^2} dx = \lim_{T \rightarrow \infty} \left. -\frac{1}{2} e^{-x^2} \right|_{x=0}^{x=T} = \lim_{T \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{2} e^{-T^2} + 1 \right) = \frac{1}{2},$$

luego

$$\int_{-\infty}^\infty x e^{-x^2} dx = \left(-\frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} \right) = 0.$$

d) Calculamos

$$\begin{aligned}
 \int_e^\infty \frac{1}{x \log x} dx &= \lim_{T \rightarrow \infty} \int_e^T \frac{1}{x \log x} dx = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_e^T \frac{\frac{1}{x}}{\log x} dx = \lim_{T \rightarrow \infty} \log(\log(x)) \Big|_{x=e}^{x=T} \\
 &= \lim_{T \rightarrow \infty} \log(\log(T)) - \log(\log(e)) = \lim_{T \rightarrow \infty} \log(\log(T)) = \infty
 \end{aligned}$$

e) Calculamos

$$\begin{aligned}
 \int_e^\infty \frac{1}{x \log^2 x} dx &= \lim_{T \rightarrow \infty} \int_e^T \frac{1}{x \log^2 x} dx = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_e^T (\log x)^{-2} \frac{1}{x} dx \\
 &= \lim_{T \rightarrow \infty} \left. -\frac{1}{\log(x)} \right|_{x=e}^{x=T} = \lim_{T \rightarrow \infty} -\frac{1}{\log(T)} + 1 = 1
 \end{aligned}$$

f) Notar que esta integral es la del apartado b tomando $a = 2$ y como variable de integración x , luego como $I_n(a) = \frac{n!}{a^{n+1}}$

$$\int_0^\infty x^2 e^{-2x} dx = I_2(2) = \frac{2!}{2^3} = \frac{1}{4}$$

16. **Derivación paramétrica de integrales.** Calcula las siguientes derivadas:

$$\begin{array}{lll}
 \text{(a)} \frac{d}{dx} \int_{2x}^{x^3} \cos t \, dt & \text{(b)} \frac{d}{dx} \int_{2x}^{3x} \frac{1}{t} \, dt & \text{(c)} \frac{d}{d\alpha} \int_0^\infty e^{-\alpha x} \, dx \\
 \text{(d)} \frac{d}{dx} \int_0^2 t^n \, dt & \text{(e)} \frac{d}{dx} \int_0^2 x^n \, dt & \text{(f)} \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{x} \int_0^x v(t) \, dt \right) \\
 \text{(g)} \frac{d}{dx} \int_0^x \left(\int_0^t v(s) \, ds \right) \, dt & \text{(h)} \frac{d}{dx} \left(\int_0^x v(t) \, dt + \int_x^1 v(t) \, dt \right) & \text{(i)} \frac{d}{dx} \int_x^{x+1} v(t) \, dt
 \end{array}$$

Solución: Usamos derivada de la función compuesta:

$$\frac{d}{dx} \left(\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(t) \, dt \right) = f(g_2(x)) g_2'(x) - f(g_1(x)) g_1'(x).$$

a)

$$\frac{d}{dx} \int_{2x}^{x^3} \cos t \, dt = 3x^2 \cos(x^3) - 2 \cos(2x).$$

b)

$$\frac{d}{dx} \int_{2x}^{3x} \frac{1}{t} \, dt = \frac{1}{3x} 3 - \frac{1}{2x} 2 = \frac{1}{x} - \frac{1}{x} = 0.$$

c) En este caso los extremos no depende de α y podemos intercambiar (aunque formalmente habría que comprobar primero que la integral es convergente) la integral y la derivada:

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{d\alpha} \int_0^\infty e^{-\alpha x} \, dx &= \int_0^\infty \frac{d}{d\alpha} e^{-\alpha x} \, dx = \int_0^\infty -x e^{-\alpha x} \, dx \\
 \int_0^\infty -x e^{-\alpha x} \, dx &= - \lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T x e^{-\alpha x} \, dx = - \lim_{T \rightarrow \infty} \left. -\frac{x}{\alpha} e^{-\alpha x} \right|_{x=0}^{x=T} + \frac{1}{\alpha} \int_0^T e^{-\alpha x} \, dx = \\
 &= - \left(\lim_{T \rightarrow \infty} \left. -\frac{x}{\alpha} e^{-\alpha x} - \frac{1}{\alpha^2} e^{-\alpha x} \right|_{x=0}^{x=T} \right) \\
 &= - \left(\lim_{T \rightarrow \infty} \left(-\frac{T}{\alpha} e^{-\alpha T} - \frac{1}{\alpha^2} e^{-\alpha T} \right) - \left(-\frac{1}{\alpha^2} \right) \right) \\
 &= - \left(\lim_{T \rightarrow \infty} \left(-\frac{T}{\alpha} e^{-\alpha T} - \frac{1}{\alpha^2} e^{-\alpha T} \right) + \frac{1}{\alpha^2} \right) \\
 &= -\frac{1}{\alpha^2}.
 \end{aligned}$$

Si integramos directamente

$$\int_0^\infty e^{-\alpha x} \, dx = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T e^{-\alpha x} \, dx = \lim_{T \rightarrow \infty} \left. -\frac{e^{-\alpha x}}{\alpha} \right|_{x=0}^{x=T} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{\alpha} - \frac{e^{-\alpha T}}{\alpha} = \frac{1}{\alpha},$$

y ahora derivamos respecto de α

$$\frac{d}{d\alpha} \left(\frac{1}{\alpha} \right) = -\frac{1}{\alpha^2},$$

obtenemos el mismo resultado.

d)

$$\frac{d}{dx} \int_0^2 t^n dt = 0, \text{ puesto que no depende de } x.$$

e) La función x^n no depende de t , por tanto puede salir de la integral

$$\frac{d}{dx} \int_0^2 x^n dt = \frac{d}{dx} x^n \int_0^2 dt = \frac{d}{dx} (2x^n) = 2nx^{n-1}.$$

f) Usando la derivada de un producto

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{x} \int_0^x v(t) dt \right) &= -\frac{1}{x^2} \int_0^x v(t) dt + \frac{1}{x} \frac{d}{dx} \left(\int_0^x v(t) dt \right) \\ &= -\frac{1}{x^2} \int_0^x v(t) dt + \frac{v(x)}{x}. \end{aligned}$$

g) Usamos la regla de la cadena

$$\frac{d}{dx} \int_0^x \left(\int_0^t v(s) ds \right) dt = \int_0^x v(s) ds.$$

h) Usando la propiedad de aditividad de la integral

$$\frac{d}{dx} \left(\int_0^x v(t) dt + \int_x^1 v(t) dt \right) = \frac{d}{dx} \left(\int_0^1 v(t) dt \right) = 0, \text{ porque no depende de } x.$$

i) Usando la regla de la cadena

$$\frac{d}{dx} \int_x^{x+1} v(t) dt = v(x+1) - v(x).$$

17. (*) **Derivación en el sentido de las distribuciones y la distribución delta de Dirac.** Se define la función escalón (también llamada función de Heaviside) como

$$H(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Se llama masa de Dirac centrada en 0, denotada $\delta_0(x)$, a la derivada de $H(x)$ respecto a x . Como es bien sabido, toda función derivable es necesariamente continua. Por tanto, como $H(x)$ no es continua en $x = 0$, no puede ser derivable en dicho punto, al menos en el sentido de derivación introducido por Newton. Veamos qué sentido tiene pues la afirmación anterior.

- a) Sea $v : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua, con derivada continua, y de modo que $v(-1) = v(1) = 0$. Utiliza la fórmula de integración por partes para comprobar que

$$\int_{-1}^1 H'(x)v(x) dx = v(0).$$

- b) En el contexto de la Física Cuántica, Paul Dirac (Premio Nobel de Física en 1933 junto a Erwin Schrödinger) introdujo la distribución delta $\delta_0(x)$ atribuyéndole las dos siguientes propiedades:

$$\delta_0(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \neq 0 \\ +\infty & \text{si } x = 0, \end{cases} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \delta_0(x)v(x) dx = v(0),$$

donde v es como en el apartado anterior.

Estas dos propiedades no encajaban con las Matemáticas conocidas en 1933 pues la integral de Riemann no está definida para "funciones" que toman el valor $+\infty$. El sentido en que deben entenderse las propiedades anteriores es el siguiente: para cada $\varepsilon > 0$ consideremos la función

$$f_\varepsilon(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\varepsilon} & \text{si } -\varepsilon \leq x \leq \varepsilon \\ 0 & \text{si } |x| > \varepsilon \end{cases}$$

Utiliza el Teorema de la media del Cálculo Integral para comprobar que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} f_\varepsilon(x)v(x) dx = v(0),$$

donde v es una función como en el apartado anterior.

Teniendo en cuenta los resultados de los dos apartados anteriores, es decir,

$$\int_{-1}^1 H'(x)v(x) dx = v(0) \quad \text{y} \quad \int_{-1}^1 \delta_0(x)v(x) dx = v(0) \quad \forall v,$$

podemos concluir que $H'(x) = \delta_0(x)$. Esta forma de entender las derivadas es lo que se conoce con el nombre de derivación en el sentido de las distribuciones.

(*) Por su dificultad, este problema se ha excluido de la relación inicial.

18. **Algunas Aplicaciones del Cálculo Integral.** Son muchas y muy variadas las aplicaciones del Cálculo Integral en Física e Ingeniería. Se presentan a continuación algunas de ellas.

- a) Las líneas de forma en espectroscopia de resonancia magnética se describen a menudo a través de la función de Lorentz

$$g(\omega) = \frac{1}{\pi} \frac{T}{1 + T^2(\omega - \omega_0)^2},$$

donde T y ω_0 son constantes. Calcula $\int_{\omega_0}^{\infty} g(\omega) d\omega$.

- b) La probabilidad de que una molécula de masa m en un gas a temperatura T se mueva a velocidad v está dada por la distribución de Maxwell-Boltzmann

$$f(v) = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} v^2 e^{-mv^2/(2kT)}.$$

Calcula la velocidad media $\bar{v} = \int_0^\infty v f(v) dv$.

- c) La fuerza que actúa entre dos cargas eléctricas q_1 y q_2 separadas una distancia x en el vacío está dada por (ley de Coulomb)

$$F(x) = \frac{q_1 q_2}{4\pi \epsilon_0 x^2},$$

donde ϵ_0 es la permeabilidad del vacío. Calcula el trabajo ejercido por dicha fuerza para el caso de dos cargas iguales (por ejemplo dos electrones) que se repelen, es decir, calcula $W = - \int_{-\infty}^x F(t) dt$.

- d) Consideremos una barra de longitud L con densidad de masa $\rho(x) = L - x$, $0 \leq x \leq L$. Calcula la posición del centro de masas, es decir,

$$X = \frac{\int_0^L x \rho(x) dx}{\int_0^L \rho(x) dx}$$

y también el momento de inercia respecto al punto x_0 , el cual se define como

$$I = \int_0^L \rho(x) (x - x_0)^2 dx.$$

Solución:

a)

$$\begin{aligned} \int_{\omega_0}^{\infty} g(\omega) d\omega &= \int_{\omega_0}^{\infty} \frac{1}{\pi} \frac{T}{1 + T^2 (\omega - \omega_0)^2} d\omega = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int_{\omega_0}^x \frac{T}{1 + T^2 (\omega - \omega_0)^2} d\omega = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int_{\omega_0}^x \frac{T}{1 + (T(\omega - \omega_0))^2} d\omega = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \arctan T(\omega - \omega_0) \Big|_{\omega=\omega_0}^{\omega=x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} (\arctan T(x - \omega_0) - \arctan 0) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \arctan T(x - \omega_0) = \frac{1}{\pi} \frac{\pi}{2} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

b)

$$\bar{v} = \int_0^\infty v f(v) dv = \int_0^\infty v \cdot 4\pi \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} v^2 e^{-mv^2/(2kT)} dv = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} \int_0^\infty v^3 e^{-mv^2/(2kT)} dv$$

Para simplificar cálculos tomamos

$$\frac{m}{2kT} = \alpha$$

de esta forma

$$\bar{v} = 4\pi\alpha^{3/2} \int_0^\infty v^3 e^{-\alpha v^2} dv = \lim_{x \rightarrow \infty} 4\pi\alpha^{3/2} \int_0^x v^3 e^{-\alpha v^2} dv$$

Para el cálculo de la integral $\int_0^x v^3 e^{-\alpha v^2} dv$, hacemos el cambio $v^2 = t \Rightarrow 2v dv = dt$

$$\begin{aligned} \int_0^x v^3 e^{-\alpha v^2} dv &= \int_0^x v^2 e^{-\alpha v^2} v dv = \frac{1}{2} \int_0^x v^2 e^{-\alpha v^2} (2v dv) = \frac{1}{2} \int_0^x t e^{-\alpha t} dt \\ dv &= v e^{-\left(\frac{m}{2kT}\right)v^2} \end{aligned}$$

y realizamos esa última integral por partes, tomando $u = t$ y $dv = e^{-\alpha t} dt$ y por tanto $du = dt$ y $v = -\frac{1}{\alpha} e^{-\alpha t}$

$$\frac{1}{2} \int t e^{-\alpha t} dt = -\frac{t}{2\alpha} e^{-\alpha t} + \frac{1}{2\alpha} \int_0^x e^{-\alpha t} dt = -\frac{t}{2\alpha} e^{-\alpha t} - \frac{1}{2\alpha^2} e^{-\alpha t} = -\left(\frac{t}{2\alpha} + \frac{1}{2\alpha^2}\right) e^{-\alpha t}$$

y deshaciendo el cambio

$$\int v^3 e^{-\alpha v^2} dv = -\left(\frac{v^2}{2\alpha} + \frac{1}{2\alpha^2}\right) e^{-\alpha v^2}$$

Si ahora calculamos la integral definida entre 0 y x

$$\int_0^x v^3 e^{-\alpha v^2} dv = -\left(\frac{v^2}{2\alpha} + \frac{1}{2\alpha^2}\right) e^{-\alpha v^2} \Big|_{v=0}^{v=x} = \frac{1}{2\alpha^2} - \left(\frac{x^2}{2\alpha} + \frac{1}{2\alpha^2}\right) e^{-\alpha x^2}$$

y tomando límites

$$\lim_{x \rightarrow \infty} 4\pi\alpha^{3/2} \int_0^x v^3 e^{-\alpha v^2} dv = \lim_{x \rightarrow \infty} 4\pi\alpha^{3/2} \left[\frac{1}{2\alpha^2} - \left(\frac{x^2}{2\alpha} + \frac{1}{2\alpha^2}\right) e^{-\alpha x^2} \right] = \frac{4\pi\alpha^{3/2}}{2\pi^{3/2}\alpha^2} = \frac{2}{\pi^{1/2}\alpha^{1/2}},$$

y sustituyendo el valor de α

$$\bar{v} = \frac{2}{\pi^{1/2}\alpha^{1/2}} = \frac{2}{\pi^{1/2} \left(\frac{m}{2kT}\right)^{1/2}} = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}}.$$

c)

$$\begin{aligned} W &= - \int_{-\infty}^x \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 t^2} dt = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0} \lim_{s \rightarrow -\infty} \int_s^x -\frac{1}{t^2} dt \\ &= \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0} \lim_{s \rightarrow -\infty} \frac{1}{t} \Big|_{t=s}^{t=x} \\ &= \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0} \lim_{s \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{s} \right) \\ &= \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 x} \end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned} X &= \frac{\int_0^L x\rho(x) dx}{\int_0^L \rho(x) dx} = \frac{\int_0^L x(L-x) dx}{\int_0^L (L-x) dx} \\ &= \frac{\int_0^L xL - x^2 dx}{\int_0^L (L-x) dx} = \frac{\left. \frac{x^2}{2}L - \frac{x^3}{3} \right|_{x=0}^{x=L}}{\left. xL - \frac{x^2}{2} \right|_{x=0}^{x=L}} = \frac{\frac{L^3}{2} - \frac{L^3}{3}}{L^2 - \frac{L^2}{2}} = \frac{\frac{1}{6}L^3}{\frac{1}{2}L^2} = \frac{1}{3}L \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I &= \int_0^L \rho(x)(x-x_0)^2 dx = \int_0^L (L-x)(x-x_0)^2 dx = \int_0^L (L-x)(x^2 - 2xx_0 + x_0^2) dx = \\ &= \int_0^L (-x^3 + x^2(L+2x_0) - x(x_0^2 + 2x_0L) + x_0^2L) dx = \\ &= \left. -\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3}(L+2x_0) - \frac{x^2}{2}(x_0^2 + 2x_0L) + xx_0^2L \right|_{x=0}^{x=L} \\ &= -\frac{L^4}{4} + \frac{L^3}{3}(L+2x_0) - \frac{L^2}{2}(x_0^2 + 2x_0L) + x_0^2L^2 \\ &= \frac{L^4 - 4L^3x_0 + 6L^2x_0^2}{12} \end{aligned}$$
