Curso 2021/2022
Grado en Ingeniería Química Industrial
Matemáticas II - Problemas Tema 3
Cálculo en varias variables
Límites y continuidad de funciones en varias variables

1. Calcula el interior, la clausura, la frontera y el derivado de los siguientes conjuntos:

$$A = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 9\right\}$$

$$B = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = 0\right\}.$$

$$C = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > x^2\right\}.$$

$$D = \{(0, 0), (1, 0)\}$$

$$E = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 < 1\right\}$$

$$F = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + z^2 < 4\right\}$$

$$G = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0; y < 0\right\}$$

$$H = [2, 3[\times]{-1}, 3[$$

$$I = ([2, 3] \times [0, 1]) \cup \{(0, 1)\}$$

$$J = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\right\}$$

$$K = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 < x^2 + y^2 \leq 4\right\}$$

$$L = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 < 4; 0 \leq z < 3\right\} \cup \{(-3, 0, 0); (2, 0, 0)\}$$

$$M = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 < 4\right\} \cup \{(2, 0, 0); (4, 0, 0)\}$$

$$N = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq 9\right\} \cup \{(4, 3, 1)\}$$

.

2. Calcula el dominio donde se podrían definir las siguientes funciones

a) $f_1(x, y) = \dfrac{x + y}{x^2 + y^2}$

b) $f_2(x, y) = \dfrac{2}{\sqrt{x^2 + y^2 - 4}}$

c) $f_3(x, y) = \ln\left(x^2 + y^2 - 9\right)$

d) $f_4(x, y) = \dfrac{x + y}{xy^2}$

e) $f_5(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2 - 1}$

f) $f_6(x, y) = \left(\frac{2}{\sqrt{x^2+y^2-1}}, \frac{3}{\sqrt{4-(x^2+y^2)}}\right)$

3. Analiza la existencia de límite en $(0,0)$ para las siguientes funciones:

a) $f_1 : \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\} \longrightarrow \mathbb{R}$ con $f_1(x,y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$

b) $f_2 : \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\} \longrightarrow \mathbb{R}$ con $f_2(x,y) = \dfrac{x+2y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}$

c) $f_3 : \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\} \longrightarrow \mathbb{R}$ con $f_3(x,y) = \dfrac{x^4+y^4}{x^2+y^2}$

d) $f_4 : \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\} \longrightarrow \mathbb{R}$ con $f_4(x,y) = \dfrac{xy^2}{x^2+y^2}$

e) $f_5 : \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\} \longrightarrow \mathbb{R}$ con $f_5(x,y) = \dfrac{xy+y^2}{x^2+y^2}$

f) $f_6 : \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\} \longrightarrow \mathbb{R}$ con $f_6(x,y) = \dfrac{x^2y}{x^4+y^2}$

g) $f_7 : \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\} \longrightarrow \mathbb{R}$ con $f_7(x,y) = \dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2+x^4}$

h) $f_8 : \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ con $f_8(x,y) = \left(\dfrac{y^2}{x^2+y^2}, x+y\right)$

i) $f_9 : \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ con $f_9(x,y) = \left(\dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2}, \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} \operatorname{sen} \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$

j) $f_{10} : \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\} \longrightarrow \mathbb{R}$ con $f_{10}(x,y) = \dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2+x^2y^2}$

4. Analiza la continuidad de las siguientes funciones

a) $f_1 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \quad f_1(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x\,|y|}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$

b) $f_2 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \quad f_2(x,y) = \begin{cases} \left(x^2+y^2\right) \operatorname{sen} \dfrac{1}{x^2+y^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$

c) $f_3 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \quad f_3(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{x^2+y^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$

d) $f_4 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \quad f_4(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y}{x^2+y^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$

e) $f_5 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \quad f_5(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x}{x^2+y^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$

f) $f_6 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \quad f_6(x,y) = \begin{cases} \dfrac{y^2(x-y)}{x^2+y^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$

g) $f_7 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \quad f_7(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen}(xy)}{x} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$

h) $f_7 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \quad f_7(x,y) = \begin{cases} \dfrac{4x^3}{x^2+y^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$

5. Analiza la continuidad en el origen de las siguientes funciones

a) $f_1(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$

b) $f_2(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$

c) $f_3(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^3}{x^2+y^6} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$

d) $f_4(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^4+y^4}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$

e) $f_5(x,y) = \begin{cases} \dfrac{y^2\left(x^2-y^2\right)}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$

f) $f_6(x,y) = \begin{cases} \dfrac{y^3}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$

g) $f_7(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x+y}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$

h) $f_8(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^6}{\left(x^2-y\right)^2+x^6} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$

6. Sea $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen}(xy)}{x} & \text{si} \quad x \neq 0 \\ g(y) & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$$

¿Es posible determinar $g(y)$ para que la función $f(x,y)$, sea continua en todos los puntos de la forma $(0,y)$.

7. Sea $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3+|y|^\alpha}{x^2+y^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Estudiar para qué valores de α, la función $f(x,y)$ es continua en $(0,0)$.
