Curso 2021/2022
Grado en Ingeniería Química Industrial
Matemáticas II - Problemas Tema 4
Cálculo en varias variables
Cálculo diferencial de funciones en varias variables

1. Analiza la continuidad, existencia de derivadas direccionales, existencia de derivadas parciales y diferenciabilidad en el origen de las siguientes funciones

a) $f_1(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^4+y^4}{x^2+y^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$

b) $f_2(x,y) = \begin{cases} \dfrac{4xy^3}{x^2+y^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$

c) $f_3(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^4+y^4}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$

d) $f_4(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x+y}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$

e) $f_5(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$

f) $f_6(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$

g) $f_7(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^3}{x^2+y^6} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$

h) $f_8(x,y) = \begin{cases} \dfrac{y^2(x-y)}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$

i) $f_9(x,y) = \begin{cases} \dfrac{y^3}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$

2. Calcula las derivadas parciales de las funciones del problema anterior para puntos distintos del origen.

3. Sea $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen}(xy)}{x} & \text{si} \quad x \neq 0 \\ g(y) & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$$

¿Es posible determinar $g(y)$ para que la función $f(x,y)$, sea continua en todos los puntos para los que $x=0$? Calcula $\frac{\partial f}{\partial x}$ y $\frac{\partial f}{\partial y}$.

4. Sea $f:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3+|y|^\alpha}{x^2+y^2} & \text{si}\quad (x,y)\neq(0,0)\\ \\ 0 & \text{si}\quad (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

Estudiar para qué valores de α, la función $f(x,y)$ es continua en $(0,0)$. Estudiar para qué valores de α, existen $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ y $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$. Estudia para qué valores de α la función $f(x,y)$ es diferenciable en $(0,0)$.

5. Dada la función

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^6}{(x^2-y)^2+x^6} & \text{si}\quad (x,y)\neq(0,0)\\ \\ 0 & \text{si}\quad (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

   a) Estudia su continuidad y diferenciabilidad en $(0,0)$.
   b) Calcula $D_{\overrightarrow{v}}f(0{,}0)$ siendo $\overrightarrow{v}=(1,2)$.

6. Calcula la matriz jacobiana y la diferencial de las siguientes funciones en los puntos indicados

   a) $f(x,y)=\left(x^2y-xy,x^3-y^3\right)$ en $(1,1)$

   b) $g(x,y,z)=\left(x^2y-xyz+z^3,x^3-y^3+z^3\right)$ en $(1,1,1)$

   c) $h(x,y)=(\cos x\cos y,\operatorname{sen}x\operatorname{sen}y,\operatorname{sen}x\cos y)$ en $(\pi/2,0)$

   d) $l(x)=\left(e^x,2x,3x^2\right)$ en (0)

7. Calcula el gradiente de las siguientes funciones en los puntos indicados

   a) $f(x,y)=x^{x+y}$ en $(1,0)$ b) $g(x,y,z)=\dfrac{x^2+e^y}{e^z}$ en $(0,0,0)$

8. Calcula la matriz jacobiana de la transformación $F:\mathbb{R}^3\longrightarrow\mathbb{R}^2$, dada por $F(x,y,z)=\left(x^2-yz+z^2,xyz\right)$.

9. Sea $f:A\subseteq\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$, con A un conjunto abierto, $\overrightarrow{a}\in A$ tal que

$$df(\overrightarrow{a})(x,y)=(x+y,x+2y,y).$$

   Calcula las derivadas parciales y las derivadas direccionales en las direcciones de los vectores $\overrightarrow{v}_1=(1,-1)$, $\overrightarrow{v}_2=(-1,-1)$ y $\overrightarrow{v}_3=(0,-1)$ de las funciones coordenadas de f en $\overrightarrow{a}$, así como la matriz jacobiana de f en $\overrightarrow{a}$.

10. Sean $F:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}^3$, y $G:\mathbb{R}^3\longrightarrow\mathbb{R}^4$, dadas por $F(x,y)=\left(x^2,xy,y^2\right)$ y $G(u,v,w)=(u+v+w,u-v-2w,2u+3u,uvw)$ .Calcula la matriz jacobiana de la composición $G\circ F$.

11. Sean $F:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}^3$, y $G:\mathbb{R}^3\longrightarrow\mathbb{R}^2$, dadas por $F(x,y)=\left(e^{x^2+y^2},x^2-y^2,\pi\left(xy+y^2\right)\right)$ y $G(u,v,w)=(v+\ln(u),\operatorname{sen}(v+w))$ .Calcula la matriz jacobiana de la composición $G\circ F$ en el punto $(1,1)$.

12. Sean $F : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, y $G : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, dadas por $F(x,y,z) = \left(x^2+y^2, xyz, z^2-x^2\right)$ y $G(u,v,w) = (\cos(u+w), e^v)$ .Calcula la matriz jacobiana de la composición $G \circ F$ en el punto $(0, \sqrt{\pi}, \sqrt{\pi})$.

13. Obtener la matriz jacobiana de la descomposición $g \circ F$, siendo $F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, dada por $F(x,y) = (2x+3y, xy)$ y $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $g(u,v) = uv$.

14. Resuelve los siguientes ejercicios de dos formas. En primer lugar calculando la composición (es decir, expresando z en función de t) y, en segundo lugar, usando la regla de la cadena:

    a) $z(x,y) = \sqrt{x} + y^2$ siendo $\left\{ \begin{array}{c} x = e^{-2t} \\ y = 1 + \ln(t-1) \end{array} \right.$ calcula $\dfrac{\partial z}{\partial t}$

    b) $z(x,y) = \sqrt{x} + y^2$ siendo $\left\{ \begin{array}{c} x = e^{-2t+s} \\ y = s^2 + \ln(t-1) \end{array} \right.$ calcula $\dfrac{\partial z}{\partial t}$ y $\dfrac{\partial z}{\partial s}$

    c) $u(x,y) = x\ln(y) + e^{yz}$ siendo $\left\{ \begin{array}{c} x = 2r - 3s + 4t \\ y = \frac{r}{s} \\ z = \frac{t}{r} \end{array} \right.$ calcula $\dfrac{\partial u}{\partial r}, \dfrac{\partial u}{\partial s}$ y $\dfrac{\partial u}{\partial t}$

15. Sea $z = 2x^2 - 3y^3$, con $x = u + v + w$ e $y = u^2v^2w^2$, calcula $\dfrac{\partial z}{\partial u}, \dfrac{\partial z}{\partial v}$ y $\dfrac{\partial z}{\partial w}$.

16. Sea $u : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$, dada por

$$u(x,y,z) = (x+y)^4 + y^2(z+x)^3$$

con

$$x = r \cdot s \cdot e^{-t}; \;\; y = r \cdot s \cdot \ln\left(1+t^2\right); \;\; z = r^2 \cdot s \cdot \cos t$$

Calcula, usando la regla de la cadena, ∇u, para $r = 2$, $s = 1$ y $t = 0$.

17. Dada la función $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ de clase $\mathcal{C}^2(\mathbb{R})$, demuestra que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 2\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}(u,v) + 2\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}(u,v)$$

siendo

$$u = x + y \qquad v = x - y$$

18. Sea $z(x,y)$ una función de dos variables que verifica la ecuación en derivadas parciales

$$\frac{\partial z}{\partial x} - 3\frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

Hallar la ecuación transformada si se utiliza el cambio de variable

$$\left\{ \begin{array}{c} u = x + 2y \\ v = 3x - 2y \end{array} \right.$$

19. Sea $z(x,y)$ una función de dos variables que verifica la ecuación en derivadas parciales

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 4\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + 3\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$$

Halla la ecuación transformada si se utiliza el cambio de variable

$$u = x + 2y : \qquad v = 3x - 2y$$

20. Sea $f(x,y)$ una función de dos variables que verifica la ecuación en derivadas parciales

$$x^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+y^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}=0$$

Hallar la ecuación transformada si se utiliza el cambio de variable

$$x=e^u; \qquad y=e^v$$

21. Probar que la expresión

$$yz^4+x^2z^3-e^{xyz}=0$$

define a $z=z(x,y)$ como función implícita de x e y, en un entorno del punto $(1,0)$. Calcula en dicho punto $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

22. Probar que el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x^2y+\operatorname{sen}(xyz)+z^2=1 \\ \\ e^{yz}+xz=1 \end{cases}$$

define a las variables y y z como funciones implícitas de x, en un entorno del punto $(1,1,0)$. Calcula $y'(1)$ y $z'(1)$.

23. Suponiendo que las ecuaciones

$$\begin{cases} u+2v-x^2+y^2=0 \\ \\ 2u-v-2xy=0 \end{cases}$$

define a las variables u y v como funciones implícitas de x e y, en un entorno de un punto adecuado. Calcula $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial v}{\partial x}$ y $\frac{\partial v}{\partial y}$.

24. Probar si la expresión

$$xy-x+2z+e^z=2$$

define a z como función implícita de x e y, en un entorno del punto $(1,2)$ con $z(1,2)=0$. Calcula en dicho punto $\frac{\partial z}{\partial x}$,$\frac{\partial z}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$ y $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$.

25. Probar si la expresión

$$xe^z+ye^{x-1}+ze^y=2$$

define a z como función implícita de x e y, en un entorno del punto $(1,1)$ con $z(1,1)=0$. Calcula en dicho punto $\frac{\partial z}{\partial x}$ y $\frac{\partial z}{\partial y}$.

26. Estudia si el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} xy+xyz+z-1=0 \\ \\ xyz=0 \end{cases}$$

define a las variables y y z como funciones implícitas de x, en un entorno del punto $(1,0,1)$. Calcula $y'(1)$ y $z'(1)$.

27. Sea α y β dos números reales. Prueba que la ecuación

$$\operatorname{sen}(\alpha x+\beta y+z)\, e^{z}=0$$

define a z como función implícita de x e y, en un entorno del punto $(0,0,0)$. Determina los valores de α y β, para los que se cumple

$$\frac{\partial z}{\partial x}(0,0)=3 \text{ y } \frac{\partial z}{\partial y}(0,0)=-3$$

28. La ecuación

$$3y^3x^4-x^2y=2$$

¿define a y como función implícita de x en $x_0=1$? Justifica la respuesta y, en caso afirmativo, calcula la ecuación de la recta tangente a y en dicho punto.

29. Probar si la expresión

$$xz+ye^{2x-z}=2$$

define a z como función implícita de x e y, en un entorno del punto $(1,0)$ con $z(1,0)=2$. En caso afirmativo calcula $\nabla z(1,0)$.

30. Sea el sistema de ecuaciones dado por

$$\begin{cases} xu+yvu^2=2 \\ xu^3+y^2v^4=2 \end{cases}$$

y considera el punto $P=(x,y,u,v)=(1,1,1,1)$

   $a)$ Prueba que en un entorno del punto P el sistema define a las variables u y v como funciones implícitas de x e y.

   $b)$ Encuentra una expresión formal para la matriz jacobiana $\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}$.

   $c)$ Calcula el Jacobiano anterior en el punto $(1,1)$. Indica cuál es el valor de $\frac{\partial v}{\partial x}(1,1)$.

31. Sea $f: A\subseteq\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$, con A un conjunto abierto, $\overrightarrow{a}\in A$ tal que

$$Jf(\overrightarrow{a})=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Calcula la diferencial de f en $\overrightarrow{a}$ y las derivadas parciales y las derivadas direccionales en las direcciones de los vectores $\overrightarrow{v}_1=(-1,-1,1)$, $\overrightarrow{v}_2=(-1,-1,-1)$ y $\overrightarrow{v}_3=(0,-1,0)$ de las funciones coordenadas de f en $\overrightarrow{a}$.

32. Sea $f: A\subseteq\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$, con A un conjunto abierto, $\overrightarrow{a}\in A$ tal que las derivadas direccionales matriz jacobiana de f en $\overrightarrow{a}$ es

$$D_{\overrightarrow{v_1}}f(\overrightarrow{a})=-1 \qquad \overrightarrow{v_1}=(1,1,0)$$

$$D_{\overrightarrow{v_2}}f(\overrightarrow{a})=1 \qquad \overrightarrow{v_2}=(1,0,1)$$

$$D_{\overrightarrow{v_3}}f(\overrightarrow{a})=0 \qquad \overrightarrow{v_3}=(0,1,1)$$

Calcula la diferencial de f y las derivadas parciales en $\overrightarrow{a}$.

33. Calcula el gradiente y la matriz Hessiana de las siguientes funciones:

$$(a) \quad f(x,y) = \operatorname{sen}(x+y)\, e^{x-y}, \qquad (b) \quad g(x,y,z) = xye^{yz}, \qquad (c) \quad h(x,y,z) = \cos(x+2y+3z)\,.$$

34. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función derivable dos veces y c una constante. Comprueba que la función $\phi(x,t) = \frac{1}{2}\left(f(x-ct) + f(x+ct)\right)$ es solución de la ecuación de ondas

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2}.$$

35. Sean $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ un campo escalar y $\sigma(t) = (x(t), y(t), z(t))$ una curva. Calcula $\frac{d}{dt} f(x(t), y(t), z(t))$. Aplica la fórmula obtenida para el caso concreto $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$ y $\sigma(t) = (\cos t, \sin t, 1)$.

©Silvestre Paredes Hernández®