

1. Analiza la continuidad, existencia de derivadas direccionales, existencia de derivadas parciales y diferenciabilidad en el origen de las siguientes funciones

$$\begin{array}{ll}
 \text{a) } f_1(x, y) = \begin{cases} \frac{x^4 + y^4}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases} & \text{b) } f_2(x, y) = \begin{cases} \frac{4xy^3}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases} \\
 \text{c) } f_3(x, y) = \begin{cases} \frac{x^4 + y^4}{\sqrt{x^2 + y^2}} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases} & \text{d) } f_4(x, y) = \begin{cases} \frac{x + y}{\sqrt{x^2 + y^2}} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases} \\
 \text{e) } f_5(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{\sqrt{x^2 + y^2}} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases} & \text{f) } f_6(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases} \\
 \text{g) } f_7(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^3}{x^2 + y^6} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases} & \text{h) } f_8(x, y) = \begin{cases} \frac{y^2(x - y)}{\sqrt{x^2 + y^2}} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases} \\
 \text{i) } f_9(x, y) = \begin{cases} \frac{y^3}{\sqrt{x^2 + y^2}} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases} &
 \end{array}$$

Soluciones:

a)

$$f_1(x, y) = \begin{cases} \frac{x^4 + y^4}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Continuidad: Para calcular el límite usamos el cambio a coordenadas polares ($x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$)

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{r^4 \cos^4 \theta + r^4 \sin^4 \theta}{r^2} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{r^4 (\cos^4 \theta + \sin^4 \theta)}{r^2} = \lim_{r \rightarrow 0} r^2 (\cos^4 \theta + \sin^4 \theta) = 0,$$

que no depende de θ . Veamos si es posible encontrar una función de r que cumpla las hipótesis del teorema

$$|r^2 (\cos^4 \theta + \sen^4 \theta) - 0| = |r^2 (\cos^4 \theta + \sen^4 \theta)| = r^2 |\cos^4 \theta + \sen^4 \theta|,$$

y usando ahora la desigualdad triangular y que las funciones $\cos \theta$ y $\sen \theta$ están acotadas por 1

$$r^2 |\cos^4 \theta + \sen^4 \theta| \leq |r^2| \cdot (|\cos^4 \theta| + |\sen^4 \theta|) \leq r^2 (1 + 1) = 2r^2$$

donde además

$$\lim_{r \rightarrow 0} 2r^2 = 0,$$

y deducimos que el límite existe y es 0, como coincide con el valor de la función en $(0, 0)$, la función f_1 es continua en el origen.

Derivadas direccionales: Usando la definición por límites de la derivada direccional en un vector cualquiera $\vec{v} = (v_1, v_2) \neq 0$, tendremos

$$\begin{aligned} D_{\vec{v}} f_1(0, 0) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f_1((0, 0) + t(v_1, v_2)) - f_1(0, 0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f_1(tv_1, tv_2) - 0}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \frac{t^4 v_1^4 + t^4 v_2^4}{(tv_1)^2 + (tv_2)^2} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^4 (v_1^4 + v_2^4)}{t^3 (v_1^2 + v_2^2)} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t (v_1^4 + v_2^4)}{(v_1^2 + v_2^2)} \end{aligned}$$

teniendo en cuenta que $\vec{v} \neq (0, 0)$ y por tanto $v_1^2 + v_2^2 \neq 0$, entonces se cumple

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{t (v_1^4 + v_2^4)}{(v_1^2 + v_2^2)} = 0,$$

por lo que cualquier derivada direccional es nula, en particular las derivadas parciales también lo serán:

$$\frac{\partial f_1}{\partial x}(0, 0) = D_{\vec{e}_1} f_1(0, 0) = 0$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial y}(0, 0) = D_{\vec{e}_2} f_1(0, 0) = 0$$

Diferenciabilidad: Si la función fuera diferenciable en $(0, 0)$, entonces el valor de esa diferencial sería

$$df_1(0, 0) = \frac{\partial f_1}{\partial x}(0, 0) dx + \frac{\partial f_1}{\partial y}(0, 0) dy,$$

con los valores que hemos obtenido en el apartado anterior, las dos derivadas parciales son nulas y por tanto

$$df_1(0, 0) = 0,$$

y tendremos que probar si es 0, el valor del siguiente límite

$$\lim_{\|\vec{h}\| \rightarrow 0} \frac{f_1((0, 0) + \vec{h}) - f_1(0, 0) - df_1(0, 0) \vec{h}}{\|\vec{h}\|} = \lim_{\|\vec{h}\| \rightarrow 0} \frac{f_1(\vec{h}) - f_1(0, 0) - df_1(0, 0) \vec{h}}{\|\vec{h}\|}.$$

Ahora bien, teniendo en cuenta que $df_1(0,0) = 0$, $f_1(0,0) = 0$, que si tomamos $\vec{h} = (h, k)$, entonces $\|\vec{h}\| = \sqrt{h^2 + k^2}$, y que $\|\vec{h}\| \rightarrow 0$, es equivalente a $(h, k) \rightarrow (0, 0)$, tendremos

$$\begin{aligned} \lim_{\|\vec{h}\| \rightarrow 0} \frac{f_1(\vec{h}) - f_1(0,0) - df_1(0,0)\vec{h}}{\|\vec{h}\|} &= \lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{f_1(h,k)}{\sqrt{h^2 + k^2}} \\ &= \lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{h^4 + k^4}{\sqrt{h^2 + k^2}} = \lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{h^4 + k^4}{(h^2 + k^2)^{3/2}}. \end{aligned}$$

Usaremos coordenadas polares $h = r \cos \theta$, $k = r \sin \theta$ para calcular este límite

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{r^4 \cos^4 \theta + r^4 \sin^4 \theta}{r^3} = \lim_{r \rightarrow 0} r (\cos^4 \theta + \sin^4 \theta) = 0,$$

que no depende de θ y además

$$|r (\cos^4 \theta + \sin^4 \theta)| \leq 2r$$

con

$$\lim_{r \rightarrow 0} 2r = 0,$$

luego el límite existe y es 0, así que la función es diferenciable en el origen y su diferencial es nula.

- b) En este apartado y en los siguientes se obvian las operaciones y cálculos similares a los que aparecen en el apartado a.

$$f_2(x, y) = \begin{cases} \frac{4xy^3}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Continuidad: Usamos cambio a polares

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{4r \cos \theta \cdot r^3 \sin^3 \theta}{r^2} = \lim_{r \rightarrow 0} 4r^2 \cos \theta \sin^3 \theta = 0,$$

que no depende de θ , además

$$|4r^2 \cos \theta \sin^3 \theta| \leq |4r^2| \cdot |(\cos \theta \sin^3 \theta)| \leq 4r^2$$

con

$$\lim_{r \rightarrow 0} 4r^2 = 0,$$

luego f_2 es continua en $(0, 0)$.

Derivadas direccionales: Usando la definición de derivada direccional a lo largo de un vector cualquiera $\vec{v} = (v_1, v_2) \neq 0$

$$D_{\vec{v}} f_2(0, 0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f_2(tv_1, tv_2)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \frac{4(tv_1)(tv_2)^3}{(tv_1)^2 + (tv_2)^2} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{4t^4 v_1 v_2^3}{t^3 (v_1^2 + v_2^2)} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{4tv_1 v_2^3}{(v_1^2 + v_2^2)},$$

teniendo en cuenta que $\vec{v} \neq (0, 0)$ y por tanto $v_1^2 + v_2^2 \neq 0$, entonces

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{4tv_1v_2^3}{(v_1^2 + v_2^2)} = 0,$$

por lo que cualquier derivada direccional es nula, en particular las derivadas parciales también lo serán:

$$\frac{\partial f_2}{\partial x}(0, 0) = D_{\vec{e}_1} f_2(0, 0) = 0,$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial y}(0, 0) = D_{\vec{e}_2} f_2(0, 0) = 0.$$

Diferenciabilidad: Si la función fuera diferenciable en $(0, 0)$, entonces

$$df_2(0, 0) = \frac{\partial f_2}{\partial x}(0, 0) dx + \frac{\partial f_2}{\partial y}(0, 0) dy = 0$$

y tendremos que probar si es 0, el valor del siguiente límite

$$\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{f_2(h, k) - f_2(0, 0) - df_2(0, 0)(h, k)}{\sqrt{h^2 + k^2}},$$

pero como $df_2(0, 0) = 0$ y $f_2(0, 0) = 0$

$$\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{f_2(h, k)}{\sqrt{h^2 + k^2}} = \lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{4hk^3}{(h^2 + k^2)} = \lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{4hk^3}{(h^2 + k^2)^{3/2}},$$

límite que calculamos usando cambio a coordenadas polares $h = r \cos \theta$, $k = r \sen \theta$

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{4r \cos \theta \cdot r^3 \sen^3 \theta}{r^{3/2}} = \lim_{r \rightarrow 0} r^{1/2} (4 \cos \theta \sen^3 \theta) = 0,$$

que no depende de θ y además

$$\left| r^{1/2} (4 \cos \theta \sen^3 \theta) \right| \leq r^{1/2}$$

con

$$\lim_{r \rightarrow 0} r^{1/2} = 0,$$

luego el límite existe y es 0, así que la función es diferenciable en el origen y su diferencial es nula.

c)

$$f_3(x, y) = \begin{cases} \frac{x^4 + y^4}{\sqrt{x^2 + y^2}} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Continuidad: Límite en polares

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{r^4 \cos^4 \theta + r^4 \sen^4 \theta}{r} = \lim_{r \rightarrow 0} r^3 (\cos^4 \theta + \sen^4 \theta) = 0$$

no depende de θ , además

$$|r^3 (\cos^4 \theta + \sen^4 \theta)| \leq |r^3| \cdot |(\cos^4 \theta + \sen^4 \theta)| \leq r^3 (|\cos^4 \theta| + |\sen^4 \theta|) \leq 2r^3$$

con

$$\lim_{r \rightarrow 0} 2r^3 = 0$$

luego f_3 es continua en $(0, 0)$.

Derivadas direccionales: Usando la definición de derivada direccional y un vector cualquiera $\vec{v} = (v_1, v_2) \neq 0$

$$D_{\vec{v}} f_3(0, 0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f_3(tv_1, tv_2) - f_3(0, 0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^4 v_1^4 + t^4 v_2^4}{t \sqrt{(tv_1)^2 + (tv_2)^2}} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^4 (v_1^4 + v_2^4)}{t^2 \sqrt{v_1^2 + v_2^2}} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^2 (v_1^4 + v_2^4)}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2}}$$

teniendo en cuenta que $\vec{v} \neq (0, 0)$ y por tanto $\sqrt{v_1^2 + v_2^2} \neq 0$, entonces

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^2 (v_1^4 + v_2^4)}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2}} = 0,$$

por lo que cualquier derivada direccional es nula, en particular las derivadas parciales también lo serán:

$$\frac{\partial f_3}{\partial x}(0, 0) = D_{\vec{e}_1} f_3(0, 0) = 0,$$

$$\frac{\partial f_3}{\partial y}(0, 0) = D_{\vec{e}_2} f_3(0, 0) = 0.$$

Diferenciabilidad: Si la función fuera diferenciable en $(0, 0)$, entonces

$$df_3(0, 0) = \frac{\partial f_3}{\partial x}(0, 0) dx + \frac{\partial f_3}{\partial y}(0, 0) dy = 0$$

y tendremos que probar si es 0 el valor del siguiente límite

$$\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{f_3(h, k) - f_3(0, 0) - df_3(0, 0)(h, k)}{\sqrt{h^2 + k^2}},$$

teniendo en cuenta que $df_3(0, 0) = 0$ y $f_3(0, 0) = 0$, tendremos

$$\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{f_3(h, k)}{\sqrt{h^2 + k^2}} = \lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{\frac{h^4 + k^4}{\sqrt{h^2 + k^2}}}{\sqrt{h^2 + k^2}} = \lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{h^4 + k^4}{h^2 + k^2}$$

y usando coordenadas polares $h = r \cos \theta$, $k = r \sen \theta$

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{r^4 \cos^4 \theta + r^4 \sen^4 \theta}{r^2} = \lim_{r \rightarrow 0} r^2 (\cos^4 \theta + \sen^4 \theta) = 0,$$

que no depende de θ y además

$$|r^2 (\cos^4 \theta + \sen^4 \theta)| \leq 2r^2$$

con

$$\lim_{r \rightarrow 0} 2r^2 = 0,$$

luego el límite existe y es 0, así que la función es diferenciable en el origen y su diferencial es nula.

d)

$$f_4(x, y) = \begin{cases} \frac{x+y}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Continuidad: Para calcular el límite usamos cambio a polares

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{r \cos \theta + r \operatorname{sen} \theta}{r} = \lim_{r \rightarrow 0} (\cos \theta + \operatorname{sen} \theta) = 0$$

que depende de θ , no existe el límite y la función no es continua en $(0, 0)$.

Derivadas direccionales: Usando la definición de derivada direccional y dado un punto vector cualquiera $\vec{v} = (v_1, v_2) \neq 0$

$$D_{\vec{v}} f_4(0, 0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f_4(tv_1, tv_2)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{tv_1 + tv_2}{t\sqrt{(tv_1)^2 + (tv_2)^2}} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t(v_1 + v_2)}{t^2\sqrt{v_1^2 + v_2^2}} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \frac{(v_1^4 + v_2^4)}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2}}$$

teniendo en cuenta que $\vec{v} \neq (0, 0)$, entonces

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \frac{(v_1^4 + v_2^4)}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2}} = \pm\infty,$$

por lo que no existe ninguna derivada direccional en el $(0, 0)$ y por tanto tampoco las derivadas parciales

Diferenciabilidad: Como la función no es continua, no puede ser diferenciable.

e)

$$f_5(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{\sqrt{x^2 + y^2}} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Continuidad: Para calcular el límite usamos cambio a coordenadas polares

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{(r \cos \theta)^2 (r \operatorname{sen} \theta)}{r} = \lim_{r \rightarrow 0} r^2 \cos^2 \theta \operatorname{sen} \theta = 0,$$

además

$$|r^2 \cos^2 \theta \operatorname{sen} \theta| \leq r^2$$

con

$$\lim_{r \rightarrow 0} r^2 = 0$$

luego f_5 es continua en $(0, 0)$, ya que existe una función $g(r) = r^2$ que no depende de θ y que tiene por límite 0, cuando r tiende a 0 que acota a la función menos su límite.

Derivadas direccionales: Usamos la definición de derivada direccional

$$D_{\vec{v}} f_5(a) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f_5(a + tv) - f_5(a)}{t}$$

en este caso $a = (0, 0)$ y por tanto $a + tv = tv$, además $f(a) = f(0, 0) = 0$, tomando $v = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$, en este caso

$$D_{\vec{v}} f_5(0, 0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f_1(tv_1, tv_2)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(tv_1)^2 (tv_2)}{t \sqrt{(tv_1)^2 + (tv_2)^2}} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^3 v_1^2 v_2}{t^2 \sqrt{v_1^2 + v_2^2}} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{tv_1^2 v_2}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2}}$$

teniendo en cuenta que $\vec{v} \neq 0$ y por tanto $\sqrt{v_1^2 + v_2^2} \neq 0$, entonces

$$D_v f_5(0, 0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{tv_1^2 v_2}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2}} = 0,$$

y cualquier derivada direccional en $(0, 0)$ es nula en general y en particular las derivadas parciales también serán nulas

$$\frac{\partial f_5}{\partial x}(0, 0) = D_{\vec{e}_1} f_1(0, 0) = 0,$$

$$\frac{\partial f_5}{\partial y}(0, 0) = D_{\vec{e}_2} f_1(0, 0) = 0.$$

Diferenciabilidad: Si la función fuera diferenciable en el punto $(0, 0)$, entonces la diferencial en ese punto tendría que ser

$$df(0, 0) = \frac{\partial f_5}{\partial x}(0, 0) dx + \frac{\partial f_5}{\partial y}(0, 0) dy = 0,$$

y tenemos que probar si sería 0 el valor del siguiente límite

$$\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{f_5((0, 0) + (h, k)) - f_5(0, 0) - df_5(0, 0)(h, k)}{\sqrt{h^2 + k^2}},$$

como $df_5(0, 0) = 0$ y $f_5(0, 0) = 0$

$$\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{f_5(h, k)}{\sqrt{h^2 + k^2}} = \lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{\frac{h^2 k}{\sqrt{h^2 + k^2}}}{\sqrt{h^2 + k^2}} = \lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{h^2 k}{h^2 + k^2},$$

cambiando a coordenadas polares

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{(r^2 \cos^2 \theta)(r \sin \theta)}{r^2} = \lim_{r \rightarrow 0} r \cos^2 \theta \sin \theta = 0,$$

que no depende de θ , además

$$|r \cos^2 \theta \sin \theta| \leq r$$

con

$$\lim_{r \rightarrow 0} r = 0$$

luego el límite existe y es 0, así que la función es diferenciable en el origen y su diferencial es nula.

f)

$$f_6(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Continuidad: Para calcular el límite usamos cambio a coordenadas polares

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{(r \cos \theta)(r \sin \theta)}{r} = \lim_{r \rightarrow 0} r \cos \theta \sin \theta = 0$$

además

$$|r \cos \theta \sin \theta| \leq r$$

con

$$\lim_{r \rightarrow 0} r = 0$$

luego f_2 es continua en $(0, 0)$.

Derivadas direccionales: Usando la definición

$$D_{\vec{v}} f_6(0, 0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f_6(tv_1, tv_2) - f_6(0, 0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(tv_1)(tv_2)}{t\sqrt{(tv_1)^2 + (tv_2)^2}} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^2 v_1 v_2}{t^2 \sqrt{v_1^2 + v_2^2}} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{v_1 v_2}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2}}$$

teniendo en cuenta que $\vec{v} \neq (0, 0)$ y por tanto $\sqrt{v_1^2 + v_2^2} \neq 0$, entonces las derivadas direccionales en la dirección \vec{v} son

$$D_{\vec{v}} f_6(0, 0) = \frac{v_1 v_2}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2}}.$$

Para las derivadas parciales hay que tomar $v = e_1 = (1, 0)$ y $v = e_2 = (0, 1)$

$$\frac{\partial f_6}{\partial x}(0, 0) = D_{\vec{e}_1} f_6(0, 0) = 0$$

$$\frac{\partial f_6}{\partial y}(0, 0) = D_{\vec{e}_2} f_6(0, 0) = 0$$

Diferenciabilidad: Si la función fuera diferenciable en $(0, 0)$, entonces sería

$$df(0, 0) = \frac{\partial f_6}{\partial x}(0, 0) dx + \frac{\partial f_6}{\partial y}(0, 0) dy = 0$$

y tendremos que probar si es 0 el valor del siguiente límite

$$\lim_{(h, k) \rightarrow (0, 0)} \frac{f_6(h, k) - f_6(0, 0) - df_6(0, 0)(h, k)}{\sqrt{h^2 + k^2}}$$

como $df_6(0, 0) = 0$ y $f_6(0, 0) = 0$

$$\lim_{(h, k) \rightarrow (0, 0)} \frac{f_6(h, k)}{\sqrt{h^2 + k^2}} = \lim_{(h, k) \rightarrow (0, 0)} \frac{hk}{\sqrt{h^2 + k^2}} = \lim_{(h, k) \rightarrow (0, 0)} \frac{hk}{h^2 + k^2}$$

y tomando polares

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{(r \cos \theta)(r \sin \theta)}{r^2} = \lim_{r \rightarrow 0} \cos \theta \sin \theta,$$

que depende de θ y por tanto no existe, la función no es diferenciable en el punto $(0, 0)$.

g)

$$f_7(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^3}{x^2 + y^6} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Continuidad: Para calcular el límite usamos aproximaciones a $(0, 0)$ por curvas de la forma $x = \lambda y^3$

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ x = \lambda y^3}} \frac{xy^3}{x^2 + y^6} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{(\lambda y^3) y^3}{(\lambda y^3)^2 + y^6} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\lambda y^6}{\lambda^2 y^6 + y^6} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\lambda}{\lambda^2 + 1} = \frac{\lambda}{\lambda^2 + 1}$$

que depende de λ y por tanto no existe. La función $f_7(x, y)$ no es continua en $(0, 0)$.

Derivadas direccionales: Usando la definición

$$D_{\vec{v}} f_7(0, 0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f_7(tv_1, tv_2) - f_7(0, 0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \frac{(tv_1)(tv_2)^3}{(tv_1)^2 + (tv_2)^6} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^4 v_1 v_2^3}{t^3 (v_1^2 + t^4 v_2^6)} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{tv_1 v_2^3}{(v_1^2 + t^4 v_2^6)}$$

teniendo en cuenta que $\vec{v} \neq (0, 0)$ y por tanto $(v_1^2 + t^4 v_2^6) \neq 0$, entonces

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{tv_1 v_2^3}{(v_1^2 + t^4 v_2^6)} = 0$$

Cualquier derivada direccional es nula, en particular las derivadas parciales

$$\frac{\partial f_7}{\partial x}(0, 0) = D_{\vec{e}_1} f_7(0, 0) = 0$$

$$\frac{\partial f_7}{\partial y}(0, 0) = D_{\vec{e}_2} f_7(0, 0) = 0$$

Diferenciabilidad: Como la función no es continua en $(0, 0)$, entonces no puede ser diferenciable.

h)

$$f_8(x, y) = \begin{cases} \frac{y^2(x-y)}{\sqrt{x^2 + y^2}} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Continuidad: Para calcular el límite usamos cambio a polares

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{r^2 \sin^2 \theta (r \cos \theta - r \sin \theta)}{r} = \lim_{r \rightarrow 0} r^2 \sin^2 \theta (\cos \theta - \sin \theta) = 0$$

además

$$|r^2 \sin^2 \theta (\cos \theta - \sin \theta)| \leq r^2 \sin^2 \theta (|\cos \theta| + |-\sin \theta|) \leq 2r^2$$

con

$$\lim_{r \rightarrow 0} 2r^2 = 0$$

luego f_8 es continua en $(0, 0)$.

Derivadas direccionales: Usando la definición

$$D_{\vec{v}} f_8(0,0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f_8(tv_1, tv_2)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^2 v_2^2 (tv_1 - tv_2)}{t \sqrt{(tv_1)^2 + (tv_2)^2}} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{tv_2^2 (v_1 - v_2)}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2}}$$

teniendo en cuenta que $\vec{v} \neq (0,0)$ y por tanto $\sqrt{v_1^2 + v_2^2} \neq 0$, entonces

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{tv_2^2 (v_1 - v_2)}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2}} = 0,$$

y cualquier derivada direccional es nula, en particular las derivadas parciales serán nulas

$$\frac{\partial f_8}{\partial x}(0,0) = D_{\vec{e}_1} f_8(0,0) = 0$$

$$\frac{\partial f_8}{\partial y}(0,0) = D_{\vec{e}_2} f_8(0,0) = 0$$

Diferenciabilidad: Si la función fuera diferenciable en $(0,0)$, entonces

$$df_8(0,0) = \frac{\partial f_8}{\partial x}(0,0) dx + \frac{\partial f_8}{\partial y}(0,0) dy = 0$$

y tendremos que probar si es 0 el valor del siguiente límite

$$\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{f_8(h,k) - f_8(0,0) - df_8(0,0)(h,k)}{\sqrt{h^2 + k^2}},$$

pero como $df_8(0,0) = 0$ y $f_8(0,0) = 0$, el límite se transforma en:

$$\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{f_8(h,k)}{\sqrt{h^2 + k^2}} = \lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{k^2(h-k)}{\sqrt{h^2 + k^2}} = \lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{k^2(h-k)}{h^2 + k^2}$$

y tomando coordenadas polares

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{r^2 \sin^2 \theta (r \cos \theta - r \sin \theta)}{r^2} = \lim_{r \rightarrow 0} r \sin^2 \theta (\cos \theta - \sin \theta) = 0,$$

que no depende de θ , con

$$|r \sin^2 \theta (\cos \theta - \sin \theta)| \leq 2r$$

y

$$\lim_{r \rightarrow 0} 2r = 0,$$

luego el límite existe y es 0, así que la función es diferenciable en el origen y su diferencial es nula.

i)

$$f_9(x,y) = \begin{cases} \frac{y^3}{\sqrt{x^2 + y^2}} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Continuidad: Para calcular el límite usamos cambio a polares

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{r^3 \operatorname{sen}^3 \theta}{r} = \lim_{r \rightarrow 0} r^2 \operatorname{sen}^3 \theta = 0$$

además

$$|r^2 \operatorname{sen}^3 \theta| \leq r^3,$$

con

$$\lim_{r \rightarrow 0} r^3 = 0,$$

luego f_9 es continua en $(0, 0)$.

Derivadas direccionales: Usando la definición de derivada direccional

$$D_{\vec{v}} f_9(0, 0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f_9(tv_1, tv_2) - f_9(0, 0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^3 v_2^3}{t \sqrt{(tv_1)^2 + (tv_2)^2}} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{tv_2^3}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2}}$$

teniendo en cuenta que $\vec{v} \neq (0, 0)$ y por tanto $\sqrt{v_1^2 + v_2^2} \neq 0$, entonces

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{tv_2^3}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2}} = 0,$$

y cualquier derivada direccional es nula, en particular las derivadas parciales serán nulas:

$$\frac{\partial f_9}{\partial x}(0, 0) = D_{\vec{e}_1} f_9(0, 0) = 0$$

$$\frac{\partial f_9}{\partial y}(0, 0) = D_{\vec{e}_2} f_9(0, 0) = 0$$

Diferenciabilidad: Si la función fuera diferenciable en $(0, 0)$, entonces su diferencial valdría:

$$df_9(0, 0) = \frac{\partial f_9}{\partial x}(0, 0) dx + \frac{\partial f_9}{\partial y}(0, 0) dy = 0$$

y tendremos que probar si es 0 el valor del siguiente límite

$$\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{f_9(h, k) - f_9(0, 0) - df_9(0, 0)(h, k)}{\sqrt{h^2 + k^2}}$$

como $df_9(0, 0) = 0$ y $f_9(0, 0) = 0$

$$\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{f_9(h, k)}{\sqrt{h^2 + k^2}} = \lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{k^3}{\sqrt{h^2 + k^2}} = \lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{k^3}{h^2 + k^2}$$

y tomando polares

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{r^3 \operatorname{sen}^3 \theta}{r^2} = \lim_{r \rightarrow 0} r \operatorname{sen}^3 \theta = 0,$$

que no depende de θ , además

$$|r \operatorname{sen}^3 \theta| \leq r$$

con

$$\lim_{r \rightarrow 0} r = 0,$$

luego el límite existe y es 0, así que la función es diferenciable en el origen y su diferencial es nula.

2. Calcula las derivadas parciales de las funciones del problema anterior para puntos distintos del origen.

a)

$$f_1(x, y) = \begin{cases} \frac{x^4 + y^4}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial f_1}{\partial x} = \frac{2x^5 + 4x^3y^2 - 2xy^4}{(x^2 + y^2)^2} \\ \frac{\partial f_1}{\partial y} = \frac{2y^5 + 4y^3x^2 - 2yx^4}{(x^2 + y^2)^2} \end{cases}$$

b)

$$f_2(x, y) = \begin{cases} \frac{4xy^3}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial f_2}{\partial x} = \frac{4y^5 - 4x^2y^3}{(x^2 + y^2)^2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial y} = \frac{12x^3y^2 + 4xy^4}{(x^2 + y^2)^2} \end{cases}$$

c)

$$f_3(x, y) = \begin{cases} \frac{x^4 + y^4}{\sqrt{x^2 + y^2}} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial f_3}{\partial x} = -\frac{x(y^4 - 4x^2y^2 - 3x^4)}{(x^2 + y^2)^{3/2}} \\ \frac{\partial f_3}{\partial y} = \frac{y(3y^4 + 4x^2y^2 - x^4)}{(x^2 + y^2)^{3/2}} \end{cases}$$

d)

$$f_4(x, y) = \begin{cases} \frac{x + y}{\sqrt{x^2 + y^2}} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial f_5}{\partial x} = \frac{y(y - x)}{(x^2 + y^2)^{3/2}} \\ \frac{\partial f_5}{\partial y} = \frac{x(x - y)}{(x^2 + y^2)^{3/2}} \end{cases}$$

e)

$$f_5(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2y}{\sqrt{x^2 + y^2}} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial f_5}{\partial x} = \frac{xy(2y^2 + x^2)}{(x^2 + y^2)^{3/2}} \\ \frac{\partial f_5}{\partial y} = \frac{x^4}{(x^2 + y^2)^{3/2}} \end{cases}$$

f)

$$f_6(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial f_6}{\partial x} = \frac{y^3}{(x^2 + y^2)^{3/2}} \\ \frac{\partial f_6}{\partial y} = \frac{x^3}{(x^2 + y^2)^{3/2}} \end{cases}$$

g)

$$f_7(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^3}{x^2 + y^6} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial f_7}{\partial x} = \frac{y^3(y^3 - x)(y^3 + x)}{(x^2 + y^6)^2} \\ \frac{\partial f_7}{\partial y} = \frac{3xy^2(x - y^3)(y^3 + x)}{(x^2 + y^6)^2} \end{cases}$$

h)

$$f_8(x, y) = \begin{cases} \frac{y^2(x-y)}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial f_8}{\partial x} = \frac{y^3(x+y)}{(x^2+y^2)^{3/2}} \\ \frac{\partial f_8}{\partial y} = \frac{y(2x^3 - 3x^2y + xy^2 - 2y^3)}{(x^2+y^2)^{3/2}} \end{cases}$$

i)

$$f_9(x, y) = \begin{cases} \frac{y^3}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial f_9}{\partial x} = -\frac{xy^3}{(x^2+y^2)^{3/2}} \\ \frac{\partial f_9}{\partial y} = \frac{y^2(2y^2+3x^2)}{(x^2+y^2)^{3/2}} \end{cases}$$

3. Sea $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{\text{sen}(xy)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ g(y) & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

¿Es posible determinar $g(y)$ para que la función $f(x, y)$, sea continua en todos los puntos para los que $x = 0$? Calcula $\frac{\partial f}{\partial x}$ y $\frac{\partial f}{\partial y}$.

Solución: El estudio de la continuidad de esta función se realizó en la hoja del tema 13, ejercicio 6, donde se determinó que

$$g(y) = y.$$

Para las derivadas parciales, tendremos. Si $(x, y) \neq (0, y)$

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{xy \cos(xy) - \text{sen}(xy)}{x^2} \\ \frac{\partial f}{\partial y} = \cos(xy) \end{cases}$$

Para los puntos de la forma $(0, y)$ tendremos que utilizar la definición por límites de la derivada parcial

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(0, y) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f((0, y) + t(1, 0)) - f(0, y)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t, y) - f(0, y)}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\frac{\text{sen}(ty)}{t} - y}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(ty) - ty}{t^2} = 0 \end{aligned}$$

(Usando L'Hôpital 2 veces)

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{y \cos(ty) - y}{2t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{-y^2 \text{sen}(ty)}{2} = 0$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial y}(0, y) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f((0, y) + t(0, 1)) - f(0, y)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(0, y + t) - f(0, y)}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(y + t) - y}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{t} = 1\end{aligned}$$

4. Sea $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 + |y|^\alpha}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Estudiar para qué valores de α , la función $f(x, y)$ es continua en $(0, 0)$. Estudiar para qué valores de α , existen $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$ y $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$. Estudiar para qué valores de α la función $f(x, y)$ es diferenciable en $(0, 0)$.

Solución: El estudio de la continuidad de esta función se realizó en la hoja del tema 13, ejercicio 7, donde se determinó que

$$\alpha > 2.$$

Para calcular las derivadas parciales en el $(0, 0)$ hacemos uso de la definición por límites

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f((0, 0) + t(1, 0)) - f(0, 0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t, 0) - f(0, 0)}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t, 0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^3 + |0|^\alpha}{t^2 + 0^2} = 1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f((0, 0) + t(0, 1)) - f(0, 0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(0, t) - f(0, 0)}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(0, t)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{0^3 + |t|^\alpha}{0^2 + t^2} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{|t|^\alpha}{t^2}\end{aligned}$$

La primera derivada parcial existe para cualquier valor de α , para que exista la derivada parcial respecto de y el valor de α debe ser mayor que 2, ya que en caso contrario los límites laterales tienen valores distintos y en este caso el límite vale 0.

Para que la función sea diferenciable debe ser continua, así que $\alpha > 2$ y deben existir las derivadas parciales, luego $\alpha > 3$, y para este caso tendremos

$$df(0, 0) = \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) dx + \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) dy = 0dx + 0dy$$

Luego si calculamos

$$\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{f(h, k) - f(0, 0) - df(0, 0)(h, k)}{\sqrt{h^2 + k^2}} = \lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{\frac{h^3 + |k|^\alpha}{h^2 + k^2}}{\sqrt{h^2 + k^2}} = \lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{h^3 + |k|^\alpha}{(h^2 + k^2)^{3/2}}$$

Usando coordenadas polares $h = r \cos \theta$ y $k = r \sin \theta$

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{r^3 \cos^3 \theta + |r \sin \theta|^\alpha}{r^3} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{r^3 \cos^3 \theta + r^\alpha |\sin \theta|^\alpha}{r^3}$$

Como estamos suponiendo $\alpha > 3$, sacamos factor común r^3

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{r^3 \cos^3 \theta + r^\alpha |\sin \theta|^\alpha}{r^3} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{r^3 (\cos^3 \theta + r^{\alpha-3} |\sin \theta|^\alpha)}{r^3} = \lim_{r \rightarrow 0} \cos^3 \theta + r^{\alpha-3} |\sin \theta|^\alpha$$

y puesto que $\alpha - 3 > 0$

$$\lim_{r \rightarrow 0} \cos^3 \theta + r^{\alpha-3} |\sin \theta|^\alpha = \cos^3 \theta$$

límite que depende de θ y por tanto no es diferenciable para ningún valor de α .

5. Dada la función

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^6}{(x^2 - y)^2 + x^6} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

a) Estudia su continuidad y diferenciability en $(0, 0)$.

b) Calcula $D_{\vec{v}} f(0, 0)$ siendo $\vec{v} = (1, 2)$.

Solución:

a) Continuidad: Para ver si tiene límites usamos cambio a polares

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow 0} \frac{r^6 \cos^6 \theta}{(r^2 \cos^2 \theta - r \sin \theta)^2 + r^6 \cos^6 \theta} &= \lim_{r \rightarrow 0} \frac{r^6 \cos^6 \theta}{r^2 (r \cos^2 \theta - \sin \theta)^2 + r^6 \cos^6 \theta} \\ &= \lim_{r \rightarrow 0} \frac{r^6 \cos^6 \theta}{r^2 ((r \cos^2 \theta - \sin \theta)^2 + r^4 \cos^6 \theta)} \\ &= \lim_{r \rightarrow 0} \frac{r^4 \cos^6 \theta}{(r \cos^2 \theta - \sin \theta)^2 + r^4 \cos^6 \theta} = 0 \end{aligned}$$

además

$$(r \cos^2 \theta - \sin \theta)^2 + r^4 \cos^6 \theta >$$

Derivadas parciales: Usando la definición por límites de las derivadas parciales

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t, 0) - f(0, 0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t, 0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^6}{(t^2 - 0)^2 + t^6} = 1 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(0, t) - f(0, 0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(0, t)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{0^6}{(0^2 - t)^2 + 0^6} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{0}{t^3} = 0 \end{aligned}$$

teniendo en cuenta que $v = (v_1, v_2) \neq (0, 0)$ y por tanto $\sqrt{v_1^2 + v_2^2} \neq 0$, entonces

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{tv_2^3}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2}} = 0,$$

y cualquier derivada direccional es nula, en particular las derivadas parciales

$$\frac{\partial f_9}{\partial x}(0,0) = D_{e_1} f_9(0,0) = 0$$

$$\frac{\partial f_9}{\partial y}(0,0) = D_{e_2} f_9(0,0) = 0$$

Diferenciabilidad: Si la función fuera diferenciable en $(0,0)$, entonces

$$df_9(0,0) = \frac{\partial f_9}{\partial x}(0,0) dx + \frac{\partial f_9}{\partial y}(0,0) dy = 0$$

y tendremos que probar si es 0 el valor del siguiente límite

$$\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{f_9(h,k) - f_9(0,0) - df_9(0,0)(h,k)}{\sqrt{h^2 + k^2}}$$

como $df_9(0,0) = 0$ y $f_9(0,0) = 0$

$$\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{f_9(h,k)}{\sqrt{h^2 + k^2}} = \lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{\frac{k^3}{\sqrt{h^2 + k^2}}}{\sqrt{h^2 + k^2}} = \lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{k^3}{h^2 + k^2}$$

y tomando polares

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{r^3 \sen^3 \theta}{r^2} = \lim_{r \rightarrow 0} r \sen^3 \theta = 0,$$

que no depende de θ , además

$$|r \sen^3 \theta| \leq r$$

con

$$\lim_{r \rightarrow 0} r = 0,$$

luego el límite existe y es 0, así que la función es diferenciable en el origen y su diferencial es nula.

6. Calcula la matriz jacobiana y la diferencial de las siguientes funciones en los puntos indicados

a) $f(x,y) = (x^2y - xy, x^3 - y^3)$ en $(1,1)$

b) $g(x,y,z) = (x^2y - xyz + z^3, x^3 - y^3 + z^3)$ en $(1,1,1)$

c) $h(x,y) = (\cos x \cos y, \sen x \sen y, \sen x \cos y)$ en $(\pi/2, 0)$

d) $l(x) = (e^x, 2x, 3x^2)$ en (0)

Solución:

a) $f(x,y) = (x^2y - xy, x^3 - y^3)$ en $(1,1)$

$$Jf(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2xy - y & x^2 - x \\ 3x^2 & -3y^2 \end{pmatrix} \Rightarrow Jf(1,1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}$$

$$df(1,1) \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h \\ 3(h-k) \end{pmatrix}$$

b) $g(x, y, z) = (x^2y - xyz + z^3, x^3 - y^3 + z^3)$ en $(1, 1, 1)$

$$Jg(x, y, z) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} & \frac{\partial f_1}{\partial z} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} & \frac{\partial f_2}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2xy - yz & x^2 - xz & -xy + 3z^2 \\ 3x^2 & -3y^2 & 3z^2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow Jg(1, 1, 1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & -3 & 3 \end{pmatrix}$$

$$dg(1, 1, 1) \begin{pmatrix} h \\ k \\ l \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & -3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h \\ k \\ l \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h + 2l \\ 3(h - k + l) \end{pmatrix}$$

c) $h(x, y) = (\cos x \cos y, \sin x \sin y, \sin x \cos y)$ en $(\pi/2, 0)$

$$Jh(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x} & \frac{\partial f_3}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin x \cos y & -\cos x \sin y \\ \cos x \sin y & \sin x \cos y \\ \cos x \cos y & -\sin x \sin y \end{pmatrix} \Rightarrow Jh\left(\frac{\pi}{2}, 0\right) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$dh\left(\frac{\pi}{2}, 0\right) \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -h \\ k \\ 0 \end{pmatrix}$$

d) $l(x) = (e^x, 2x, 3x^2)$ en (0)

$$Jl(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^x \\ 2 \\ 6x \end{pmatrix} \Rightarrow Jl(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$dl(0)(h) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} h = \begin{pmatrix} h \\ 2h \\ 0 \end{pmatrix}$$

7. Calcula el gradiente de las siguientes funciones en los puntos indicados

a) $f(x, y) = x^{x+y}$ en $(1, 0)$ b) $g(x, y, z) = \frac{x^2 + e^y}{e^z}$ en $(0, 0, 0)$

a) Usamos la expresión $a^b = e^{b \ln a}$

$$x^{x+y} = e^{(x+y) \ln(x)} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} (e^{(x+y) \ln(x)}) = e^{(x+y) \ln(x)} \left(\ln(x) + \frac{x+y}{x} \right) = x^{x+y} \left(\ln(x) + \frac{x+y}{x} \right) \\ \frac{\partial}{\partial y} (e^{(x+y) \ln(x)}) = e^{(x+y) \ln(x)} \ln(x) = x^{x+y} \ln(x) \end{cases}$$

$$\nabla f(x, y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right) = \left(x^{x+y} \left(\ln(x) + \frac{x+y}{x} \right), x^{x+y} \ln(x) \right)$$

y por tanto

$$\nabla f(1, 0) = (1, 0)$$

b) Directamente

$$\nabla g(x, y, z) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right) = \left(\frac{2x}{e^z}, \frac{e^y}{e^z}, -\frac{x^2 + e^y}{e^z} \right),$$

y por tanto

$$\nabla g(0, 0, 0) = (0, 1, -1).$$

8. Calcula la matriz jacobiana de la transformación $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$, dada por $F(x, y, z) = (x^2 - yz + z^2, xyz)$.

Solución: Las componentes de F son $f_1(x, y, z) = x^2 - yz + z^2$ y $f_2(x, y, z) = xyz$

$$JF = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} & \frac{\partial f_1}{\partial z} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} & \frac{\partial f_2}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x & -z & -y + 2z \\ yz & xz & xy \end{pmatrix}$$

9. Sea $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, con A un conjunto abierto, $\vec{a} \in A$ tal que

$$df(\vec{a})(x, y) = (x + y, x + 2y, y).$$

Calcula las derivadas parciales y las derivadas direccionales en las direcciones de los vectores $\vec{v}_1 = (1, -1)$, $\vec{v}_2 = (-1, -1)$ y $\vec{v}_3 = (0, -1)$ de las funciones coordenadas de f en \vec{a} , así como la matriz jacobiana de f en \vec{a} .

Solución: Puesto que nos dan la diferencial de la función en el punto \vec{a} , sabemos que

$$df(\vec{a})(x, y) = Jf(\vec{a}) \cdot (x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x}(\vec{a}) & \frac{\partial f_1}{\partial y}(\vec{a}) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(\vec{a}) & \frac{\partial f_2}{\partial y}(\vec{a}) \\ \frac{\partial f_3}{\partial x}(\vec{a}) & \frac{\partial f_3}{\partial y}(\vec{a}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x}(\vec{a})x + \frac{\partial f_1}{\partial y}(\vec{a})y \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(\vec{a})x + \frac{\partial f_2}{\partial y}(\vec{a})y \\ \frac{\partial f_3}{\partial x}(\vec{a})x + \frac{\partial f_3}{\partial y}(\vec{a})y \end{pmatrix}$$

por tanto debe ocurrir

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x}(\vec{a})x + \frac{\partial f_1}{\partial y}(\vec{a})y \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(\vec{a})x + \frac{\partial f_2}{\partial y}(\vec{a})y \\ \frac{\partial f_3}{\partial x}(\vec{a})x + \frac{\partial f_3}{\partial y}(\vec{a})y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + y \\ x + 2y \\ y \end{pmatrix}$$

de donde se deduce que las derivadas parciales y la matriz Jacobiana en \vec{a} vienen dados por

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\partial f_1}{\partial x}(\vec{a}) = 1; \frac{\partial f_1}{\partial y}(\vec{a}) = 1 \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(\vec{a}) = 1; \frac{\partial f_2}{\partial y}(\vec{a}) = 2 \\ \frac{\partial f_3}{\partial x}(\vec{a}) = 0; \frac{\partial f_3}{\partial y}(\vec{a}) = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow Jf(\vec{a}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Teniendo en cuenta ahora que

$$D_{\vec{v}} f(\vec{a}) = df(\vec{a}) \cdot \vec{v} = Jf(\vec{a}) \cdot \vec{v}$$

tendremos

$$D_{\vec{v}_1} f(\vec{a}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$D_{\vec{v}_2} f(\vec{a}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$D_{\vec{v}_3} f(\vec{a}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

10. Sean $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, y $G : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$, dadas por $F(x, y) = (x^2, xy, y^2)$ y $G(u, v, w) = (u + v + w, u - v - 2w, 2u + 3v, uvw)$. Calcula la matriz jacobiana de la composición $G \circ F$.

Solución: Usaremos el teorema de la función compuesta

$$JF(x, y) = \begin{pmatrix} 2x & 0 \\ y & x \\ 0 & 2y \end{pmatrix}$$

mientras que

$$JG(u, v, w) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \\ 2 & 3 & 0 \\ vw & uw & uv \end{pmatrix}$$

Usando el teorema de la función compuesta

$$J(G \circ F)(x, y) = JG(F(x, y)) JF(x, y) = JG(F(x^2, xy, y^2)) JF(x, y)$$

$$\begin{aligned} &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \\ 2 & 3 & 0 \\ xy^3 & x^2y^2 & x^3y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2x & 0 \\ y & x \\ 0 & 2y \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2x + y & x + 2y \\ 2x - y & -x - 4y \\ 4x + 3y & 3x \\ 3x^2y^3 & 3x^3y^2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

11. Sean $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, y $G : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$, dadas por $F(x, y) = (e^{x^2+y^2}, x^2 - y^2, \pi(xy + y^2))$ y $G(u, v, w) = (v + \ln(u), \sin(v + w))$. Calcula la matriz jacobiana de la composición $G \circ F$ en el punto $(1, 1)$.

Solución: Usaremos el teorema de la función compuesta. Para ello calcularemos JF y JG

$$JF = \begin{pmatrix} 2xe^{x^2+y^2} & 2ye^{x^2+y^2} \\ 2x & -2y \\ \pi y & \pi(x + 2y) \end{pmatrix} \Rightarrow JF(1, 1) = \begin{pmatrix} 2e^2 & 2e^2 \\ 2 & -2 \\ \pi & 3\pi \end{pmatrix}$$

por otro lado

$$F(1, 1) = (e^2, 0, 2\pi)$$

y

$$JG(u, v, w) = \begin{pmatrix} \frac{1}{u} & 1 & 0 \\ 0 & \cos(v + w) & \cos(v + w) \end{pmatrix}$$

por tanto

$$\begin{aligned} JH(1,1) &= JG(F(1,1))JF(1,1) = JG(e^2, 0, 2\pi)JF(1,1) \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{e^2} & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2e^2 & 2e^2 \\ 2 & -2 \\ \pi & 3\pi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 2+\pi & -2+3\pi \end{pmatrix} \end{aligned}$$

12. Sean $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, y $G : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$, dadas por $F(x, y, z) = (x^2 + y^2, xyz, z^2 - x^2)$ y $G(u, v, w) = (\cos(u + w), e^v)$. Calcula la matriz jacobiana de la composición $G \circ F$ en el punto $(0, \sqrt{\pi}, \sqrt{\pi})$.

Solución: Usaremos el teorema de la función compuesta. Para ello calcularemos JF y JG

$$JF = \begin{pmatrix} 2x & 2y & 0 \\ yz & xz & xy \\ -2x & 0 & 2z \end{pmatrix} \Rightarrow JF(0, \sqrt{\pi}, \sqrt{\pi}) = \begin{pmatrix} 0 & 2\sqrt{\pi} & 0 \\ \pi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2\sqrt{\pi} \end{pmatrix}$$

por otro lado

$$F(0, \sqrt{\pi}, \sqrt{\pi}) = (\pi, \pi, \pi)$$

y

$$JG(u, v, w) = \begin{pmatrix} -\sen(u+w) & 0 & -\sen(u+w) \\ 0 & e^v & 0 \end{pmatrix}$$

por tanto

$$\begin{aligned} JH(0, \sqrt{\pi}, \sqrt{\pi}) &= JG(F(0, \sqrt{\pi}, \sqrt{\pi}))JF(0, \sqrt{\pi}, \sqrt{\pi}) = JG(\pi, \pi, \pi) \cdot JF(0, \sqrt{\pi}, \sqrt{\pi}) \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^\pi & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2\sqrt{\pi} & 0 \\ \pi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2\sqrt{\pi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \pi e^\pi & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

13. Obtener la matriz jacobiana de la descomposición $g \circ F$, siendo $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, dada por $F(x, y) = (2x + 3y, xy)$ y $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por $g(u, v) = uv$.

Solución: Usaremos el teorema de la función compuesta. Para ello calcularemos JF y $Jg = \nabla g$

$$JF = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ y & x \end{pmatrix}$$

mientras que

$$\nabla g(u, v) = (v, u)$$

y por tanto

$$\begin{aligned} J(g \circ F) &= \nabla g(F(x, y)) \cdot JF(x, y) = \nabla g(2x + 3y, xy) \cdot JF(x, y) \\ &= (xy, 2x + 3y) \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ y & x \end{pmatrix} \\ &= (4xy + 3y^2, 6xy + 2x^2) \end{aligned}$$

Podemos realizar la composición de las funciones

$$g \circ F(x, y) = g(F(x, y)) = g(2x + 3y, xy) = (2x + 3y)xy = 2x^2y + 3y^2x$$

y realizar la derivada

$$\nabla h(x, y) = \nabla(g \circ F)(x, y) = (4xy + 3y^2, 2x^2 + 6yx)$$

que obviamente coincide con la anterior.

14. Resuelve los siguientes ejercicios, en primer lugar calculando la composición (es decir, expresando z en función de t) y, en segundo lugar, usando la regla de la cadena:

a) $z(x, y) = \sqrt{x} + y^2$ siendo $\begin{cases} x = e^{-2t} \\ y = 1 + \ln(t-1) \end{cases}$ calcula $\frac{\partial z}{\partial t}$

b) $z(x, y) = \sqrt{x} + y^2$ siendo $\begin{cases} x = e^{-2t+s} \\ y = s^2 + \ln(t-1) \end{cases}$ calcula $\frac{\partial z}{\partial t}$ y $\frac{\partial z}{\partial s}$

c) $z(x, y) = x \ln(y) + e^{yz}$ siendo $\begin{cases} x = 2r - 3s + 4t \\ y = \frac{r}{s} \\ z = \frac{t}{r} \end{cases}$ calcula $\frac{\partial u}{\partial r}$, $\frac{\partial u}{\partial r}$ y $\frac{\partial u}{\partial t}$

Solución:

a) Usando la composición

$$z(x, y) = z(e^{-2t}, 1 + \ln(t-1)) = \sqrt{e^{-2t}} + (1 + \ln(t-1))^2 = e^{-t} + (1 + \ln(t-1))^2$$

y por tanto

$$\frac{\partial z}{\partial t} = -e^{-t} + 2(1 + \ln(t-1)) \frac{1}{t-1}$$

Usando el teorema de la función compuesta tendremos

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial t} &= \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t} = \frac{1}{2\sqrt{x}} (-2e^{-2t}) + 2y \frac{1}{t-1} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{e^{-2t}}} (-2e^{-2t}) + 2(1 + \ln(t-1)) \frac{1}{t-1} \\ &= -\frac{1}{e^{-t}} e^{-2t} + 2(1 + \ln(t-1)) \frac{1}{t-1} \\ &= -e^{-t} + 2(1 + \ln(t-1)) \frac{1}{t-1} \end{aligned}$$

b) Usando la composición

$$z(x, y) = z(e^{-2t+s}, s^2 + \ln(t-1)) = \sqrt{e^{-2t+s}} + (s^2 + \ln(t-1))^2 = e^{-t} e^{s/2} + (s^2 + \ln(t-1))^2$$

y por tanto

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial t} &= -e^{-t} e^{s/2} + 2(s^2 + \ln(t-1)) \frac{1}{t-1} \\ \frac{\partial z}{\partial s} &= \frac{e^{-t} e^{s/2}}{2} + 4(s^2 + \ln(t-1)) s \end{aligned}$$

Usando el teorema de la función compuesta tendremos

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial z}{\partial t} &= \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t} = \frac{1}{2\sqrt{x}} (-2e^{-2t+s}) + 2y \frac{1}{t-1} \\
 &= \frac{1}{2\sqrt{e^{-2t+s}}} (-2e^{-2t+s}) + 2(s^2 + \ln(t-1)) \frac{1}{t-1} \\
 &= -\frac{1}{e^{-t}e^{s/2}} e^{-2t+s} + 2(s^2 + \ln(t-1)) \frac{1}{t-1} \\
 &= -e^{-t}e^{s/2} + 2(s^2 + \ln(t-1)) \frac{1}{t-1}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial z}{\partial s} &= \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial s} = \frac{1}{2\sqrt{x}} (e^{-2t+s}) + 2y2s \\
 &= \frac{1}{2\sqrt{e^{-2t+s}}} (e^{-2t+s}) + 4(s^2 + \ln(t-1)) s \\
 &= \frac{1}{2e^{-t}e^{s/2}} (e^{-2t+s}) + 4(s^2 + \ln(t-1)) s \\
 &= \frac{e^{-t}e^{s/2}}{2} + 4(s^2 + \ln(t-1)) s
 \end{aligned}$$

c) Usando la composición

$$u(x, y) = u\left(2r - 3s + 4t, \frac{r}{s}, \frac{t}{r}\right) = (2r - 3s + 4t) \ln\left(\frac{r}{s}\right) + e^{\frac{r}{s} \frac{t}{r}} = (2r - 3s + 4t) \ln\left(\frac{r}{s}\right) + e^{\frac{t}{s}}$$

Derivando directamente

$$\frac{\partial u}{\partial r} = 2 \ln\left(\frac{r}{s}\right) + (2r - 3s + 4t) \frac{\frac{r}{s}}{r} = 2 \ln\left(\frac{r}{s}\right) + \frac{(2r - 3s + 4t)}{r}$$

$$\frac{\partial u}{\partial s} = -3 \ln\left(\frac{r}{s}\right) + (2r - 3s + 4t) \frac{-\frac{r}{s^2}}{\frac{r}{s}} - \frac{t}{s^2} e^{\frac{t}{s}} = -3 \ln\left(\frac{r}{s}\right) - (2r - 3s + 4t) \frac{1}{s} - \frac{t}{s^2} e^{\frac{t}{s}} =$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 4 \ln\left(\frac{r}{s}\right) + \frac{1}{s} e^{\frac{t}{s}}$$

y usando el teorema de la función compuesta

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial u}{\partial r} &= \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial r} = \ln(y) 2 + \left(\frac{x}{y} + ze^{yz}\right) \frac{1}{s} + ye^{yz} \left(-\frac{t}{r^2}\right) \\
 &= 2 \ln\left(\frac{r}{s}\right) + \left(\frac{(2r - 3s + 4t)s}{r} + \frac{t}{r} e^{\frac{t}{s}}\right) \frac{1}{s} + \frac{r}{s} e^{\frac{t}{s}} \left(-\frac{t}{r^2}\right) \\
 &= 2 \ln\left(\frac{r}{s}\right) + \frac{(2r - 3s + 4t)}{r} + \frac{t}{rs} e^{\frac{t}{s}} - \frac{t}{sr} e^{\frac{t}{s}} \\
 &= 2 \ln\left(\frac{r}{s}\right) + \frac{(2r - 3s + 4t)}{r}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial s} &= \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial s} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial s} = -3 \ln(y) + \left(\frac{x}{y} + ze^{yz} \right) \left(-\frac{r}{s^2} \right) + ye^{yz} \cdot 0 \\ &= -3 \ln\left(\frac{r}{s}\right) + \left(\frac{(2r-3s+4t)s}{r} + \frac{t}{r} e^{\frac{t}{s}} \right) \left(-\frac{r}{s^2} \right) \\ &= -3 \ln\left(\frac{r}{s}\right) - \frac{(2r-3s+4t)}{s} - \frac{t}{s^2} e^{\frac{t}{s}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial t} = 4 \ln(y) + \left(\frac{x}{y} + ze^{yz} \right) \cdot 0 + ye^{yz} \frac{1}{r} \\ &= 4 \ln(y) + \frac{r}{s} e^{\frac{t}{s}} \frac{1}{r} \\ &= 4 \ln(y) + \frac{1}{s} e^{\frac{t}{s}}\end{aligned}$$

15. Sea $z = 2x^2 - 3y^3$, con $x = u + v + w$ e $y = u^2v^2w^2$, calcula $\frac{\partial z}{\partial u}$, $\frac{\partial z}{\partial v}$ y $\frac{\partial z}{\partial w}$.

Solución: Utilizamos el teorema de la función compuesta

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial u} &= \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u} = 4x - 9y2uv^2w^2 = 4(u+v+w) - 18u^3v^4w^4 \\ \frac{\partial z}{\partial v} &= \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial v} = 4x - 18y(u^2vw^2) = 4(u+v+w) - 18u^4v^3w^4 \\ \frac{\partial z}{\partial w} &= \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial w} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial w} = 4x - 18y(u^2v^2w) = 4(u+v+w) - 18u^4v^4w^3\end{aligned}$$

16. Sea $u : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, dada por

$$u(x, y, z) = (x+y)^4 + y^2(z+x)^3$$

con

$$x = r \cdot s \cdot e^{-t}; \quad y = r \cdot s \cdot \ln(1+t^2); \quad z = r^2 \cdot s \cdot \cos t$$

Calcula, usando la regla de la cadena, ∇u , para $r = 2$, $s = 1$ y $t = 0$.

Solución: Como $(r_0, s_0, t_0) = (2, 1, 0)$ entonces $(x(r_0, s_0, t_0), y(r_0, s_0, t_0), z(r_0, s_0, t_0)) = (2, 0, 4)$

Tenemos la función u

$$u : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R} \text{ con } u(x, y, z) = (x+y)^4 + y^2(z+x)^3$$

y tenemos la función F de cambio de variable

$$F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \text{ con } F(r, s, t) = (rse^{-t}, rs \ln(1+t^2), r^2s \cos t) = (x, y, z)$$

y se pide $J(u \circ F)(2, 1, 0)$. Usando la regla de la cadena:

$$J(u \circ F)(2, 1, 0) = Ju(F(2, 1, 0)) \cdot JF(2, 1, 0) = Ju(2, 0, 4) \cdot JF(2, 1, 0)$$

por una parte

$$Ju(r, s, t) = \begin{pmatrix} 4(x+y)^3 + 3y^2(z+x)^2 \\ 4(x+y)^3 + 2y(z+x)^3 \\ 3y^2(z+x)^2 \end{pmatrix}^T \Rightarrow Ju(2, 0, 4) = (32, 32, 0)$$

y por otra

$$JF(r, s, t) = \begin{pmatrix} se^{-t} & re^{-t} & -rse^{-t} \\ s \ln(1+t^2) & r \ln(1+t^2) & rs \frac{2t}{1+t^2} \\ 2rs \cos t & r^2 \cos t & -r^2 s \sin t \end{pmatrix} \Rightarrow JF(2, 1, 0) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

y finalmente

$$J(u \circ F)(2, 1, 0) = (32, 32, 0) \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & 0 \end{pmatrix} = (32 \quad 64 \quad -64)$$

17. Dada la función $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ de clase $\mathcal{C}^2(\mathbb{R})$, demuestra que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = 2 \frac{\partial^2 f}{\partial u^2}(u, v) + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}(u, v)$$

siendo

$$u = x + y \quad v = x - y$$

Solución: De las relaciones entre (u, v) y (x, y) obtenemos

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 1; \frac{\partial u}{\partial y} = 1; \frac{\partial v}{\partial x} = 1; \frac{\partial v}{\partial y} = -1.$$

Usando ahora la regla de la cadena para obtener las derivadas parciales primeras

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial v}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u} - \frac{\partial f}{\partial v}$$

y ahora las segundas

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial v} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial u} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial v} \right) \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\partial f}{\partial u} \right) \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{\partial f}{\partial u} \right) \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \left(\frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\partial f}{\partial v} \right) \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{\partial f}{\partial v} \right) \frac{\partial v}{\partial x} \right) \\ &= \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 f}{\partial v \partial u} + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} \\ &= \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial u} - \frac{\partial f}{\partial v} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial u} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial v} \right) \\
&= \left(\frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\partial f}{\partial u} \right) \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{\partial f}{\partial u} \right) \frac{\partial v}{\partial y} \right) - \left(\frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\partial f}{\partial v} \right) \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{\partial f}{\partial v} \right) \frac{\partial v}{\partial y} \right) \\
&= \left(\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} \right) - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial v \partial u} - \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} \right) \\
&= \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} - 2 \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}
\end{aligned}$$

Sumando ambas expresiones

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} \right) + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} - 2 \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} \right) = 2 \left(\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} \right)$$

18. Sea $z(x, y)$ una función de dos variables que verifica la ecuación en derivadas parciales

$$\frac{\partial z}{\partial x} - 3 \frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

Hallar la ecuación transformada si se utiliza el cambio de variable

$$\begin{cases} u = x + 2y \\ v = 3x - 2y \end{cases}$$

Solución: Usaremos la regla de la cadena, teniendo en cuenta que

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 1; \frac{\partial u}{\partial y} = 2; \frac{\partial v}{\partial x} = 3; \frac{\partial v}{\partial y} = -2$$

Notar que el determinante Jacobiano de la transformación es

$$\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \det \left(\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} \right) = -2 - 6 = -8 \neq 0$$

y por tanto es un cambio de coordenadas válido. Si derivamos respecto de x

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} + 3 \frac{\partial z}{\partial v}$$

y ahora respecto de y

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y} = 2 \frac{\partial z}{\partial u} - 2 \frac{\partial z}{\partial v}$$

sustituyendo en la ecuación

$$\frac{\partial z}{\partial x} - 3 \frac{\partial z}{\partial y} = 0 \Rightarrow \left(\frac{\partial z}{\partial u} + 3 \frac{\partial z}{\partial v} \right) - 3 \left(2 \frac{\partial z}{\partial u} - 2 \frac{\partial z}{\partial v} \right) = 0 \Rightarrow -5 \frac{\partial z}{\partial u} + 6 \frac{\partial z}{\partial v} = 0$$

19. Sea $z(x, y)$ una función de dos variables que verifica la ecuación en derivadas parciales

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 4 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + 3 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$$

Halla la ecuación transformada si se utiliza el cambio de variable

$$u = x + 2y : \quad v = 3x - 2y$$

Solución: Es el mismo cambio del problema anterior con

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 1; \frac{\partial u}{\partial y} = 2; \frac{\partial v}{\partial x} = 3; \frac{\partial v}{\partial y} = -2$$

Si derivamos respecto de x

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} + 3 \frac{\partial z}{\partial v}$$

y ahora respecto de y

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y} = 2 \frac{\partial z}{\partial u} - 2 \frac{\partial z}{\partial v}$$

Y ahora obtenemos las derivadas parciales segundas derivando las expresiones anteriores

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial u} + 3 \frac{\partial z}{\partial v} \right) \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\partial z}{\partial u} \right) \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{\partial z}{\partial u} \right) \frac{\partial v}{\partial x} \right) + 3 \left(\frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\partial z}{\partial v} \right) \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{\partial z}{\partial v} \right) \frac{\partial v}{\partial x} \right) \\ &= \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + 3 \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} + 3 \left(\frac{\partial^2 z}{\partial v \partial u} + 3 \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} \right) = \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + 6 \frac{\partial^2 z}{\partial v \partial u} + 9 \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(2 \frac{\partial z}{\partial u} - 2 \frac{\partial z}{\partial v} \right) \\ &= 2 \left(\frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\partial z}{\partial u} \right) \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{\partial z}{\partial u} \right) \frac{\partial v}{\partial y} \right) - 2 \left(\frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\partial z}{\partial v} \right) \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{\partial z}{\partial v} \right) \frac{\partial v}{\partial y} \right) \\ &= 4 \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} - 4 \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} - 2 \left(2 \frac{\partial^2 z}{\partial v \partial u} - 2 \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} \right) = 4 \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} - 8 \frac{\partial^2 z}{\partial v \partial u} + 4 \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial u} + 3 \frac{\partial z}{\partial v} \right) \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\partial z}{\partial u} \right) \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{\partial z}{\partial u} \right) \frac{\partial v}{\partial y} \right) + 3 \left(\frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\partial z}{\partial v} \right) \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{\partial z}{\partial v} \right) \frac{\partial v}{\partial y} \right) \\ &= 2 \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} - 2 \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} + 3 \left(2 \frac{\partial^2 z}{\partial v \partial u} - 2 \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} \right) = 2 \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + 4 \frac{\partial^2 z}{\partial v \partial u} - 6 \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} \end{aligned}$$

sustituyendo en la ecuación

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 4 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + 3 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} &= 0 \\ \left(\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + 6 \frac{\partial^2 z}{\partial v \partial u} + 9 \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} \right) + 4 \left(2 \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + 4 \frac{\partial^2 z}{\partial v \partial u} - 6 \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} \right) + 3 \left(4 \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} - 8 \frac{\partial^2 z}{\partial v \partial u} + 4 \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} \right) &= 0 \\ 21 \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} - 2 \frac{\partial^2 z}{\partial v \partial u} - 3 \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} &= 0 \end{aligned}$$

20. Sea $f(x, y)$ una función de dos variables que verifica la ecuación en derivadas parciales

$$x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + y^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

Hallar la ecuación transformada si se utiliza el cambio de variable

$$x = e^u; \quad y = e^v$$

Solución: El cambio es válido puesto que

$$\det \left(\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right) = \det \begin{pmatrix} e^u & 0 \\ 0 & e^v \end{pmatrix} = e^{u+v} \neq 0$$

y usando el teorema de la función inversa

$$\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = \left(\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right)^{-1} = \begin{pmatrix} e^{-u} & 0 \\ 0 & e^{-v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{x} & 0 \\ 0 & \frac{1}{y} \end{pmatrix}$$

por tanto

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{x}; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 0; \quad \frac{\partial v}{\partial x} = 0; \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1}{y}$$

Usando la regla de la cadena calculamos las derivadas parciales de f respecto de u y v

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1}{x} \frac{\partial f}{\partial u} \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1}{y} \frac{\partial f}{\partial v} \end{aligned}$$

y las segundas derivadas

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{x} \frac{\partial f}{\partial u} \right) = -\frac{1}{x^2} \frac{\partial f}{\partial u} + \frac{1}{x} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial u} \right) \\ &= -\frac{1}{x^2} \frac{\partial f}{\partial u} + \frac{1}{x} \left(\frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\partial f}{\partial u} \right) \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{\partial f}{\partial u} \right) \frac{\partial v}{\partial x} \right) \\ &= -\frac{1}{x^2} \frac{\partial f}{\partial u} + \frac{1}{x} \left(\frac{1}{x} \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} \right) = -\frac{1}{x^2} \frac{\partial f}{\partial u} + \frac{1}{x^2} \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{y} \frac{\partial f}{\partial v} \right) = -\frac{1}{y^2} \frac{\partial f}{\partial v} + \frac{1}{y} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial v} \right) \\ &= -\frac{1}{y^2} \frac{\partial f}{\partial v} + \frac{1}{y} \left(\frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\partial f}{\partial v} \right) \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{\partial f}{\partial v} \right) \frac{\partial v}{\partial y} \right) \\ &= -\frac{1}{y^2} \frac{\partial f}{\partial v} + \frac{1}{y} \left(\frac{1}{y} \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} \right) = -\frac{1}{y^2} \frac{\partial f}{\partial v} + \frac{1}{y^2} \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} \end{aligned}$$

y sustituyendo en la ecuación

$$\begin{aligned}
 x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + y^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} &= 0 \\
 x^2 \left(-\frac{1}{x^2} \frac{\partial f}{\partial u} + \frac{1}{x^2} \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} \right) + y^2 \left(-\frac{1}{y^2} \frac{\partial f}{\partial v} + \frac{1}{y^2} \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} \right) + x \left(\frac{1}{x} \frac{\partial f}{\partial u} \right) + y \left(\frac{1}{y} \frac{\partial f}{\partial v} \right) &= 0 \\
 \left(-\frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} \right) + \left(-\frac{\partial f}{\partial v} + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} \right) + \frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial v} &= 0 \\
 \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} &= 0
 \end{aligned}$$

21. Probar que la expresión

$$yz^4 + x^2z^3 - e^{xyz} = 0$$

define a $z = z(x, y)$ como función implícita de x e y , en un entorno del punto $(1, 0)$. Calcula en dicho punto $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.

Solución: Hay una ecuación y 3 incógnitas, lo que indica que hay dos variables independientes. La función es

$$\varphi(x, y, z) = yz^4 + x^2z^3 - e^{xyz}$$

Para encontrar el valor de z damos los valores $x = 1$ e $y = 0$ indicados

$$z^3 - 1 = 0 \Leftrightarrow z = 1$$

luego tenemos que comprobar que se cumplen las dos hipótesis del teorema de la función implícita en el punto $(1, 0, 1)$:

a) Las ecuaciones se cumplen en el punto indicado

$$\varphi(1, 0, 1) = 0 \cdot 1^4 + 1^2 \cdot 1^3 - e^{1 \cdot 0 \cdot 1} = 0$$

b)

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z}(x, y, z) = 4yz^3 - 3x^2z^2 - xye^{xyz} \Rightarrow \frac{\partial \varphi}{\partial z}(1, 0, 1) = -3 \neq 0$$

Luego se cumplen ambas hipótesis y la función φ define a z como función implícita de las variables x e y .

Para encontrar la derivada pedida utilizaremos la ecuación inicial. Si derivamos respecto de x , teniendo en cuenta que $z = z(x, y)$. Por simplicidad en las expresiones se utilizará z en lugar de $z(x, y)$ y $z_x = \frac{\partial z}{\partial x}$ y $z_y = \frac{\partial z}{\partial y}$

$$\frac{\partial}{\partial x}(yz^4 + x^2z^3 - e^{xyz} = 0) \Rightarrow \frac{\partial}{\partial x}(yz^4 + x^2z^3 - e^{xyz}) = 0$$

$$4yz^3z_x + 2xz^3 + 3x^2z^2z_x - e^{xyz}(yz + xyz_x) = 0 \quad (1)$$

y evaluamos en el punto $(1, 0, 1)$ sabiendo que $x = 1$, $y = 0$ y $z(1, 0) = 1$

$$2 + 3z_x(1, 0) = 0 \Rightarrow z_x(1, 0) = -\frac{2}{3}$$

y para la derivada respecto de y

$$\frac{\partial}{\partial y} (yz^4 + x^2z^3 - e^{xyz} = 0) \Rightarrow \frac{\partial}{\partial y} (yz^4 + x^2z^3 - e^{xyz}) = 0$$

$$z^4 + 4yz^3z_y + 3x^2z^2z_y - e^{xyz}(xz + xyz_y) = 0 \quad (2)$$

que para el punto $(1, 0, 1)$ se obtiene

$$1 + 3z_y(1, 0) - 1 = 0 \Rightarrow z_y(1, 0) = 0$$

Para obtener la derivada solicitada, podemos derivar (1) respecto de y o (2) respecto de x . Si usamos (1)

$$\frac{\partial}{\partial y} (4yz^3z_x + 2xz^3 + 3x^2z^2z_x - e^{xyz}(yz + xyz_x)) = 0$$

$$4z^3z_x + 12yz^2z_yz_x + 4yz^3z_{xy} + 6xz^2z_y + 3x^2(2zz_yz_x + z^2z_{xy}) - e^{xyz}(xz + xyz_y)(yz + xyz_x) - e^{xyz}(z + yz_y + xz_x +$$

Ahora sabemos que $x = 1, y = 0, z = 1, z_x = -\frac{2}{3}$ y $z_y = 0$

$$-\frac{8}{3} + 3z_{xy} - 1 + \frac{2}{3} = 0 \Rightarrow z_{xy} = 1$$

22. Probar que el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x^2y + \text{sen}(xyz) + z^2 = 1 \\ e^{yz} + xz = 1 \end{cases}$$

define a las variables y y z como funciones implícitas de x , en un entorno del punto $(1, 1, 0)$. Calcula $y'(1)$ y $z'(1)$.

Solución: Hay dos ecuaciones y 3 incógnitas, lo que indica que hay una variable independiente. Las funciones son

$$\begin{aligned} \varphi_1(x, y, z) &= x^2y + \text{sen}(xyz) + z^2 - 1 \\ \varphi_2(x, y, z) &= e^{yz} + xz - 1 \end{aligned}$$

Tenemos que comprobar que se cumplen las dos hipótesis del teorema de la función implícita en el punto $(1, 1, 0)$:

a) Las ecuaciones se deben cumplir en el punto indicado

$$\begin{aligned} \varphi_1(1, 1, 0) &= 1^2 \cdot 1 + \text{sen}(1 \cdot 1 \cdot 0) + 0^2 - 1 = 1 - 1 = 0 \\ \varphi_2(1, 1, 0) &= e^{1 \cdot 0} + 1 \cdot 0 - 1 = 1 - 1 = 0 \end{aligned}$$

b) El jacobiano de las funciones φ_k respecto de las variables dependientes debe ser distinto de cero

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\varphi_1, \varphi_2)}{\partial(y, z)}(x, y, z) &= \begin{pmatrix} x^2 + xz \cos(xyz) & xy \cos(xyz) + 2z \\ ze^{yz} & ye^{yz} + x \end{pmatrix} \\ \det \left(\frac{\partial(\varphi_1, \varphi_2)}{\partial(y, z)}(1, 1, 0) \right) &= \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \end{aligned}$$

Luego se cumplen ambas hipótesis y las ecuaciones definen a z e y como funciones implícitas de la variable x .

Para encontrar las derivadas pedidas utilizaremos que

$$\begin{aligned} \frac{\partial(y, z)}{\partial(x)}(1, 1, 0) &= - \left(\frac{\partial(\varphi_1, \varphi_2)}{\partial(y, z)}(1, 1, 0) \right)^{-1} \left(\frac{\partial(\varphi_1, \varphi_2)}{\partial(x)}(1, 1, 0) \right) \\ &= - \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \frac{\partial\varphi_1}{\partial x}(1, 1, 0) \\ \frac{\partial\varphi_2}{\partial x}(1, 1, 0) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Derivando las funciones respecto de x e igualando en el punto $(1, 1, 0)$, obtenemos

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}(x, y, z) = 2xy + yz \cos(xyz) \Rightarrow \frac{\partial\varphi_1}{\partial x}(1, 1, 0) = 2$$

$$\frac{\partial\varphi_2}{\partial x}(x, y, z) = z \Rightarrow \frac{\partial\varphi_2}{\partial x}(1, 1, 0) = 0$$

por tanto

$$\frac{\partial(y, z)}{\partial(x)}(1, 1, 0) = - \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

y por tanto

$$\begin{aligned} y'(1) &= -2 \\ z'(1) &= 0 \end{aligned}$$

23. Suponiendo que las ecuaciones

$$\begin{cases} u + 2v - x^2 + y^2 = 0 \\ 2u - v - 2xy = 0 \end{cases}$$

define a las variables u y v como funciones implícitas de x e y , en un entorno de un punto adecuado. Calcula $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial v}{\partial x}$ y $\frac{\partial v}{\partial y}$.

Solución: Hay dos ecuaciones y 4 incógnitas, lo que indica que hay dos variables independiente. Las funciones son

$$\varphi_1(x, y, u, v) = u + 2v - x^2 + y^2$$

$$\varphi_2(x, y, u, v) = 2u - v - 2xy$$

Como nos indican que u y v son funciones de x e y en un entorno de un punto, por ejemplo, $P_0 = (x_0, y_0, u_0, v_0)$, entonces se cumple:

a) Las ecuaciones pasan por el punto, es decir, se cumple

$$\varphi_1(x_0, y_0, u_0, v_0) = u_0 + 2v_0 - x_0^2 + y_0^2 = 0$$

$$\varphi_2(x_0, y_0, u_0, v_0) = 2u_0 - v_0 - 2x_0y_0 = 0$$

b) También debe ocurrir en ese punto que el jacobiano de las funciones φ_k respecto de las variables dependientes es distinto de 0

$$\frac{\partial(\varphi_1, \varphi_2)}{\partial(u, v)}(x, y, u, v) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\det\left(\frac{\partial(\varphi_1, \varphi_2)}{\partial(u, v)}(x_0, y_0, u_0, v_0)\right) = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -1 - 4 = -5 \neq 0$$

que se cumple para todos los puntos, así que lo único que necesitamos es cualquier punto solución del sistema de dos ecuaciones.

La derivada implícita, viene dada por la expresión

$$\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)}(x_0, y_0, u_0, v_0) = -\left(\frac{\partial(\varphi_1, \varphi_2)}{\partial(y, z)}(x_0, y_0, u_0, v_0)\right)^{-1} \left(\frac{\partial(\varphi_1, \varphi_2)}{\partial(x, y)}(x_0, y_0, u_0, v_0)\right)$$

La matriz es constante y su inversa es

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \end{pmatrix}$$

mientras que la derivada de las funciones respecto de las variables independientes es:

$$\frac{\partial(\varphi_1, \varphi_2)}{\partial(x, y)}(x, y, u, v) = \begin{pmatrix} -2x & +2y \\ -2y & -2x \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial(\varphi_1, \varphi_2)}{\partial(x, y)}(x_0, y_0, u_0, v_0) = \begin{pmatrix} -2x_0 & +2y_0 \\ -2y_0 & -2x_0 \end{pmatrix}$$

y sustituyendo en la expresión anterior

$$\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)}(x_0, y_0, u_0, v_0) = -\begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2x_0 & +2y_0 \\ -2y_0 & -2x_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{5}x_0 + \frac{4}{5}y_0 & -\frac{2}{5}y_0 + \frac{4}{5}x_0 \\ -\frac{2}{5}y_0 + \frac{4}{5}x_0 & -\frac{2}{5}x_0 - \frac{4}{5}y_0 \end{pmatrix}$$

24. Probar si la expresión

$$xy - x + 2z + e^z = 2$$

define a z como función implícita de x e y , en un entorno del punto $(1, 2)$ con $z(1, 2) = 0$. Calcula en dicho punto $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ y $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$.

Solución: Comprobamos las hipótesis del teorema de la Función Implícita. Tenemos una ecuación y 3 incógnitas, por tanto tendremos dos variables independientes. mientras que la función φ es

$$\varphi(x, y, z) = xy - x + 2z + e^z - 2$$

a) La función debe anularse en el punto $(1, 2, 0)$

$$\varphi(1, 2, 0) = 2 - 1 + 0 + 1 - 2 = 0$$

b) Como sólo hay una variable independiente la segunda hipótesis que debe cumplirse es $\frac{\partial \varphi}{\partial z}(1, 2, 0) \neq 0$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z}(x, y, z) = 2 + e^z \Rightarrow \frac{\partial \varphi}{\partial z}(1, 2, 0) = 2 + e^0 = 3 \neq 0$$

Entonces podemos poner $z = z(x, y)$. Para obtener las derivadas pedidas, usamos la ecuación y la derivamos respecto de x e y . Por comodidad usaremos la notación $\frac{\partial z}{\partial x} = z_x$ para expresar la derivada

$$xy - x + 2z + e^z = 2 \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} \Rightarrow y - 1 + 2z_x + z_x e^z = 0 \\ \frac{\partial}{\partial y} \Rightarrow x + 2z_y + z_y e^z = 0 \end{cases}$$

y si evaluamos en el punto $(1, 2)$ con $z(1, 2) = 0$

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)_{(1,2)} \Rightarrow 2 - 1 + 2z_x(1, 2) + z_x(1, 2)e^0 = 0 \Rightarrow 1 + 3z_x(1, 2) = 0 \Rightarrow z_x(1, 2) = -\frac{1}{3} \\ \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)_{(1,2)} \Rightarrow 1 + 2z_y(1, 2) + z_y(1, 2)e^0 = 0 \Rightarrow 1 + 3z_y(1, 2) = 0 \Rightarrow z_y(1, 2) = -\frac{1}{3} \end{cases}$$

y volvemos a derivar para la segunda derivada

$$\begin{cases} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \Rightarrow 2z_{xx} + z_{xx}e^z + z_x^2 e^z = 0 \\ \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \Rightarrow 1 + 2z_{xy} + z_{xy}e^z + z_x z_y e^z = 0 \\ \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} \Rightarrow 1 + 2z_{yx} + z_{yx}e^z + z_y z_x e^z = 0 \\ \frac{\partial^2}{\partial y^2} \Rightarrow 2z_{yy} + z_{yy}e^z + z_y^2 e^z = 0 \end{cases}$$

Y sustituyendo los valores $x = 1$, $y = 2$, $z(1, 2) = 0$, $z_x(1, 2) = -\frac{1}{3}$ y $z_y(1, 2) = -\frac{1}{3}$

$$\begin{cases} 2z_{xx}(1, 2) + z_{xx}(1, 2)e^{z(1,2)} + z_x^2(1, 2)e^{z(1,2)} = 0 \Leftrightarrow z_{xx}(1, 2) = -\frac{1}{27} \\ 1 + 2z_{xy}(1, 2) + z_{xy}(1, 2)e^{z(1,2)} + z_x(1, 2)z_y(1, 2)e^{z(1,2)} = 0 \Leftrightarrow z_{xy}(1, 2) = -\frac{10}{27} \\ 1 + 2z_{yx}(1, 2) + z_{yx}(1, 2)e^{z(1,2)} + z_y(1, 2)z_x(1, 2)e^{z(1,2)} = 0 \Leftrightarrow z_{yx}(1, 2) = -\frac{10}{27} \\ 2z_{yy}(1, 2) + z_{yy}(1, 2)e^{z(1,2)} + z_y^2(1, 2)e^{z(1,2)} = 0 \Leftrightarrow z_{yy}(1, 2) = -\frac{1}{17} \end{cases}$$

25. Probar si la expresión

$$xe^z + ye^{x-1} + ze^y = 2$$

define a z como función implícita de x e y , en un entorno del punto $(1, 1)$ con $z(1, 1) = 0$. Calcula en dicho punto $\frac{\partial z}{\partial x}$ y $\frac{\partial z}{\partial y}$.

Comprobamos las hipótesis del teorema de la Función Implícita. Tenemos una ecuación y 3 incógnitas, por tanto tendremos dos variables independientes. mientras que la función φ es

$$\varphi(x, y, z) = xe^z + ye^{x-1} + ze^y - 2$$

a) La función debe anularse en el punto $(1, 1, 0)$

$$\varphi(1, 1, 0) = 1 + 1 + 0 - 2 = 0$$

b) Como sólo hay una variable independiente la segunda hipótesis que debe cumplirse es $\frac{\partial \varphi}{\partial z}(1, 1, 0) \neq 0$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z}(x, y, z) = xe^z + e^y \Rightarrow \frac{\partial \varphi}{\partial z}(1, 1, 0) = 1 + e \neq 0$$

Entonces podemos poner $z = z(x, y)$. Para obtener las derivadas pedidas, usamos la ecuación y la derivamos respecto de x e y . Usando el teorema de la función implícita

$$\frac{\partial z}{\partial(x, y)}(1, 1, 0) = - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}(1, 1, 0) \right)^{-1} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial(x, y)}(1, 1, 0) \right)$$

El primer factor lo hemos calculado antes y al ser un número real

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}(1, 1, 0) \right)^{-1} = \frac{1}{1+e}$$

Para obtener el segundo, derivamos la función respecto de x y respecto de y

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = e^z + ye^{x-1} \Rightarrow \frac{\partial \varphi}{\partial x}(1, 1, 0) = 1 + 1 = 2$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = e^{x-1} + ze^y \Rightarrow \frac{\partial \varphi}{\partial y}(1, 1, 0) = 1 + 0 = 1$$

y por tanto

$$\frac{\partial z}{\partial(x, y)}(1, 1, 0) = -\frac{1}{1+e}(2, 1) \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x}(1, 1) = \frac{-2}{1+e} \text{ y } \frac{\partial z}{\partial y}(1, 1) = \frac{-1}{1+e}$$

Podemos también utilizar la ecuación

$$xe^z + ye^{x-1} + ze^y = 2 \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} \Rightarrow e^z + xz_x e^z + ye^{x-1} + z_x e^y = 0 \\ \frac{\partial}{\partial y} \Rightarrow xz_y e^z + e^{x-1} + z_y e^y + ze^{yz} = 0 \end{cases}$$

y en $(1, 1)$

$$\frac{\partial z}{\partial x}(1, 1) = e^0 + 1z_x(1, 1)e^0 + 1e^{1-1} + z_x(1, 1)e^1 = 0 \Rightarrow 1 + z_x(1, 1) + 1 + z_x(1, 1)e = 0$$

$$2 + (1+e)z_x(1, 1) = 0 \Leftrightarrow z_x(1, 1) = -\frac{2}{1+e}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}(1, 1) \Rightarrow 1z_y(1, 1)e^0 + e^0 + z_y(1, 1)e^1 + 0e^{1 \cdot 0} = 0 \Rightarrow z_y(1, 1) + 1 + z_y(1, 1) = 0$$

$$1 + 2z_y(1, 1) = 0 \Leftrightarrow z_y(1, 1) = -\frac{1}{1+e}$$

26. Estudia si el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} xy + xyz + z - 1 = 0 \\ xyz = 0 \end{cases}$$

define a las variables y y z como funciones implícitas de x , en un entorno del punto $(1, 0, 1)$. Calcula $y'(1)$ y $z'(1)$.

Solución: Hay dos ecuaciones y 3 incógnitas, lo que indica que hay 1 variable independiente. Las funciones serían

$$\begin{aligned} \varphi_1(x, y, z) &= xy + xyz + z - 1 \\ \varphi_2(x, y, z) &= xyz \end{aligned}$$

Como nos indican que y y z son funciones de x en un entorno de $(1, 0, 1)$:

a) Las ecuaciones tienen que pasar por el punto

$$\varphi_1(1, 0, 1) = 1 \cdot 0 + 1 \cdot 0 \cdot 1 + 1 - 1 = 0$$

$$\varphi_2(1, 0, 1) = 1 \cdot 0 \cdot 1 = 0$$

b) También debe ocurrir en ese punto que el jacobiano de las funciones φ_k respecto de las variables dependientes es distinto de 0

$$\frac{\partial(\varphi_1, \varphi_2)}{\partial(y, z)}(x, y, z) = \begin{pmatrix} x + xz & xy + 1 \\ xz & xy \end{pmatrix} \Rightarrow \det \left(\frac{\partial(\varphi_1, \varphi_2)}{\partial(y, z)}(1, 0, 1) \right) = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$$

La derivada implícita, viene dada por la expresión

$$\frac{\partial(y, z)}{\partial(x)}(x, y, z) = - \left(\frac{\partial(\varphi_1, \varphi_2)}{\partial(y, z)}(1, 0, 1) \right)^{-1} \left(\frac{\partial(\varphi_1, \varphi_2)}{\partial x}(1, 0, 1) \right)$$

Calculamos la inversa

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

mientras que la derivada de las funciones respecto de las variables independientes es:

$$\frac{\partial(\varphi_1, \varphi_2)}{\partial(x)}(x, y, z) = \begin{pmatrix} y + yz \\ yz \end{pmatrix} \Rightarrow \frac{\partial(\varphi_1, \varphi_2)}{\partial(x)}(1, 0, 1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

y sustituyendo en la expresión anterior

$$\frac{\partial(y, z)}{\partial(x)}(x, y, z) = - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

27. Sea α y β dos números reales. Prueba que la ecuación

$$\text{sen}(\alpha x + \beta y + z) e^z = 0$$

define a z como función implícita de x e y , en un entorno del punto $(0, 0, 0)$. Determina los valores de α y β , para los que se cumple

$$\frac{\partial z}{\partial x}(0, 0) = 3 \text{ y } \frac{\partial z}{\partial y}(0, 0) = -3$$

Solución: Hay 1 ecuación y 3 incógnitas, lo que indica que hay 2 variables independiente. La función serían

$$\varphi(x, y, z) = \text{sen}(\alpha x + \beta y + z) e^z$$

a) Las ecuaciones tienen que pasar por el punto

$$\varphi(0, 0, 0) = \text{sen}(\alpha \cdot 0 + \beta \cdot 0 + 0) e^0 = 0$$

b) También debe ocurrir en ese punto que el jacobiano de las funciones φ respecto de las variables dependientes es distinto de 0. En este caso como sólo hay una variable dependiente, este jacobiano es la derivada de la función

$$\begin{aligned}\frac{\partial(\varphi)}{\partial(z)}(x, y, z) &= \cos(\alpha x + \beta y + z) e^z + \operatorname{sen}(\alpha x + \beta y + z) e^z \\ &= e^z (\cos(\alpha x + \beta y + z) + \operatorname{sen}(\alpha x + \beta y + z))\end{aligned}$$

$$\det\left(\frac{\partial(\varphi)}{\partial(z)}(0, 0, 0)\right) = e^0(1 + 0) = 1 \neq 0$$

La derivada implícita, viene dada por la expresión

$$\frac{\partial(z)}{\partial(x, y)}(x, y, z) = -\left(\frac{\partial(\varphi)}{\partial(z)}(x, y, z)\right)^{-1} \left(\frac{\partial(\varphi)}{\partial(x, y)}(x, y, z)\right)$$

con

$$\begin{aligned}\frac{\partial(\varphi)}{\partial(x, y)}(x, y, z) &= (\alpha \cos(\alpha x + \beta y + z) e^z, \beta \cos(\alpha x + \beta y + z) e^z) \\ &= e^z \cos(\alpha x + \beta y + z) (\alpha, \beta)\end{aligned}$$

que en el punto $(0, 0, 0)$, sería

$$\frac{\partial(z)}{\partial(x, y)}(0, 0, 0) = -(1)^{-1} \cdot (\alpha, \beta) = (-\alpha, -\beta) = \left(\frac{\partial z}{\partial x}(0, 0), \frac{\partial z}{\partial y}(0, 0)\right)$$

de donde se deduce

$$\alpha = -3 \text{ y } \beta = -3$$

28. La ecuación

$$3y^3x^4 - x^2y = 2$$

¿define a y como función implícita de x en $x_0 = 1$? Justifica la respuesta y, en caso afirmativo, calcula la ecuación de la recta tangente a y en dicho punto.

Hay 1 ecuación y 2 incógnitas, lo que indica que hay 1 variable independiente. Las funciones serían

$$\varphi(x, y) = 3y^3x^4 - x^2y - 2$$

Como nos indican que y es función de x en $x_0 = 1$, primero hay que encontrar el valor de y_0 , para ello

a) La ecuación tiene que pasar por el punto

$$\varphi(1, y_0) = 3y_0^3 - y_0 - 2 = 0$$

que es un polinomio de grado 3 y por tanto tendrá tres soluciones. Podemos probar por Ruffini que $y_0 = 1$ es una raíz, lo que permite descomponer el polinomio en

$$3y_0^3 - y_0 - 2 = (y_0 - 1)(3y_0^2 + 3y_0 + 2)$$

y las otras dos raíces se obtienen resolviendo la ecuación de segundo grado

$$y_0 = \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 24}}{6}$$

que son complejas y por tanto no nos sirven. El punto debe ser el $(1, 1)$.

b) La segunda hipótesis del teorema nos dice que la derivada de la función φ respecto de la variable dependiente y en el punto $(1, 1)$ que hemos encontrado debe ser distinta de 0

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y}(x, y, z) = 9y^2x^4 - x^2 \Rightarrow \frac{\partial \varphi}{\partial y}(1, 1) = 6 - 1 = 5 \neq 0$$

luego y se puede poner como función implícita de x .

Para encontrar la ecuación de la recta tangente en $(1, 1)$ necesitamos conocer el valor de $y'(1)$, que podemos obtener derivando la ecuación

$$9y^2x^4y' + 12y^3x^3 - 2xy - x^2y' = 0$$

y sustituyendo en el punto $x = 1, y(1) = 1$

$$6y'(1) + 12 - 2 - y'(1) = 0 \iff 5y'(1) + 10 = 0 \iff y'(1) = -2$$

La recta tangente (es el polinomio de primer grado de la función y en $x = 1$)

$$y(1) + y'(1)(x - 1) = 1 - 2(x - 1) = -2x + 3$$

La recta tangente será

$$y = -2x + 3$$

29. Probar si la expresión

$$xz + ye^{2x-z} = 2$$

define a z como función implícita de x e y , en un entorno del punto $(1, 0)$ con $z(1, 0) = 2$. En caso afirmativo calcula $\nabla z(1, 0)$.

Hay 1 ecuación y 3 incógnitas, lo que indica que hay 2 variables independientes. La función sería

$$\varphi(x, y, z) = xz + ye^{2x-z} - 2$$

Para que z sea función de x e y , en $(1, 0)$

a) La ecuación tiene que pasar por el punto $(1, 0, z(1, 0)) = (1, 0, 2)$

$$\varphi(1, 0, 2) = 1 \cdot 2 + 0 \cdot e^{2 \cdot 1 - 1} - 2 = 2 - 2 = 0$$

b) La segunda hipótesis del teorema nos dice que la derivada de la función φ respecto de la variable dependiente z en el punto $(1, 0)$ debe ser distinta de 0

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z}(x, y, z) = x - ye^{2x-z} \Rightarrow \frac{\partial \varphi}{\partial z}(1, 0, 2) = 1 - 0 \cdot e^{2 \cdot 1 - 1} = 1 \neq 0$$

luego z se puede poner como función implícita de x e y .

$$\frac{\partial(z)}{\partial(x, y)}(x, y, z) = - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}(x, y, z) \right)^{-1} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial(x, y)}(x, y, z) \right)$$

$$\frac{\partial(z)}{\partial(x, y)}(1, 0, 2) = - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}(1, 0, 2) \right)^{-1} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial(x, y)}(1, 0, 2) \right)$$

$$\frac{\partial(z)}{\partial(x, y)}(1, 0, 2) = -(1)^{-1} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial(x, y)}(1, 0, 2) \right)$$

donde

$$\frac{\partial(\varphi)}{\partial(x, y)}(x, y, z) = (z + 2ye^{2x-z}, e^{2x-z}) \Rightarrow \left(\frac{\partial(\varphi)}{\partial(x, y)}(1, 0, 2) \right) = (2, 1)$$

luego

$$\nabla z(1, 0) = (2, 1)$$

30. Sea el sistema de ecuaciones dado por

$$\begin{cases} xu + yvu^2 = 2 \\ xu^3 + y^2v^4 = 2 \end{cases}$$

y considera el punto $P = (x, y, u, v) = (1, 1, 1, 1)$

- Prueba que en un entorno del punto P el sistema define a las variables u y v como funciones implícitas de x e y .
- Encuentra una expresión formal para la matriz jacobiana $\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)}$.
- Calcula el Jacobiano anterior en el punto $(1, 1)$. Indica cuál es el valor de $\frac{\partial v}{\partial x}(1, 1)$.

Solución:

- Hay dos ecuaciones y 4 incógnitas, lo que indica que hay dos variables independiente. Las funciones son

$$\begin{aligned} \varphi_1(x, y, u, v) &= xu + yvu^2 - 2 \\ \varphi_2(x, y, u, v) &= xu^3 + y^2v^4 - 2 \end{aligned}$$

Como nos indican que u y v son funciones de x e y en un entorno de un punto, por ejemplo, $P = (1, 1, 1, 1)$, entonces se cumple:

- Las ecuaciones pasan por el punto

$$\begin{aligned} \varphi_1(1, 1, 1, 1) &= 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 \cdot 1^2 - 2 = 0 \\ \varphi_2(1, 1, 1, 1) &= 1 \cdot 1^3 + 1^2 \cdot 1^4 - 2 = 0 \end{aligned}$$

- También debe ocurrir en ese punto que el jacobiano de las funciones φ_k respecto de las variables dependientes es distinto de 0

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\varphi_1, \varphi_2)}{\partial(u, v)}(x, y, u, v) &= \begin{pmatrix} x + 2yvu & yu^2 \\ 3xu^2 & 4y^2v^3 \end{pmatrix} \\ \det \left(\frac{\partial(\varphi_1, \varphi_2)}{\partial(u, v)}(1, 1, 1, 1) \right) &= \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 12 - 3 = 9 \neq 0 \end{aligned}$$

Como se cumplen las dos hipótesis del teorema, entonces las ecuaciones definen a u y v como funciones implícitas de x e y .

- La derivada implícita, viene dada por la expresión

$$\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)}(x, y, v, w) = - \left(\frac{\partial(\varphi_1, \varphi_2)}{\partial(y, z)}(x, y, v, w) \right)^{-1} \left(\frac{\partial(\varphi_1, \varphi_2)}{\partial(x, y)}(x, y, v, w) \right)$$

a derivada de las funciones respecto de las variables independientes es:

$$\frac{\partial(\varphi_1, \varphi_2)}{\partial(x, y)}(x, y, u, v) = \begin{pmatrix} u & vu^2 \\ u^3 & 2yv^4 \end{pmatrix}$$

La expresión formal buscada será

$$\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)}(x, y, v, w) = - \begin{pmatrix} x + 2yvu & yu^2 \\ 3xu^2 & 4y^2v^3 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} u & vu^2 \\ u^3 & 2yv^4 \end{pmatrix}$$

que tendrá sentido cuando exista la matriz inversa.

c) Para el punto $(x, y) = (1, 1)$ y como $u(1, 1) = 1$ y $v(1, 1) = 1$, tendremos

$$\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)}(x, y, v, w) = - \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \frac{4}{9} & -\frac{1}{9} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & -\frac{2}{9} \\ 0 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

y por tanto

$$\frac{\partial v}{\partial x}(1, 1) = 0.$$

31. Sea $f : A \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$, con A un conjunto abierto, $\vec{a} \in A$ tal que

$$Jf(\vec{a}) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Calcula la diferencial de f en \vec{a} y las derivadas parciales y las derivadas direccionales en las direcciones de los vectores $\vec{v}_1 = (-1, -1, 1)$, $\vec{v}_2 = (-1, -1, -1)$ y $\vec{v}_3 = (0, -1, 0)$ de las funciones coordenadas de f en \vec{a} .

Solución: La diferencial viene dada por

$$df(\vec{a}) \cdot \vec{h} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h \\ j \\ k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h - k \\ -h + j + k \end{pmatrix}$$

Las derivadas parciales serían las derivadas direccionales en la dirección de los ejes coordenados que podemos obtener usando el Jacobiano

$$D_{\vec{e}_k} f(\vec{a}) = df(\vec{a}) \cdot \vec{e}_k = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \vec{e}_k$$

de forma que

$$D_{\vec{e}_1} f(\vec{a}) = \frac{\partial f}{\partial x}(\vec{a}) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$D_{\vec{e}_2} f(\vec{a}) = \frac{\partial f}{\partial y}(\vec{a}) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$D_{\vec{e}_3} f(\vec{a}) = \frac{\partial f}{\partial z}(\vec{a}) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

El resto de derivadas direccionales se calcula de modo análogo $= (-1, -1, 1)$, $= (-1, -1, -1)$ y $= (0, -1, 0)$

$$D_{\vec{v}_1} f(\vec{a}) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$D_{\vec{v}_2} f(\vec{a}) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$D_{\vec{v}_3} f(\vec{a}) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

32. Sea $f : A \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, con A un conjunto abierto, $\vec{a} \in A$ tal que la matriz jacobiana de f en \vec{a} es

$$D_{\vec{v}_1} f(\vec{a}) = -1 \quad \vec{v}_1 = (1, 1, 0)$$

$$D_{\vec{v}_2} f(\vec{a}) = 1 \quad \vec{v}_2 = (1, 0, 1)$$

$$D_{\vec{v}_3} f(\vec{a}) = 0 \quad \vec{v}_3 = (0, 1, 1)$$

Calcula la diferencial de f y las derivadas parciales en \vec{a} .

Solución: El Jacobiano de la función f en el punto \vec{a} , viene dado por

$$Jf(\vec{a}) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(\vec{a}), \frac{\partial f}{\partial y}(\vec{a}), \frac{\partial f}{\partial z}(\vec{a}) \right)$$

Y el enunciado del problema nos da la siguiente información

$$D_{\vec{v}_1} f(\vec{a}) = -1 \Rightarrow Jf(\vec{a}) \cdot \vec{v}_1 = -1$$

es decir

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}(\vec{a}), \frac{\partial f}{\partial y}(\vec{a}), \frac{\partial f}{\partial z}(\vec{a}) \right) \cdot (1, 1, 0) = -1 \iff \frac{\partial f}{\partial x}(\vec{a}) + \frac{\partial f}{\partial y}(\vec{a}) = -1$$

y el resto de vectores

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}(\vec{a}), \frac{\partial f}{\partial y}(\vec{a}), \frac{\partial f}{\partial z}(\vec{a}) \right) \cdot (1, 0, 1) = 1 \iff \frac{\partial f}{\partial x}(\vec{a}) + \frac{\partial f}{\partial z}(\vec{a}) = 1$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}(\vec{a}), \frac{\partial f}{\partial y}(\vec{a}), \frac{\partial f}{\partial z}(\vec{a}) \right) \cdot (0, 1, 1) = 0 \iff \frac{\partial f}{\partial y}(\vec{a}) + \frac{\partial f}{\partial z}(\vec{a}) = 0$$

que nos proporciona un sistema de 3 ecuaciones (las derivadas direccionales) y 3 incógnitas (las derivadas parciales en el punto) que tiene por solución

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(\vec{a}) &= 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(\vec{a}) &= -1 \\ \frac{\partial f}{\partial z}(\vec{a}) &= 1 \end{aligned}$$

La diferencial viene dada por

$$df(\vec{a}) = \frac{\partial f}{\partial x}(\vec{a}) dx + \frac{\partial f}{\partial y}(\vec{a}) dy + \frac{\partial f}{\partial z}(\vec{a}) dz = -dy + dz$$

33. Calcula el gradiente y la matriz Hessiana de las siguientes funciones:

$$(a) \quad f(x, y) = \text{sen}(x + y) e^{x-y}, \quad (b) \quad g(x, y, z) = xy e^{yz}, \quad (c) \quad h(x, y, z) = \cos(x + 2y + 3z).$$

Solución: Derivamos dos veces en cada caso

a)

$$f(x, y) = \text{sen}(x + y) e^{x-y} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = (\cos(x + y) + \text{sen}(x + y)) e^{x-y} \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = (\cos(x + y) - \text{sen}(x + y)) e^{x-y} \end{cases}$$

y

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = (-\text{sen}(x + y) + \cos(x + y)) e^{x-y} + (\cos(x + y) + \text{sen}(x + y)) e^{x-y} = 2 \cos(x + y) e^{x-y}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) &= \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = (-\text{sen}(x + y) + \cos(x + y)) e^{x-y} - (\cos(x + y) + \text{sen}(x + y)) e^{x-y} \\ &= -2 \text{sen}(x + y) e^{x-y} \end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = (-\text{sen}(x + y) - \cos(x + y)) e^{x-y} - (\cos(x + y) - \text{sen}(x + y)) e^{x-y} = -2 \cos(x + y) e^{x-y}$$

siendo

$$Hf(x, y) = \begin{pmatrix} 2 \cos(x + y) e^{x-y} & -2 \text{sen}(x + y) e^{x-y} \\ -2 \text{sen}(x + y) e^{x-y} & -2 \cos(x + y) e^{x-y} \end{pmatrix} = 2e^{x-y} \begin{pmatrix} \cos(x + y) & -\text{sen}(x + y) \\ -\text{sen}(x + y) & -\cos(x + y) \end{pmatrix}$$

b)

$$g(x, y, z) = xy e^{yz} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial g}{\partial x}(x, y, z) = y e^{yz} \\ \frac{\partial g}{\partial y}(x, y, z) = x e^{yz} + xyz e^{yz} = x e^{yz} (1 + yz) \\ \frac{\partial g}{\partial z}(x, y, z) = xy^2 e^{yz} \end{cases}$$

y

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x, y, z) = 0$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial y \partial x}(x, y, z) = \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}(x, y, z) = e^{yz} (1 + yz)$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial z \partial x}(x, y, z) = \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial z}(x, y, z) = y^2 e^{yz}$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(x, y, z) = xze^{yz} (1 + yz) + xze^{yz} = xz(2 + yz) e^{yz}$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial z \partial y}(x, y, z) = \frac{\partial^2 g}{\partial y \partial z}(x, y, z) = 2xye^{yz} + xy^2ze^{yz} = xy(2 + yz)e^{yz}$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial z^2}(x, y, z) = xy^3e^{yz}$$

siendo

$$Hg(x, y, z) = \begin{pmatrix} 0 & e^{yz}(1 + yz) & y^2e^{yz} \\ e^{yz}(1 + yz) & xz(2 + yz)e^{yz} & xy(2 + yz)e^{yz} \\ y^2e^{yz} & xy(2 + yz)e^{yz} & xy^3e^{yz} \end{pmatrix}$$

$$= e^{yz} \begin{pmatrix} 0 & 1 + yz & y^2 \\ 1 + yz & xz(2 + yz) & xy(2 + yz) \\ y^2 & xy(2 + yz) & xy^3 \end{pmatrix}$$

c)

$$h(x, y, z) = \cos(x + 2y + 3z) \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial h}{\partial x}(x, y, z) = -\operatorname{sen}(x + 2y + 3z) \\ \frac{\partial h}{\partial y}(x, y, z) = -2\operatorname{sen}(x + 2y + 3z) \\ \frac{\partial h}{\partial z}(x, y, z) = -3\operatorname{sen}(x + 2y + 3z) \end{cases}$$

y

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}(x, y, z) = -\cos(x + 2y + 3z)$$

$$\frac{\partial^2 h}{\partial y \partial x}(x, y, z) = \frac{\partial^2 h}{\partial x \partial y}(x, y, z) = -2\cos(x + 2y + 3z)$$

$$\frac{\partial^2 h}{\partial z \partial x}(x, y, z) = \frac{\partial^2 h}{\partial x \partial z}(x, y, z) = -3\cos(x + 2y + 3z)$$

$$\frac{\partial^2 h}{\partial y^2}(x, y, z) = -4\operatorname{sen}(x + 2y + 3z)$$

$$\frac{\partial^2 h}{\partial z \partial y}(x, y, z) = \frac{\partial^2 h}{\partial y \partial z}(x, y, z) = -6\cos(x + 2y + 3z)$$

$$\frac{\partial^2 h}{\partial z^2}(x, y, z) = -9\cos(x + 2y + 3z)$$

siendo

$$Hf(x, y) = \begin{pmatrix} -\cos(x + 2y + 3z) & -2\cos(x + 2y + 3z) & -3\cos(x + 2y + 3z) \\ -2\cos(x + 2y + 3z) & -4\operatorname{sen}(x + 2y + 3z) & -6\cos(x + 2y + 3z) \\ -3\cos(x + 2y + 3z) & -6\cos(x + 2y + 3z) & -9\cos(x + 2y + 3z) \end{pmatrix}$$

$$= -\cos(x + 2y + 3z) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$$

34. Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función derivable dos veces y c una constante. Comprueba que la función $\phi(x, t) = \frac{1}{2}(f(x - ct) + f(x + ct))$ es solución de la ecuación de ondas

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2}.$$

Solución: Si tomamos

$$u = x - ct$$

y

$$v = x + ct$$

entonces usando la regla de la cadena

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} \right)$$

y como f es una función real de variable real $\frac{\partial f}{\partial u} = f'(u)$ y por tanto

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{1}{2} (f'(x - ct) + f'(x + ct))$$

y derivando otra vez

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = \frac{1}{2} (f''(x - ct) + f''(x + ct))$$

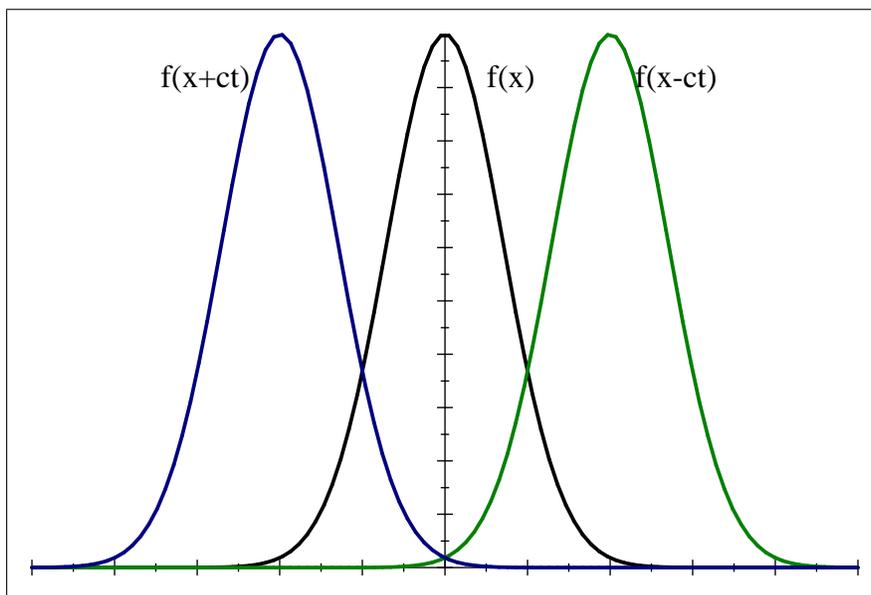
mientras que si derivamos respecto de t

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial t} \right) = \frac{1}{2} (-cf'(x - ct) + cf'(x + ct))$$

y derivando otra vez obtenemos la igualdad buscada

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = \frac{1}{2} (c^2 f''(x - ct) + c^2 f''(x + ct)) = c^2 \frac{1}{2} (f''(x - ct) + f''(x + ct)) = c^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}.$$

La función $\phi(x, t)$ es la medias de dos "ondas" que se mueven a derecha e izquierda a velocidad c



35. Sean $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ un campo escalar y $\sigma(t) = (x(t), y(t), z(t))$ una curva. Calcula $\frac{d}{dt} f(x(t), y(t), z(t))$. Aplica la fórmula obtenida para el caso concreto $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ y $\sigma(t) = (\cos t, \sin t, 1)$.

Solución: Usando la regla de la cadena

$$\frac{d}{dt}f(x(t), y(t), z(t)) = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial t}$$

o usando la notación usual de derivada para funciones de una sola variable

$$\frac{d}{dt}f(x(t), y(t), z(t)) = x'(t) \frac{\partial f}{\partial x}(x(t), y(t), z(t)) + y'(t) \frac{\partial f}{\partial y}(x(t), y(t), z(t)) + z'(t) \frac{\partial f}{\partial z}(x(t), y(t), z(t))$$

Para el ejemplo tendremos

$$\begin{aligned}x'(t) &= -\operatorname{sen} t \\y'(t) &= \operatorname{cos} t \\z'(t) &= 0\end{aligned}$$

y por otra parte

$$\nabla f(x, y, z) = (2x, 2y, 2z)$$

Usando el resultado obtenido

$$\frac{d}{dt}f(x(t), y(t), z(t)) = -\operatorname{sen}(t) 2 \operatorname{cos}(t) + \operatorname{cos}(t) 2 \operatorname{sen}(t) + 0 \cdot 2 \cdot 1 = 0$$

El resultado se obtiene de la misma forma si hacemos la composición

$$f(x(t), y(t), z(t)) = (x(t))^2 + (y(t))^2 + (z(t))^2 = \operatorname{cos}^2 t + \operatorname{sen}^2 t + 1^2 = 2$$

es decir constante sobre la curva y por tanto, como antes:

$$\frac{d}{dt}f(x(t), y(t), z(t)) = 0.$$