

1. Resuelve los siguientes problemas de valor inicial:

$$\begin{array}{lll}
 \text{(a)} \quad \begin{cases} x'' + x' - 2x = 0 \\ x(0) = 1 \\ x'(0) = 0 \end{cases} & \text{(b)} \quad \begin{cases} x'' + 6x' + 9x = 0 \\ x(1) = 0 \\ x'(1) = 1 \end{cases} & \text{(c)} \quad \begin{cases} x'' + 9x = 0 \\ x\left(\frac{\pi}{3}\right) = 0 \\ x'\left(\frac{\pi}{3}\right) = -1 \end{cases} \\
 \text{(d)} \quad \begin{cases} x'' - 2x' + 2x = 0 \\ x(0) = 1 \\ x'(0) = 0 \end{cases} & \text{(e)} \quad \begin{cases} x'' + x' - 6x = 0 \\ x(0) = 1 \\ x'(0) = 0 \end{cases} & \text{(f)} \quad \begin{cases} 2x'' - 4x' + 8x = 0 \\ x(0) = 1 \\ x'(0) = 0 \end{cases}
 \end{array}$$

Soluciones:

a) Ecuación de segundo orden lineal de coeficientes constantes homogénea, su polinomio característico es

$$p(\lambda) = \lambda^2 + \lambda - 2 = (\lambda - 1)(\lambda + 2),$$

con raíces $\lambda_1 = 1$ y $\lambda_2 = -2$, reales y distintas. La solución general será de la forma

$$x(t) = Ae^t + Be^{-2t}.$$

Para usar las condiciones iniciales, calculamos $x'(t)$

$$x'(t) = Ae^t - 2Be^{-2t},$$

y por tanto

$$x(0) = A + B = 1,$$

$$x'(0) = A - 2B = 0,$$

sistema que tiene por solución

$$A = \frac{2}{3} \quad \text{y} \quad B = \frac{1}{3}.$$

La solución del problema es

$$x(t) = \frac{2}{3}e^t + \frac{1}{3}e^{-2t}.$$

b) Ecuación de segundo orden lineal de coeficientes constantes homogénea, su polinomio característico es

$$p(\lambda) = \lambda^2 + 6\lambda + 9 = (\lambda + 3)^2,$$

con raíz $\lambda_1 = -3$, real y doble. La solución general será de la forma

$$x(t) = Ae^{-3t} + Bte^{-3t}.$$

Para usar las condiciones iniciales necesitamos $x'(t)$

$$x'(t) = -3Ae^{-3t} + Be^{-3t} - 3Bte^{-3t},$$

y por tanto

$$x(1) = Ae^{-3} + Be^{-3} = 0 \Rightarrow (A + B)e^{-3} = 0 \Rightarrow A + B = 0,$$

$$x'(1) = -3Ae^{-3} + Be^{-3} - 3Be^{-3} = 1 \Rightarrow (-3A - 2B)e^{-3} = 1,$$

de la primera ecuación obtenemos $B = -A$, y sustituyendo en la segunda obtenemos

$$(-3A + 2B)e^{-3} = 1 \Rightarrow -Ae^{-3} = 1 \Rightarrow A = -e^3$$

La solución del problema es

$$x(t) = -e^3e^{-3t} + te^3e^{-3t} = e^{3(1-t)}(t - 1).$$

c) Ecuación de segundo orden lineal de coeficientes constantes homogénea, su polinomio característico es

$$p(\lambda) = \lambda^2 + 9,$$

que tiene raíces complejas $\pm 3i$. Tenemos como solución general

$$x(t) = A \cos(3t) + B \operatorname{sen}(3t).$$

Calculamos $x'(t)$

$$x'(t) = -3A \operatorname{sen}(3t) + 3B \cos(3t),$$

para usar las condiciones iniciales

$$x\left(\frac{\pi}{3}\right) = A \cos(\pi) + B \operatorname{sen}(\pi) = 0 \Rightarrow -A = 0,$$

$$x'\left(\frac{\pi}{3}\right) = -3A \operatorname{sen}(\pi) + 3B \cos(\pi) = -1 \Rightarrow -3B = -1 \Rightarrow B = \frac{1}{3}.$$

Y la solución del problema es

$$x(t) = \frac{1}{3} \operatorname{sen}(3t).$$

d) Ecuación de segundo orden lineal de coeficientes constantes homogénea, su polinomio característico es

$$p(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda + 2,$$

cuyas raíces

$$\lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0 \Leftrightarrow \lambda = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 8}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{-4}}{2} = \frac{2 \pm 2i}{2} = 1 \pm i,$$

son complejas conjugadas y la solución general será de la forma

$$x(t) = Ae^t \cos(t) + Be^t \sin(t).$$

Calculamos $x'(t)$

$$x'(t) = Ae^t(\cos t - \sin t) + Be^t(\sin t + \cos t),$$

y aplicando condiciones iniciales obtenemos el sistema

$$x(0) = A \Rightarrow A = 1,$$

$$x'(0) = A + B \Rightarrow A + B = 1,$$

cuya solución es $A = 1$ y $B = 0$ y por tanto la solución del problema es

$$x(t) = e^t \cos(t).$$

e) Ecuación de segundo orden lineal de coeficientes constantes homogénea con polinomio característico

$$p(\lambda) = \lambda^2 + \lambda - 6,$$

cuyas raíces

$$\lambda^2 + \lambda - 6 = 0 \Leftrightarrow \lambda = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 24}}{2} = \frac{-1 \pm 5}{2} = \begin{cases} \lambda_1 = \frac{-1 + 5}{2} = 2 \\ \lambda_2 = \frac{-1 - 5}{2} = -3 \end{cases},$$

son reales distintas, así que la solución general es

$$x(t) = Ae^{2t} + Be^{-3t}.$$

Calculamos $x'(t)$

$$x'(t) = 2Ae^{2t} - 3Be^{-3t},$$

y aplicando condiciones iniciales obtenemos el sistema

$$x(0) = 1 \Rightarrow A + B = 1,$$

$$x'(0) = 0 \Rightarrow 2A - 3B = 0,$$

con solución $A = \frac{3}{5}$ y $B = \frac{2}{5}$, y la solución buscada es

$$x(t) = \frac{3}{5}e^{2t} + \frac{2}{5}e^{-3t}.$$

f) Ecuación de segundo orden lineal de coeficientes constantes homogénea, su polinomio característico es

$$p(\lambda) = 2\lambda^2 - 4\lambda + 8,$$

cuyas raíces

$$2\lambda^2 - 4\lambda + 8 = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 2\lambda + 4 = 0 \Leftrightarrow \lambda = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 16}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{-12}}{2} = \frac{2 \pm 2\sqrt{3}i}{2} = \begin{cases} \lambda_1 = 1 + \sqrt{3}i \\ \lambda_2 = 1 - \sqrt{3}i \end{cases},$$

son complejas conjugadas, así que la solución general es

$$x(t) = Ae^t \cos(\sqrt{3}t) + Be^t \sin(\sqrt{3}t).$$

Calculamos $x'(t)$

$$\begin{aligned} x'(t) &= Ae^t \cos \sqrt{3}t - A\sqrt{3}e^t \sin \sqrt{3}t + Be^t \sin \sqrt{3}t + B\sqrt{3}e^t \cos \sqrt{3}t, \\ &= e^t \cos \sqrt{3}t (A + B\sqrt{3}) + e^t \sin \sqrt{3}t (B - A\sqrt{3}), \end{aligned}$$

y aplicando condiciones iniciales obtenemos el sistema

$$x(0) = 1 \Rightarrow A = 1,$$

$$x'(0) = 0 \Rightarrow A + B\sqrt{3} = 0 \Rightarrow B = -\frac{A}{\sqrt{3}},$$

con solución $A = 1$ y $B = -\frac{1}{\sqrt{3}}$, y la solución buscada será en este caso

$$x(t) = e^t \cos(\sqrt{3}t) - \frac{1}{\sqrt{3}}e^t \sin(\sqrt{3}t).$$

2. Resuelve los siguientes problemas de valor frontera:

$$(a) \begin{cases} y'' + y' - 2y = 0 \\ y(0) = 2 \\ \lim_{x \rightarrow \infty} y(x) = 0 \end{cases} \quad (b) \begin{cases} y'' + 9y = 0 \\ y(0) = 0 \\ y(\pi) = 0 \end{cases}$$

a) Ecuación de segundo orden lineal de coeficientes constantes homogénea que resolvemos usando el polinomio característico

$$p(\lambda) = \lambda^2 + \lambda - 2,$$

cuyas raíces

$$\lambda^2 + \lambda - 2 = 0 \Leftrightarrow \lambda = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{-1 \pm 3}{2} = \begin{cases} \lambda_1 = \frac{-1+3}{2} = 1 \\ \lambda_2 = \frac{-1-3}{2} = -2 \end{cases}$$

son reales distintas y la solución general será de la forma

$$y(x) = Ae^x + Be^{-2x}.$$

Aplicando condiciones de contorno obtenemos el sistema

$$y(0) = 2 \Rightarrow A + B = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} y(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} Ae^x + Be^{-2x} = A \lim_{x \rightarrow \infty} e^x + B \lim_{x \rightarrow \infty} e^{-2x} = 0$$

El segundo término en el límite es 0, mientras que el primer depende de A y es $-\infty$ si $A < 0$, $+\infty$ si $A > 0$ y 0 si $A = 0$, así que para que la suma de límites sea 0, la única opción válida es que $A = 0$ y por tanto, de la primera ecuación $B = 2$. La solución es

$$y(x) = 2e^{-2x}.$$

b) Ecuación de segundo orden lineal de coeficientes constantes homogénea que resolvemos usando el polinomio característico

$$p(\lambda) = \lambda^2 + 9,$$

cuyas raíces

$$\lambda^2 + 9 = 0 \Leftrightarrow \lambda = \pm 3i$$

son complejas conjugadas, así que la solución general es

$$y(x) = A \cos(3x) + B \sin(3x)$$

y aplicando condiciones de contorno obtenemos el sistema

$$y(0) = 0 \Rightarrow A = 0$$

$$y(\pi) = 0 \Rightarrow A = 0$$

No hay ninguna restricción al valor de B , luego la solución al problema

$$y(x) = B \sin(3x). \quad B \in \mathbb{R}.$$

3. Encuentra la solución general de las siguientes ecuaciones:

$$(a) \quad y'' - y' - 6y = 2 + 3x \quad (b) \quad y'' - 8y' + 16y = 1 - 4x^3 \quad (c) \quad y'' - y' - 6y = 2e^{-3x}$$

$$(d) \quad y'' - y' - 2y = 3e^{-x} \quad (e) \quad y'' - 8y' + 16y = e^{4x} \quad (f) \quad y'' - y' - 6y = 2 \cos(3x)$$

$$(g) \quad y'' + 4y = 3 \sin(2x) \quad (h) \quad y'' + y = 2 \cos x \quad (i) \quad y'' - 2y' = 12x - 10$$

Solución: Todas las ecuaciones son lineales de orden 2, con coeficientes constantes y no homogéneas. En todos los casos calcularemos las soluciones de la ecuación homogénea y después buscaremos una solución particular.

a)

Ecuación No Homogénea	$y'' - y' - 6y = 2 + 3x$
Ecuación Homogénea	$y'' - y' - 6y = 0$
Polinomio Característico	$\lambda^2 - \lambda - 6$
Raíces	$\lambda = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 24}}{2} = \frac{1 \pm 5}{2}$
	$\lambda_1 = 3$
	$\lambda_2 = -2$
Solución Homogénea	$y_h(x) = Ae^{3x} + Be^{-2x}$

Probaremos como solución particular

$$y_p(x) = a + bx,$$

de esta forma

$$y_p'(x) = b,$$

$$y_p''(x) = 0,$$

y sustituyendo en la ecuación no homogénea

$$\underbrace{(0)}_{y_p''} - \underbrace{(b)}_{y_p'} - \underbrace{6(a+bx)}_{y_p} = 2 + 3x \Leftrightarrow (-b - 6a) - 6bx = 2 + 3x,$$

de donde, igualando los coeficientes de los polinomios en ambos miembros de la igualdad, obtendremos

$$-b - 6a = 2,$$

$$-6b = 3,$$

sistema que tiene por solución

$$b = -\frac{1}{2},$$

$$a = -\frac{1}{4},$$

con estos valores la solución particular es

$$y_p(x) = -\frac{1}{4} - \frac{1}{2}x,$$

y la solución general

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = Ae^{3x} + Be^{-2x} - \frac{1}{4} - \frac{1}{2}x.$$

b)

Ecuación No Homogénea	$y'' - 8y' + 16y = 1 - 4x^3$
Ecuación Homogénea	$y'' - 8y' + 16y = 0$
Polinomio Característico	$\lambda^2 - 8\lambda + 16$
Raíces	$\lambda = \frac{8 \pm \sqrt{64 - 64}}{2} = \frac{8 \pm 0}{2}$
	$\lambda_1 = 4$
	$\lambda_2 = 4$
Solución Homogénea	$y_h(x) = Ae^{4x} + Bxe^{4x}$

Probaremos como solución particular

$$y_p(x) = a + bx + cx^2 + dx^3,$$

de esta forma

$$y_p'(x) = b + 2cx + 3dx^2,$$

$$y_p''(x) = 2c + 6dx,$$

y sustituyendo en la ecuación no homogénea

$$\underbrace{(2c + 6dx)}_{y_p''} - 8 \underbrace{(b + 2cx + 3dx^2)}_{y_p'} + 16 \underbrace{(a + bx + cx^2 + dx^3)}_{y_p} = 1 - 4x^3$$

$$(2c - 8b + 16a) + (6d - 16c + 16b)x + (16c - 24d)x^2 + 16dx^3 = 1 - 4x^3$$

de donde, igualando los coeficientes de los polinomios en ambos miembros de la igualdad, obtendremos

$$2c - 8b + 16a = 1$$

$$6d - 16c + 16b = 0$$

$$16c - 24d = 0$$

$$16d = -4$$

sistema que tiene por solución

$$a = -\frac{1}{32} \quad b = -\frac{9}{32} \quad c = -\frac{3}{8} \quad d = -\frac{1}{4},$$

valores que nos dan como solución particular

$$y_p(x) = -\frac{1}{32} - \frac{9}{32}x - \frac{3}{8}x^2 - \frac{1}{4}x^3,$$

y como solución general

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = Ae^{4x} + Bxe^{4x} - \frac{1}{32} - \frac{9}{32}x - \frac{3}{8}x^2 - \frac{1}{4}x^3,$$

o factorizando

$$y(x) = (A + Bx)e^{4x} - \frac{8x^3 + 12x^2 + 9x + 1}{32}.$$

c)

Ecuación No Homogénea	$y'' - y' - 6y = 2e^{-3x}$
Ecuación Homogénea	$y'' - y' - 6y = 0$
Polinomio Característico	$\lambda^2 - \lambda - 6$
Raíces	$\lambda = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 24}}{2} = \frac{1 \pm 5}{2}$
	$\lambda_1 = 3$
	$\lambda_2 = -2$
Solución Homogénea	$y_h(x) = Ae^{3x} + Be^{-2x}$

Probaremos como solución particular

$$y_p(x) = ae^{-3x},$$

de esta forma

$$y_p'(x) = -3ae^{-3x},$$

$$y_p''(x) = 9ae^{-3x}$$

y sustituyendo en la ecuación no homogénea

$$\underbrace{(9ae^{-3x})}_{y_p''} - \underbrace{(-3ae^{-3x})}_{y_p'} - 6\underbrace{(ae^{-3x})}_{y_p} = 2e^{-3x},$$

$$6ae^{-3x} = 2e^{-3x},$$

igualando coeficientes obtenemos

$$6a = 2 \Rightarrow a = \frac{1}{3},$$

la solución particular es

$$y_p(x) = \frac{1}{3}e^{-3x},$$

y la solución general

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = Ae^{3x} + Be^{-2x} + \frac{1}{3}e^{-3x}.$$

d)

Ecuación No Homogénea	$y'' - y' - 2y = 3e^{-x}$
Ecuación Homogénea	$y'' - y' - 2y = 0$
Polinomio Característico	$\lambda^2 - \lambda - 2$
Raíces	$\lambda = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2}$
	$\lambda_1 = 2$
	$\lambda_2 = -1$
Solución Homogénea	$y_h(x) = Ae^{2x} + Be^{-x}$

Como el término independiente de la ecuación es de la forma $3e^{-x}$, se podría pensar en usar una solución particular de este tipo $y_p(x) = ae^{-x}$, sin embargo, este tipo de soluciones ya se encuentra dentro de la solución de la homogénea y por ello tendremos que probar con una solución particular distinta,

$$y_p(x) = axe^{-x},$$

de esta forma

$$y_p'(x) = ae^{-x} - axe^{-3x} = a(1-x)e^{-x},$$

$$y_p''(x) = -ae^{-x} - a(1-x)e^{-x} = a(x-2)e^{-x},$$

y sustituyendo en la ecuación no homogénea

$$\underbrace{(a(x-2)e^{-x})}_{y_p''} - \underbrace{(a(1-x)e^{-x})}_{y_p'} - 2\underbrace{(axe^{-x})}_{y_p} = 3e^{-x},$$

$$-3ae^{-3x} = 3e^{-x},$$

igualando coeficientes obtenemos

$$-3a = 3 \Rightarrow a = -1$$

la solución particular es

$$y_p(x) = -xe^{-x},$$

y la solución general

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = Ae^{2x} + Be^{-x} - xe^{-x}.$$

e)

Ecuación No Homogénea	$y'' - 8y' + 16y = e^{4x}$
Ecuación Homogénea	$y'' - 8y' + 16y = 0$
Polinomio Característico	$\lambda^2 - 8\lambda + 16$
Raíces	$\lambda = \frac{8 \pm \sqrt{64 - 64}}{2} = \frac{8 \pm 0}{2}$
	$\lambda_1 = 4$
	$\lambda_2 = 4$
Solución Homogénea	$y_h(x) = Ae^{4x} + Bxe^{4x}$

Como el término independiente es de la forma e^{4x} , se podría plantear una solución particular de la forma ae^{4x} , pero este tipo de soluciones ya están contempladas en la solución homogénea, así que hay que probar con otra solución. Las soluciones del tipo axe^{4x} también están contempladas en la solución homogénea, así que tampoco sirve y tendremos que probar con una solución particular del tipo

$$y_p(x) = ax^2e^{4x},$$

de esta forma

$$y_p'(x) = 2axe^{4x} + 4ax^2e^{4x} = (2ax + 4ax^2)e^{4x},$$

$$y_p''(x) = (1 + 4x)2ae^{4x} + 8ae^{4x}(x + 2x^2) = (2a + 16ax + 16ax^2)e^{4x},$$

que al sustituir en la ecuación no homogénea

$$\underbrace{((2a + 16ax + 16ax^2)e^{4x})}_{y_p''} - 8 \underbrace{((2ax + 4ax^2)e^{4x})}_{y_p'} + 16 \underbrace{(ax^2e^{4x})}_{y_p} = e^{4x},$$

$$(2a + 16ax + 16ax^2 - 8(2ax + 4ax^2) + 16ax^2)e^{4x} = e^{4x},$$

$$(2a + 16ax + 16ax^2 - 16ax - 32ax^2 + 16ax^2)e^{4x} = e^{4x},$$

$$2ae^{4x} = e^{4x},$$

de donde igualando coeficientes

$$2a = 1 \Rightarrow a = \frac{1}{2}.$$

Con este valor, la solución particular es

$$y_p(x) = \frac{1}{2}x^2e^{4x},$$

y la solución general

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = Ae^{4x} + Bxe^{4x} + \frac{1}{2}x^2e^{4x} = (2A + 2Bx + x^2) \frac{e^{4x}}{2}.$$

f)

Ecuación No Homogénea	$y'' - y' - 6y = 2 \cos(3x)$
Ecuación Homogénea	$y'' - y' - 6y = 0$
Polinomio Característico	$\lambda^2 - \lambda - 6$
Raíces	$\lambda = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 24}}{2} = \frac{1 \pm 5}{2}$
	$\lambda_1 = 3$
	$\lambda_2 = -2$
Solución Homogénea	$y_h(x) = Ae^{3x} + Be^{-2x}$

Usamos como solución particular

$$y_p(x) = a \cos 3x + b \operatorname{sen} 3x,$$

de esta forma

$$y_p'(x) = -3a \operatorname{sen} 3x + 3b \cos 3x,$$

$$y_p''(x) = -9a \cos 3x - 9b \operatorname{sen} 3x,$$

y sustituyendo en la ecuación no homogénea

$$\begin{aligned} \underbrace{(-9a \cos 3x - 9b \operatorname{sen} 3x)}_{y_p''} - \underbrace{(-3a \operatorname{sen} 3x + 3b \cos 3x)}_{y_p'} - 6 \underbrace{(a \cos 3x + b \operatorname{sen} 3x)}_{y_p} &= 2 \cos(3x) \\ (-9a - 3b - 6a) \cos 3x + (-9b + 3a - 6b) \operatorname{sen} 3x &= 2 \cos(3x) \\ (-15a - 3b) \cos 3x + (-15b + 3a) \operatorname{sen} 3x &= 2 \cos 3x \end{aligned}$$

de donde igualando coeficientes

$$-15a - 3b = 2,$$

$$3a - 15b = 0,$$

sistema que tiene por solución

$$a = -\frac{5}{39},$$

$$b = -\frac{1}{39}.$$

Con estos valores la solución particular es

$$y_p(x) = -\frac{5}{39} \cos 3x - \frac{1}{39} \operatorname{sen} 3x,$$

y la solución general

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = Ae^{3x} + Be^{-2x} - \frac{5}{39} \cos 3x - \frac{1}{39} \operatorname{sen} 3x.$$

g)

Ecuación No Homogénea	$y'' + 4y = 3 \operatorname{sen}(2x)$
Ecuación Homogénea	$y'' + 4y = 0$
Polinomio Característico	$\lambda^2 + 4$
Raíces	$\lambda = \sqrt{-4}$
	$\lambda_1 = 2i$
	$\lambda_2 = -2i$
Solución Homogénea	$y_h(x) = A \cos(2x) + B \operatorname{sen}(2x)$

El término independiente es de la forma $3 \operatorname{sen}(2x)$, luego no podemos tomar soluciones particulares de la forma $(a \operatorname{sen} 2x + b \cos 2x)$ y que están contempladas en la solución homogénea, así que hay que probar con otra solución modificada, así que tendremos que probar con una solución particular del tipo

$$y_p(x) = x(a \operatorname{sen} 2x + b \cos 2x)$$

de esta forma

$$\begin{aligned}y_p'(x) &= (a \operatorname{sen} 2x + b \cos 2x) + x(2a \cos 2x - 2b \operatorname{sen} 2x) = (b + 2ax) \cos 2x + (a - 2bx) \operatorname{sen} 2x \\y_p''(x) &= (2a \cos 2x - 2b \operatorname{sen} 2x) + (2a \cos 2x - 2b \operatorname{sen} 2x) + x(-4a \operatorname{sen} 2x - 4b \cos 2x) \\&= (4a - 4bx) \cos 2x + (-4b - 4ax) \operatorname{sen} 2x\end{aligned}$$

y sustituyendo en la ecuación no homogénea

$$\underbrace{((4a - 4bx) \cos 2x + (-4b - 4ax) \operatorname{sen} 2x)}_{y_p''} + 4 \underbrace{(x(a \operatorname{sen} 2x + b \cos 2x))}_{y_p} = 3 \operatorname{sen}(2x)$$
$$(4a - 4bx + 4bx) \cos 2x + (-4b - 4ax + 4ax) \operatorname{sen} 2x = 3 \operatorname{sen}(2x)$$

$$4a \cos 2x - 4b \operatorname{sen} 2x = 3 \operatorname{sen} 2x$$

de donde

$$\begin{aligned}4a &= 0 \\-4b &= 3\end{aligned}$$

que tiene por solución

$$\begin{aligned}a &= 0 \\b &= -\frac{3}{4}\end{aligned}$$

y la solución particular es

$$y_p(x) = -\frac{3}{4}x \cos 2x$$

Luego la solución general es

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = A \cos(2x) + B \operatorname{sen}(2x) - \frac{3}{4}x \cos 2x.$$

h)

Ecuación No Homogénea	$y'' + y = 2 \cos x$
Ecuación Homogénea	$y'' + y = 0$
Polinomio Característico	$\lambda^2 + 1$
Raíces	$\lambda = \sqrt{-1}$
	$\lambda_1 = i$
	$\lambda_2 = -i$
Solución Homogénea	$y_h(x) = A \cos x + B \sin x$

Como el término independiente es de la forma $2 \cos x$, podríamos plantearnos una solución particular de la forma $(a \sin x + b \cos x)$, pero estas soluciones ya están contempladas en la solución homogénea, así que hay que probar con otra solución modificada, así que tendremos que probar con una solución particular del tipo

$$y_p(x) = x(a \sin x + b \cos x)$$

de esta forma

$$\begin{aligned}y_p'(x) &= (a \sin x + b \cos x) + x(a \cos x - b \sin x) = (b + ax) \cos x + (a - bx) \sin x \\y_p''(x) &= (a \cos x - b \sin x) + (a \cos x - b \sin x) + x(-a \sin x - b \cos x) \\&= (2a - bx) \cos x + (-2b - ax) \sin x\end{aligned}$$

y sustituyendo en la ecuación no homogénea

$$\begin{aligned}\underbrace{((2a - bx) \cos x + (-2b - ax) \sin x)}_{y_p''} + \underbrace{(x(a \sin x + b \cos x))}_{y_p} &= 2 \cos x \\(2a - bx + bx) \cos x + (-2b - ax + ax) \sin x &= 2 \cos x \\2a \cos x - 2b \sin x &= 2 \cos x\end{aligned}$$

de donde

$$\begin{aligned}2a &= 2 \\-2b &= 0\end{aligned}$$

que tiene por solución

$$\begin{aligned}a &= 1 \\b &= 0\end{aligned}$$

y la solución particular es

$$y_p(x) = x \sin x$$

Luego la solución general es

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = A \cos x + B \sin x + x \sin x.$$

i)

Ecuación No Homogénea	$y'' - 2y' = 12x - 10$
Ecuación Homogénea	$y'' - 2y' = 0$
Polinomio Característico	$\lambda^2 - 2\lambda = \lambda(\lambda - 2)$
Raíces	$\lambda_1 = 0$
	$\lambda_2 = 2$
Solución Homogénea	$y_h(x) = A + Be^{2x}$

El término independiente es de la forma $12x - 10$, podríamos plantearnos una solución particular de la forma $(ax + b)$,

$$y_p(x) = ax + b$$

de esta forma

$$\begin{aligned} y_p'(x) &= a \\ y_p''(x) &= 0 \end{aligned}$$

y sustituyendo en la ecuación no homogénea

$$\begin{aligned} \underbrace{(0)}_{y_p''} - 2 \underbrace{(a)}_{y_p} &= 12x - 10 \\ -2a &= 12x - 10 \end{aligned}$$

pero esto es imposible ya que implica que $-2a = -10$ y $0 = 12$, lo que es imposible. ¿Porqué sucede esto? Tiene que ver porque en la EDO lineal no aparece el término en y y sólo aparecen los términos en y'' e y' . Tenemos dos formas de resolver el problema. La primera es considerar una solución particular modificada de la forma

$$y_p(x) = x(ax + b) = ax^2 + bx$$

como en los casos de raíz doble o término independiente incluido en la solución de la homogénea, de esta forma

$$\begin{aligned} y_p'(x) &= 2ax + b \\ y_p''(x) &= 2a \end{aligned}$$

y sustituyendo en la ecuación no homogénea

$$\begin{aligned} \underbrace{(2a)}_{y_p''} - 2 \underbrace{(2ax + b)}_{y_p} &= 12x - 10 \\ -4ax + (2a - 2b) &= 12x - 10 \end{aligned}$$

de donde

$$\begin{aligned} -4a &= 12 \\ 2a - 2b &= -10 \end{aligned}$$

que tiene por solución

$$\begin{aligned} a &= -3 \\ b &= 2 \end{aligned}$$

y la solución particular es

$$y_p(x) = -3x^2 + 2x$$

Luego la solución general es

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = A + Be^{2x} - 3x^2 + 2x = (A + 2x - 3x^2) + Be^{2x}.$$

La otra forma consiste en hacer un cambio en la ecuación diferencial de la forma

$$\begin{aligned} p &= y' \\ p' &= y'' \end{aligned}$$

De forma que la ecuación diferencial es

$$p' - 2p = 12x - 10$$

que es lineal y la podemos resolver con el método de variación de las constantes. Resolviendo la homogénea

$$p' - 2p = 0 \Rightarrow p' = 2p \Rightarrow \frac{p'}{p} = 2 \Rightarrow \ln p = 2x + C \Rightarrow p = Be^{2x}$$

y haciendo variar la constante B , probamos con la solución $p = B(x)e^{2x}$

$$p'(x) = B'(x)e^{2x} + 2B(x)e^{2x}$$

sustituyendo en la no homogénea

$$p' - 2p = 12x - 10 \Leftrightarrow (B'(x)e^{2x} + 2B(x)e^{2x}) - 2(B(x)e^{2x}) = 12x - 10$$

de donde

$$B'(x)e^{2x} = 12x - 10 \Rightarrow B'(x) = (12x - 10)e^{-2x}$$

e integrando por partes $u = 12x - 10$ y $dv = e^{-2x}dx$, por tanto $du = 12dx$ y $v = -\frac{1}{2}e^{-2x}$

$$\begin{aligned} B(x) &= \int (12x - 10)e^{-2x} = -(12x - 10)\frac{1}{2}e^{-2x} + \int \frac{1}{2}e^{-2x}12dx \\ &= (5 - 6x)e^{-2x} - 3e^{-2x} + C \\ &= (2 - 6x)e^{-2x} + C \end{aligned}$$

y la solución general será

$$p(x) = B(x)e^{2x} = ((2 - 6x)e^{-2x} + C)e^{2x} = (2 - 6x) + Ce^{2x}$$

recordemos que $p(x) = y'(x)$ luego integrando encontraremos el valor de $y(x)$

$$\begin{aligned} y(x) &= \int p(x) dx = \int (2 - 6x) + Ce^{2x} dx = 2x - 3x^2 + \frac{C}{2}e^{2x} + K \\ &= (K + 2x - 3x^2) + \frac{C}{2}e^{2x} \end{aligned}$$

que coincide con la solución general encontrada antes.

4. Consideremos la siguiente ecuación diferencial para el oscilador armónico sin rozamiento y bajo la acción de una fuerza externa de tipo periódico

$$x'' + \omega_0^2 x = A \cos(\omega t)$$

donde $\omega_0 = \sqrt{k/m}$. La cantidad $\nu_0 = \omega_0/2\pi$ se llama frecuencia natural del oscilador. Comprueba que si la frecuencia ω de la fuerza externa se aproxima a ω_0 , entonces la amplitud de las oscilaciones tiende a infinito, es decir, demuestra que

$$\lim_{\omega \rightarrow \omega_0} x(t) = \infty, \quad t > 0.$$

Este fenómeno se conoce con el nombre de resonancia y obviamente, debido a la analogía entre el oscilador armónico y el circuito RLC, también se da en este tipo de circuitos eléctricos.

Solución: Es una EDO lineal de segundo orden con coeficientes constantes, que resolvemos como en los apartados anteriores.

Ecuación No Homogénea	$x'' + \omega_0^2 x = A \cos(\omega t)$
Ecuación Homogénea	$x'' + \omega_0^2 x = 0$
Polinomio Característico	$\lambda^2 + \omega_0^2$
Raíces	$\lambda = \sqrt{-\omega_0^2}$
	$\lambda_1 = \omega_0 i$
	$\lambda_2 = -\omega_0 i$
Solución Homogénea	$x_h(t) = A \cos \omega_0 t + B \sin \omega_0 t$

Suponiendo $\omega \neq \omega_0$, probaremos como solución particular

$$x_p(t) = a \cos \omega t + b \sin \omega t$$

de esta forma

$$\begin{aligned} x_p'(t) &= -a\omega \sin \omega t + b\omega \cos \omega t \\ x_p''(t) &= -a\omega^2 \cos \omega t - b\omega^2 \sin \omega t \end{aligned}$$

y sustituyendo en la ecuación no homogénea

$$\begin{aligned} \underbrace{(-a\omega^2 \cos \omega t - b\omega^2 \sin \omega t)}_{x_p''} + \omega_0^2 \underbrace{(a \cos \omega t + b \sin \omega t)}_{x_p} &= A \cos(\omega t) \\ (-a\omega^2 + a\omega_0^2) \cos \omega t + (-b\omega^2 + b\omega_0^2) \sin \omega t &= A \cos(\omega t) \end{aligned}$$

de donde

$$\begin{aligned} (-a\omega^2 + a\omega_0^2) &= A \Rightarrow -a(\omega^2 - \omega_0^2) = A \\ (-b\omega^2 + b\omega_0^2) &= 0 \Rightarrow -b(\omega^2 - \omega_0^2) = 0 \end{aligned}$$

que tiene por solución

$$\begin{aligned} a &= \frac{A}{(\omega_0^2 - \omega^2)} \\ b &= 0 \end{aligned}$$

y la solución particular es

$$x_p(t) = \frac{A}{(\omega_0^2 - \omega^2)} \cos \omega t$$

Luego la solución general es

$$x(t) = x_h(t) + x_p(t) = A \cos \omega_0 t + B \sin \omega_0 t + \frac{A}{(\omega_0^2 - \omega^2)} \cos \omega t.$$

y por tanto

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \infty$$

debido a que las funciones trigonométricas están acotadas.

En el caso de que $\omega = \omega_0$, entonces la solución particular que hay que probar debe ser de la forma

$$x_p(t) = t(a \cos \omega_0 t + b \operatorname{sen} \omega_0 t)$$

de esta forma

$$x_p'(t) = (a \cos \omega_0 t + b \operatorname{sen} \omega_0 t) + t(-a\omega_0 \operatorname{sen} \omega_0 t + b\omega_0 \cos \omega_0 t)$$

$$\begin{aligned} x_p''(t) &= (-a\omega_0 \operatorname{sen} \omega_0 t + b\omega_0 \cos \omega_0 t) + (-a\omega_0 \operatorname{sen} \omega_0 t + b\omega_0 \cos \omega_0 t) + t(-a\omega_0^2 \cos \omega_0 t - b\omega_0^2 \operatorname{sen} \omega_0 t) \\ &= (2b\omega_0 - a\omega_0^2 t) \cos \omega_0 t + (-2a\omega_0 - b\omega_0^2 t) \operatorname{sen} \omega_0 t \end{aligned}$$

y sustituyendo en la ecuación no homogénea

$$\begin{aligned} x'' + \omega_0^2 x &= A \cos(\omega_0 t) \\ \underbrace{((2b\omega_0 - a\omega_0^2 t) \cos \omega_0 t + (-2a\omega_0 - b\omega_0^2 t) \operatorname{sen} \omega_0 t)}_{x_p''} + \omega_0^2 \underbrace{(t(a \cos \omega_0 t + b \operatorname{sen} \omega_0 t))}_{y_p} &= A \cos(\omega_0 t) \\ (2b\omega_0 - a\omega_0^2 t + a\omega_0^2 t) \cos \omega_0 t + (-2a\omega_0 - b\omega_0^2 t + b\omega_0^2 t) \operatorname{sen} \omega_0 t &= A \cos(\omega_0 t) \\ 2b\omega_0 \cos \omega_0 t - 2a\omega_0 \operatorname{sen} \omega_0 t &= A \cos(\omega_0 t) \end{aligned}$$

de donde

$$\begin{aligned} -2a\omega_0 &= 0 \\ 2b\omega_0 &= A \end{aligned}$$

que tiene por solución

$$\begin{aligned} a &= 0 \\ b &= \frac{A}{2\omega_0} \end{aligned}$$

y la solución particular es

$$x_p(t) = \frac{A}{2\omega_0} t \operatorname{sen} \omega_0 t$$

Luego la solución general es

$$x(t) = x_h(t) + x_p(t) = A \cos \omega_0 t + B \operatorname{sen} \omega_0 t + \frac{A}{2\omega_0} t \operatorname{sen} \omega_0 t.$$

y por tanto

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \infty$$

debido a que las funciones trigonométricas están acotadas.

5. Consideremos un circuito RLC con $R = 110$, $L = 1$, $C = 1/1000$, con unidades en el Sistema Internacional, y donde la fuerza electromotriz está dada por

$$E(t) = \begin{cases} 90, & 0 \leq t < 1 \\ 0, & t > 1. \end{cases}$$

Calcula la intensidad de corriente $I(t)$ que circula por el circuito, es decir, resuelve el problema

$$\begin{cases} \frac{d^2 I}{dt^2} + 110 \frac{dI}{dt} + 1000I = \frac{dE}{dt} \\ I(0) = 0 \\ I'(0) = 90 \end{cases}$$

Solución: Vamos a buscar la solución correspondiente al intervalo $[0, 1]$, para ello y teniendo en cuenta que $\frac{dE}{dt} = 0$. Teniendo en cuenta que se cumple la ecuación

$$L \frac{dI}{dt} + RI + \frac{1}{C}Q = E \quad \forall t \Rightarrow \frac{dI}{dt} + 110I + 1000Q = 90 \quad t \in [0, 1]$$

con los datos conocidos, obtenemos

$$I'(0) + 110I(0) + 1000Q(0) = 90 \Leftrightarrow 90 + 1000Q(0) = 90 \Leftrightarrow Q(0) = 0$$

es decir no hay carga en el circuito en $t = 0$. Ahora resolvemos el problema

Ecuación Homogénea	$\frac{d^2 I}{dt^2} + 110 \frac{dI}{dt} + 1000I = 0$
Polinomio Característico	$\lambda^2 + 110\lambda + 1000 = 0$
Raíces	$\lambda_1 = -10$ $\lambda_2 = -100$
Solución	$I(t) = Ae^{-10t} + Be^{-100t}$ $I'(t) = -10Ae^{-10t} - 100Be^{-100t}$

aplicando condiciones iniciales obtenemos el sistema

$$I(0) = 0 \Rightarrow A + B = 0$$

$$I'(0) = 90 \Rightarrow -10A - 100B = 90$$

que tiene por solución

$$\begin{aligned} A &= 1 \\ B &= -1 \end{aligned}$$

Siendo la solución del problema para el intervalo $[0, 1]$

$$I_1(t) = e^{-10t} - e^{-100t}.$$

Para encontrar qué ocurre para $t > 1$, tendremos que encontrar los valores de $I(1)$ y $I'(1)$ que hay en el circuito cuando la función E cambia de 90 a 0. Sabemos que

$$\frac{dI}{dt} + 110I + 1000Q = E \quad \forall t$$

por tanto para $t = 1$

$$\frac{dI}{dt}(1) + 110I(1) + 1000Q(1) = 0$$

6. Consideremos el problema de la Mecánica Cuántica que consiste en estudiar el movimiento de una partícula que se mueve libremente a lo largo del segmento $(0, L)$. Este problema se modeliza matemáticamente por medio del problema de contorno

$$\begin{cases} -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi}{dx^2} = E\psi(x), & 0 < x < L \\ \psi(0) = \psi(L) = 0, \end{cases}$$

donde $\hbar = h/2\pi$, con h la constante de Planck, m es la masa de la partícula, E es su energía, y $\psi = \psi(x)$ es la función de onda. Comprueba que los únicos valores de energía para los que el problema anterior tiene una solución no nula son

$$E_n = \frac{n^2 h^2}{8mL^2}, \quad n \geq 1.$$

Este fenómeno se conoce en Mecánica Cuántica como cuantización de la energía. Calcula $\psi_n(x)$ teniendo en cuenta que ψ_n son funciones de onda y por tanto $\int_0^L \psi_n^2(x) dx = 1$.

7. Calcula los autovalores y autofunciones de los siguientes problemas de contorno, es decir, los valores de $\lambda \in \mathbb{R}$ para los que los siguientes problemas tienen solución no nula:

$$(a) \begin{cases} y'' + \lambda y = 0 \\ y(0) = y(1) = 0 \end{cases} \quad (b) \begin{cases} y'' + \lambda y = 0 \\ y'(0) = y'(1) = 0 \end{cases} \quad (c) \begin{cases} y'' + \lambda y = 0 \\ y(-\pi) = y(\pi) \\ y'(-\pi) = y'(\pi) \end{cases}$$

Solución: La EDO es igual en todos los casos y distinguiremos según el valor de α

Caso	Ecuación	Polinomio Característico Raíces	Solución General
$\alpha = 0$	$\Rightarrow y'' = 0$	$\Rightarrow \begin{cases} p(\lambda) = \lambda^2 \\ \lambda_1 = \lambda_2 = 0 \end{cases}$	$\Rightarrow y(t) = At + B$
$\alpha = -\beta^2 < 0$	$\Rightarrow y'' - \beta^2 y = 0$	$\Rightarrow \begin{cases} p(\lambda) = \lambda^2 - \beta^2 \\ \lambda_1 = +\beta \\ \lambda_2 = -\beta \end{cases}$	$\Rightarrow y(t) = Ae^{\beta t} + Be^{-\beta t}$
$\alpha = \beta^2 > 0$	$\Rightarrow y'' + \beta^2 y = 0$	$\Rightarrow \begin{cases} p(\lambda) = \lambda^2 + \beta^2 \\ \lambda_1 = +\beta i \\ \lambda_2 = -\beta i \end{cases}$	$\Rightarrow y(t) = A \cos \beta t + B \operatorname{sen} \beta t$

Y ahora aplicaremos las condiciones de contorno

a) Condiciones de contorno: $y(0) = y(1) = 0$

1) $\alpha = 0 \Rightarrow y(t) = At + B$

$$\begin{cases} y(0) = 0 \Rightarrow A \cdot 0 + B = 0 \\ y(1) = 0 \Rightarrow A \cdot 1 + B = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B = 0 \\ A + B = 0 \end{cases} \Rightarrow y(t) = 0$$

2) $\alpha = -\beta^2 < 0 \Rightarrow y(t) = Ae^{\beta t} + Be^{-\beta t}$

$$\begin{cases} y(0) = 0 \Rightarrow A + B = 0 \\ y(1) = 0 \Rightarrow Ae^{\beta} + Be^{-\beta} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B = -A \\ A(e^{\beta} - e^{-\beta}) = 0 \end{cases} \Rightarrow y(t) = 0$$

3) $\alpha = \beta^2 > 0 \Rightarrow y(t) = A \cos \beta t + B \operatorname{sen} \beta t$

$$\begin{cases} y(0) = 0 \Rightarrow A = 0 \\ y(1) = 0 \Rightarrow A \cos \beta + B \operatorname{sen} \beta = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 0 \\ B \operatorname{sen} \beta = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} B = 0 \\ \operatorname{sen} \beta = 0 \Rightarrow \beta = n\pi \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y(0) = 0 \\ y(t) = B \operatorname{sen} n\pi t \end{cases}$$

b) Condiciones de contorno: $y'(0) = y'(1) = 0$

1) $\alpha = 0 \Rightarrow y(t) = At + B \Rightarrow y'(t) = A$

$$\begin{cases} y'(0) = 0 \Rightarrow A = 0 \\ y'(1) = 0 \Rightarrow A = 0 \end{cases} \Rightarrow y(t) = B$$

2) $\alpha = -\beta^2 < 0 \Rightarrow y(t) = Ae^{\beta t} + Be^{-\beta t} \Rightarrow y'(t) = \beta (Ae^{\beta t} - Be^{-\beta t})$

$$\begin{cases} y'(0) = 0 \Rightarrow \beta (A - B) = 0 \\ y(1) = 0 \Rightarrow \beta (Ae^{\beta} - Be^{-\beta}) = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \beta (A - B) = 0 = 0 \Rightarrow A = B \\ \beta (Ae^{\beta} - Be^{-\beta}) = 0 \Rightarrow \beta A (e^{\beta} - e^{-\beta}) = 0 \Rightarrow A = 0 \end{cases} \Rightarrow y(t) = 0$$

$$\begin{aligned}
3) \quad \alpha = \beta^2 > 0 &\Rightarrow y(t) = A \cos \beta t + B \operatorname{sen} \beta t \Rightarrow y'(t) = \beta(-A \operatorname{sen} \beta t + B \cos \beta t) \\
\begin{cases} y'(0) = 0 \Rightarrow \beta B = 0 \\ y(1) = 0 \Rightarrow \beta(-A \operatorname{sen} \beta + B \cos \beta) = 0 \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} \beta B = 0 \Rightarrow B = 0 \\ \beta(-A \operatorname{sen} \beta + B \cos \beta) = 0 \end{cases} \\
&\Rightarrow -A\beta \operatorname{sen} \beta = 0 \\
&\Rightarrow \begin{cases} A = 0 \\ \operatorname{sen} \beta = 0 \Rightarrow \beta = n\pi \end{cases} \\
&\Rightarrow \begin{cases} y(0) = 0 \\ y(t) = A \cos n\pi t \end{cases}
\end{aligned}$$

c) Condiciones de contorno: $y(-\pi) = y(\pi)$ y $y'(-\pi) = y'(\pi)$

$$\begin{aligned}
1) \quad \alpha = 0 &\Rightarrow y(t) = At + B \Rightarrow y'(t) = A \\
\begin{cases} y(-\pi) = y(\pi) \Rightarrow -A\pi + B = A\pi + B \\ y'(-\pi) = y'(\pi) \Rightarrow A = A \end{cases} &\Rightarrow -A\pi = A\pi \Rightarrow A = 0 \Rightarrow y(t) = B \\
2) \quad \alpha = -\beta^2 < 0 &\Rightarrow y(t) = Ae^{\beta t} + Be^{-\beta t} \Rightarrow y'(t) = \beta(Ae^{\beta t} - Be^{-\beta t}) \\
y(-\pi) = y(\pi) &\Rightarrow Ae^{-\beta\pi} + Be^{\beta\pi} = Ae^{\beta\pi} + Be^{-\beta\pi} \Rightarrow A = B \\
y'(-\pi) = y'(\pi) &\Rightarrow \beta(Ae^{-\beta\pi} - Be^{\beta\pi}) = \beta(Ae^{\beta\pi} - Be^{-\beta\pi}) \\
&\Rightarrow \begin{cases} \beta A = -\beta B \\ -\beta B = \beta A \end{cases} \Rightarrow A = -B
\end{aligned}$$

Por tanto

$$A = B = -B \Rightarrow A = B = 0 \Rightarrow y(t) = 0$$

$$\begin{aligned}
3) \quad \alpha = \beta^2 > 0 &\Rightarrow y(t) = A \cos \beta t + B \operatorname{sen} \beta t \Rightarrow y'(t) = \beta(-A \operatorname{sen} \beta t + B \cos \beta t) \\
y(-\pi) = y(\pi) &\Rightarrow A \cos(-\beta\pi) + B \operatorname{sen}(-\beta\pi) = A \cos(\beta\pi) + B \operatorname{sen}(\beta\pi) \\
&\Rightarrow A \cos(\beta\pi) - B \operatorname{sen}(\beta\pi) = A \cos(\beta\pi) + B \operatorname{sen}(\beta\pi) \\
&\Rightarrow \begin{cases} A = A \\ B = -B \end{cases}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
y'(-\pi) = y'(\pi) &\Rightarrow \beta(-A \operatorname{sen}(-\beta\pi) + B \cos(-\beta\pi)) = \beta(-A \operatorname{sen}(\beta\pi) + B \cos(\beta\pi)) \\
&\Rightarrow \beta(A \operatorname{sen} \beta\pi + B \cos \beta\pi) = \beta(-A \operatorname{sen}(\beta\pi) + B \cos(\beta\pi)) \\
&\Rightarrow \begin{cases} \beta A = -\beta A \\ \beta B = \beta B \end{cases}
\end{aligned}$$

De donde

$$\begin{cases} A = -A \Rightarrow A = 0 \\ B = -B \Rightarrow B = 0 \end{cases} \Rightarrow y(t) = 0$$

©Silvestre Paredes Hernández[®]